A função delta de Dirac e suas aplicações

Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana
Departamento de Física
Universidade Federal do Paraná
Curitiba, Paraná, Brasil

6 de fevereiro de 2014

O físico teórico inglês Paul Adrian Maurice Dirac introduziu, na década de 1930, a chamada função delta $\delta(x)$, como um recurso matemático útil na descrição da mecânica quântica, da qual foi um dos principais criadores [1]. Posteriormente foram descobertas outras situações em que a função delta pode ser usada. A rigor, no entanto, $\delta(x)$ não é uma função, de fato, o que, a princípio, causou um certo desconforto entre os matemáticos. Foi somente a partir da década de 1940 que um grupo de matemáticos, entre os quais o francês Laurent Schwartz, desenvolveu uma teoria rigorosa para a função delta, na qual ela é considerada uma função generalizada, ou distribuição. Em boa parte das manipulações formais, no entanto, a função delta pode ser trabalhada como uma função usual, e será este o enfoque que inicialmente adotaremos. Na sequência, veremos algumas noções da teoria de distribuições e como ela pode justificar rigorosamente as manipulações que fazemos com as funções delta e suas derivadas. Finalmente, abordaremos a resolução de equações diferenciais com funções delta por meio de transformadas integrais.

1 Definição

A "função" delta de Dirac é definida por meio das seguintes propriedades:

$$\boxed{\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0, \\ \infty, & \text{se } x = 0, \end{cases}} \tag{1}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1,} \tag{2}$$

onde $-\infty < x < \infty$ é um real. Não se define a "função" delta para argumentos complexos.

A "função" delta definida em (1)-(2) é aplicada em $x = 0$. Podemos generalizar para o caso em que é aplicada em $x = a$:

$$\boxed{\delta(x-a) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq a, \\ \infty, & \text{se } x = a, \end{cases}} \tag{3}$$

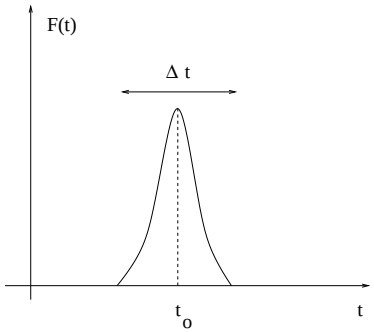


Figura 1: Uma força impulsiva.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)dx = 1,} \tag{4}$$

A rigor $\delta(x)$ não é uma função, e sim o que chamamos de distribuição, ou função generalizada. Por exemplo, se $\delta(0)$ é igual a infinito, se interpretarmos a integral em (2) no sentido de Riemann - como o limite de uma soma - chegaríamos a um resultado também infinito, ao invés de ser igual a um. No entanto, para muitas aplicações $\delta(x)$ obedece às regras do cálculo aplicáveis a funções bem-comportadas. Por isso deixaremos doravante de colocar aspas na palavra função.

2 Aplicações físicas

2.1 Mecânica clássica: forças impulsivas

Suponha uma esfera de massa m e velocidade constante v, numa trajetória unidimensional, chocando-se elasticamente com uma parede rígida. Devido à elasticidade da esfera, a colisão tem uma duração Δt, tempo durante o qual há uma transferência de momentum entre a esfera e a parede e *vice-versa*. O impulso sobre a esfera é dado por

$$I = \int_{t_0-\Delta t/2}^{t_0+\Delta t/2} F(t)dt, \tag{5}$$

onde t_0 indica o instante médio em que ocorre a colisão, e $F(t)$ é a força dependente do tempo que a parede exerce sobre a esfera [Fig. 1]. Do teorema do impulso e momentum linear, temos que

$$I = \Delta p = p_f - p_i = mv - (-mv) = 2mv = constante, \tag{6}$$

de modo que, se o intervalo de tempo Δt diminuir, o valor máximo da força $F_{max} = F(t_0)$ irá aumentar para que o impulso permaneça constante.

No limite quando $\Delta t \to 0$, podemos escrever a força impulsiva usando a função delta de Dirac

$$F(t) = I\delta(t - t_0). \tag{7}$$

Com efeito, usando (4) temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} I\delta(t-t_0)dt = I\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt}_{=1} = I.$$

2.2 Eletromagnetismo: distribuições singulares de carga elétrica

Uma carga puntiforme q situada, ao longo do eixo x, na posição $x = a$, equivale a uma distribuição singular de carga elétrica, cuja densidade (linear) é

$$\mu(x) = \frac{dq}{dx} = q\delta(x-a), \tag{8}$$

pois, integrando sobre todo o eixo, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mu(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} q\delta(x-a)dx = q\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)dx}_{=1} = q.$$

Uma corrente elétrica filamentar i também podem ser representada, usando funções delta multidimensionais (a serem vistas mais à frente), como densidades superficiais de corrente $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ singulares, já que

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{dA} = i.$$

3 Propriedades da "função" delta

3.1 Filtragem

Seja $f(x)$ uma função "bem-comportada", ou seja, satisfaz à definição clássica de função. Então vale a propriedade de filtragem

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)f(x)dx = f(a).} \tag{9}$$

Como $\delta(x-a) = 0$ se $x \neq a$, a integral só pode assumir valores não-nulos para $x = a$. Nesse caso o integrando, calculado em $x = a$, resulta $f(a)$, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)f(x)dx = f(a)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)dx}_{=1} = f(a).$$

A propriedade de filtragem vale também para sub-intervalos finitos da reta real. Se $c \leq a \leq b$ então

$$\int_{c}^{b}\delta(x-a)f(x)dx = f(a), \tag{10}$$

No entanto, se $a > b$ ou $a < c$, a função delta anula-se em todos os pontos do intervalo $[c, b]$, donde

$$\int_c^b \delta(x-a)f(x)dx = 0. \tag{11}$$

Escolhendo $f(x) = x$ e $a = 0$, (9) fornece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)xdx = f(0) = 0,$$

tal que, para todo $x \in (-\infty, +\infty)$ temos a propriedade

$$\boxed{x\delta(x) = 0.} \tag{12}$$

Analogamente mostra-se que

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a). \tag{13}$$

No entanto, devemos ter em mente que expressões como (12) e (13) só fazem sentido quando estão dentro de uma integral.

A propriedade de filtragem é válida mesmo que $f(x)$ não seja uma função bem-comportada, como a própria função delta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y)\delta(y-a)dy = \delta(x-a). \tag{14}$$

onde $x \neq a$ pois, por motivos que serão esclarecidos no tratamento matemático rigoroso que será dado no próximo capítulo, não é bem-definido o produto de duas funções delta no mesmo ponto.

3.2 Paridade

$$\boxed{\delta(x) = \delta(-x).} \tag{15}$$

Fazendo a mudança de variável $y = -x$ verificaremos as propriedades (1) e (2) da função delta:

$$\delta(-x) = \delta(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \neq 0, \text{ ou } x \neq 0, \\ \infty, & \text{se } y = 0, \text{ ou } x = 0. \end{cases}$$

Como $dx = -dy$, e permutando os limites da integração,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(-y)(-dy) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-x)dx,$$

onde trocamos y por x visto que são variáveis "mudas". Passando para o primeiro membro

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{[\delta(x) - \delta(-x)]}_{=0} dx = 0,$$

donde resulta (15).

3.3 Escala

Seja $a \neq 0$ um fator de escala, então

$$\boxed{\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x).} \tag{16}$$

Vamos supor, inicialmente, que $a > 0$, e fazer a mudança de variável $y = ax$. Então, partindo da condição de normalização (2) com $x \to y$, temos

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y)dy = a\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)dx,$$

donde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)dx = \frac{1}{a} = \frac{1}{|a|}.$$

Caso $a < 0$, então $|a| = -a$, e obtemos a mesma conclusão. Em ambos os casos, podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left[\delta(ax) - \frac{1}{|a|}\delta(x)\right]}_{=0} dx = 0,$$

donde resulta (16). Uma interessante consequência da propriedade de escala é que, caso ax seja o resultado de uma medida física de posição, podemos considerar x um número "puro" e a a respectiva unidade (como metro, nanômetro, ano-luz, etc.). Então a função delta $\delta(ax)$ tem dimensões de inverso de comprimento, ou seja, a sua unidade é 1/metro, 1/ nanômetro, 1/ ano-luz, etc.

3.4 Quando o argumento é uma função

Seja $y(x)$ uma função de x que possua zeros símples nos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$, tal que $y(x_i) = 0$ e $y'(x_i) \neq 0$. Então

$$\boxed{\delta[y(x)] = \sum_i \frac{1}{|y'(x_i)|}\delta(x - x_i)}. \tag{17}$$

Para mostrar essa importante propriedade, vamos multplicar o primeiro membro da igualdade acima por uma função "bem-comportada" $f(x)$ e integrar em $(-\infty, +\infty)$. Vamos recordar que a função delta só é não-nula quando seu argumento é zero, ou seja, as contribuições para essa integral só virão das vizinhanças dos pontos onde o argumento $y(x)$ se anula, ou seja, justamente os zeros x_i de $y(x)$, de modo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta[y(x)]dx = \sum_i \int_{x_i-\epsilon}^{x_i+\epsilon} f(x)\delta[y(x)]dx,$$

onde consideramos a contribuição de todas as vizinhanças dos zeros de $y(x)$.

Fazemos, agora, a mudança de variável $z = y(x)$, onde $x = y^{-1}(z)$. Logo $dz = dy(x) = |y'(x)|dx$. Os limites das integrais acima também mudam, pois

$$x = x_i \pm \epsilon \Rightarrow z = y(x_i \pm \epsilon),$$

de sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta[y(x)]dx = \sum_i \int_{x_i-\epsilon}^{x_i+\epsilon} f[y^{-1}(z)]\delta(z)\frac{dz}{|y'(x)|}.$$

Pela propriedade de filtragem, cada integral no segundo membro da igualdade acima é igual ao respectivo integrando, calculado no ponto $z = 0$, ou seja, justamente onde $x = x_i = y^{-1}(0)$. Logo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta[y(x)]dx = \sum_i f[y^{-1}(0)]\frac{1}{|y'(x_i)|} = \sum_i f(x_i)\frac{1}{|y'(x_i)|}.$$

Finalmente, usando novamente a propridade de filtragem, mas no sentido inverso, podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta[y(x)]dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i \frac{1}{|y'(x_i)|}\delta(x - x_i)f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \left\{ \delta[y(x)] - \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|y'(x_i)|} \right\} = 0,$$

tal que, para $f(x)$ arbitrário, resulta a propriedade (17).

Como um exemplo de aplicação, considere a função $y(x) = x^2 - a^2$, que tem zeros símples nos pontos $x = \pm a$, já que $y'(x_i) = \pm 2a \neq 0$. Então, de (17) temos que

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x - a)}{|y'(a)|} + \frac{\delta(x + a)}{|y'(-a)|} = \frac{1}{2a}\left[\delta(x - a) + \delta(x + a)\right]. \qquad (18)$$

4 Representações da "função" delta

É comum representarmos a "função" delta como o limite de uma sequência infinita de funções bem-comportadas a um parâmetro $\{\delta_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, quando o parâmetro tende a infinito: $\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(x)$. A rigor, no entanto, esse limite não existe por vários motivos (é infinito, não é unico, etc.); e só é bem-definido quando o entendemos dentro de uma integral envolvendo funções normais $f(x)$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx.} \qquad (19)$$

Há infinitas representações possíveis para a função delta. As mais usadas na prática são as seguintes:

- **Pulso quadrado** [Fig. 2]

$$\boxed{\delta_n(x) = \begin{cases} n/2, & \text{se } -1/n \leq x \leq +1/n, \\ 0, & \text{se } x < -1/n, \text{ ou } x > 1/n. \end{cases}} \qquad (20)$$

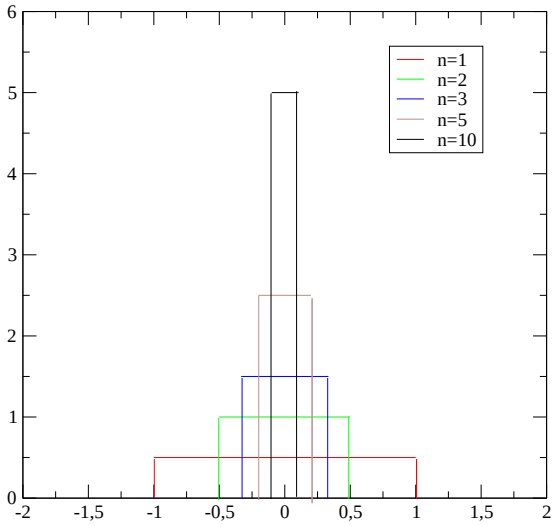


Figura 2: Representação do tipo pulso quadrado para a "função" delta para alguns valores do parâmetro n.

Para mostrar que a função acima é uma representação para a função delta, vamos verificar a definição (1)-(2). De fato,

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x = 0, \\ 0, & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Além disso, resulta que, para todo n, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)dx = \int_{-1/n}^{+1/n} \frac{n}{2}dx = \frac{n}{2}\left(\frac{2}{n}\right) = 1.$$

- **Lorentziana** [Fig. 3]

$$\boxed{\delta_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2}} \tag{21}$$

Para verificar (1) há dois limites a serem calculados:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2nx^2} = 0, \qquad \text{se } x \neq 0,$$

onde usamos a regra de L'Hospital para levantar a indeterminação. Para $x = 0$ temos, de (21), que $\delta_n(0) = n/\pi$, tal que $\lim_{n\to\infty}\delta_n(0) = \infty$. A condição de normalização (2) decorre de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)dx = \frac{n}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+n^2x^2} = \frac{n}{\pi}\frac{1}{n}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+y^2}}_{=\pi} = \frac{n}{\pi}\frac{\pi}{n} = 1,$$

onde fizemos $y = nx$. A integral definida acima pode ser encontrada usando resíduos.

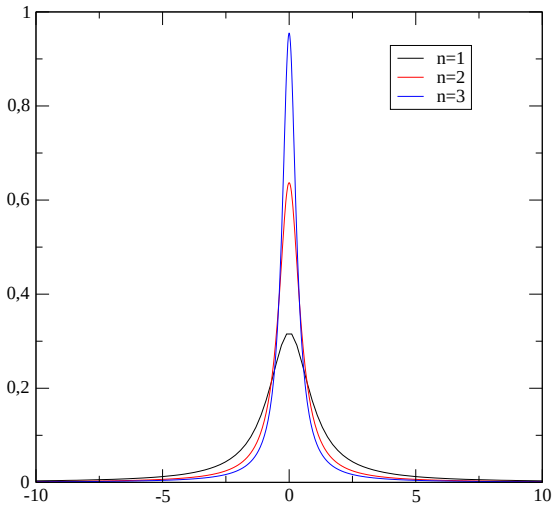


Figura 3: Representação do tipo Lorentziana para a "função" delta para alguns valores do parâmetro n.

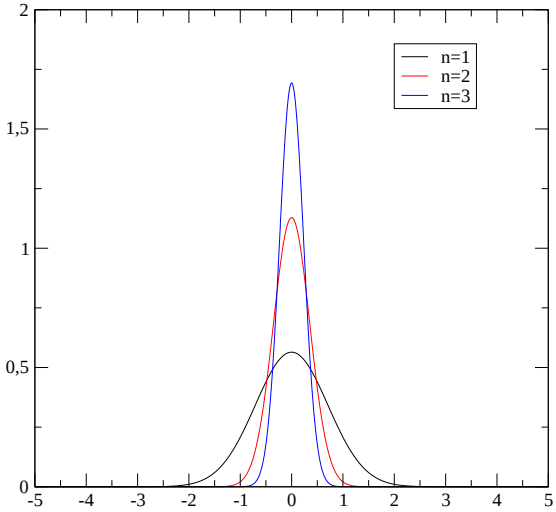


Figura 4: Representação do tipo Gaussiana para a "função" delta para alguns valores do parâmetro n.

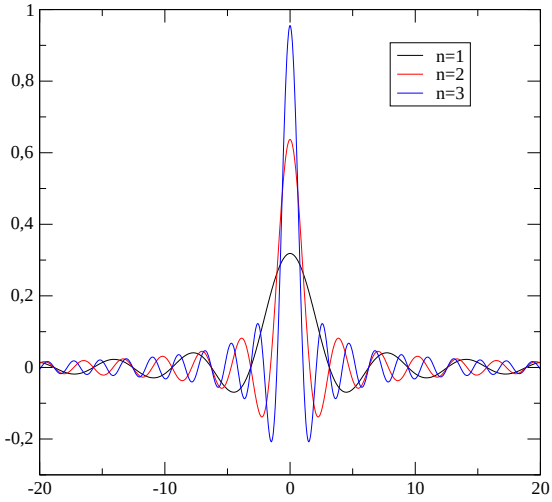


Figura 5: Representação do tipo seno cardinal para a "função" delta para alguns valores do parâmetro n.

- **Gaussiana** [Fig. 4]

$$\boxed{\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2},} \tag{22}$$

- **Seno cardinal.** É comum encontrarmos em aplicações físicas a função "seno cardinal", definida como

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}. \tag{23}$$

Pelo limite trigonométrico fundamental, temos que $\operatorname{sinc}(0) = 1$, ou seja, $x = 0$ é uma singularidade removível da função, não um pólo. Além disso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc} x dx \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi. \tag{24}$$

como pode ser calculado usando resíduos (integral de Dirichlet). Do seno cardinal derivam duas representações úteis para a função delta. A primeira é [Fig. 5]

$$\boxed{\delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x} = \frac{n}{\pi} \operatorname{sinc}(nx)}. \tag{25}$$

Para $x = 0$ temos que $\delta_n(0) = n/\pi$, donde $\lim_{n\to\infty} \delta_n(0) = \infty$. A condição de normalização fica, em vista de (24):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx = \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(nx) dx = \frac{n}{\pi} \frac{1}{n} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc} y dy}_{=\pi} = \frac{n}{\pi} \left(\frac{\pi}{n}\right) = 1.$$

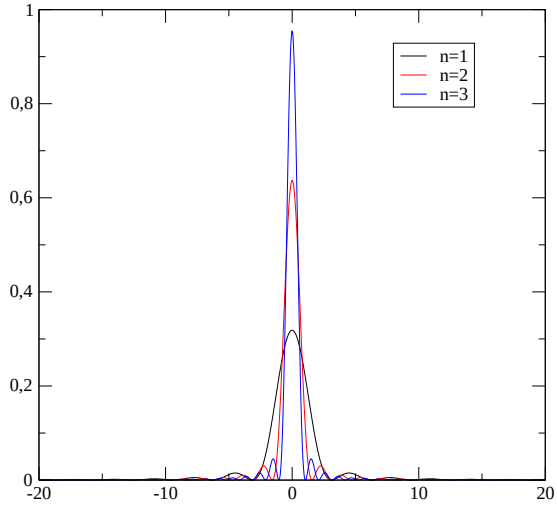


Figura 6: Representação do tipo pico de difração para a "função" delta para alguns valores do parâmetro n.

- **Pico de difração**. Consiste no quadrado da função sinc, e recebe este nome por assemelhar-se ao padrão de difração de uma fenda única em ótica [Fig. 6]:

$$\boxed{\delta_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin^2(nx)}{nx^2} = \frac{n}{\pi}\mathrm{sinc}^2 nx.} \tag{26}$$

Observe que nem todas as representações possíveis para a função delta são igualmente boas, quando as interpretamos no sentido da Eq. (19). Por exemplo, considere a função "normal" $f(x) = e^{-x}$. Se usarmos, para ela, a representação lorentziana (21), teremos problemas, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) f(x) dx = \frac{n}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{1+n^2x^2} = \infty,$$

a mesma coisa ocorrendo para o "pico de difração" (26), pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) f(x) dx = \frac{1}{n\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}\sin^2 nx dx}{nx^2} = \infty.$$

Já a representação gaussiana (22) pode ser utilizada, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) f(x) dx = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}e^{-n^2x^2} dx = e^{1/4n^2},$$

como pode ser verificado completando o quadrado no integrando e usando a integral gaussiana

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}, \tag{27}$$

de modo que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) f(x) dx = \lim_{n\to\infty} e^{1/4n^2} = 1.$$

5 Representação integral

Usando

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \tag{28}$$

na representação do seno cardinal (25) temos, usando o teorema fundamental do cálculo integral, que

$$\delta_n(x) = \frac{1}{\pi x}\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{ix}e^y|_{-inx}^{+inx} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{ix}\int_{-inx}^{+inx} e^y dy.$$

Fazendo a transformação de variável $y = ikx$ temos que

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{ix}ix\int_{-n}^{+n} e^{ikx}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{+n} e^{ikx}dk,$$

que, no limite de n tendendo ao infinito, nos dá uma representação integral para a função delta

$$\boxed{\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dk,} \tag{29}$$

onde a integral deve ser tomada como valor principal de Cauchy, devido à singularidade existente em $x = 0$.

A representação integral (29) só pode ser usada com funções bem-comportadas $f(x)$ que sejam contínuas por partes em $(-\infty, +\infty)$, ou seja, $f(x)$ pode ter um número finito ou infinito enumerável de pontos de descontinuidade $x_1, x_2, \ldots x_i$. Em cada um desses pontos de descontinuidade o valor da função $f(x)$ deve ser substituido pela média dos seus valores à direita e à esquerda da descontinuidade:

$$\frac{f(x_i - 0) + f(x_i + 0)}{2}.$$

Logo, $f(x)$ deve ser somável da mesma forma que exigimos para um desenvolvimento em série de Fourier. Em outras palavras, se $f(x)$ admite uma expansão em série de Fourier, então pode ser usada a representação integral (29).

5.1 Relação com a função degrau

A função degrau unitário de Heaviside é definida como

$$H(x - x') = \begin{cases} 1, & \text{se } x > x', \\ 1/2, & \text{se } x = x', \\ 0, & \text{se } x < x'. \end{cases} \tag{30}$$

onde o valor médio em $x = x'$ foi introduzido em conformidade com a condição de somabilidade que acabamos de comentar. Embora, a rigor, a função degrau não seja diferenciável em $x = x'$ (devido à descontinuidade), é possível identificarmos a função delta de Dirac como a derivada da função degrau, num sentido que só será tornado rigoroso quando abordarmos a teoria das distribuições no próximo capítulo:

$$\boxed{\delta(x - x') = \frac{d}{dx}H(x - x').} \tag{31}$$

Para verificar a plausibilidade dessa relação, vamos multiplicar a derivada da função degrau por uma função bem-comportada $f(x)$ e integrar em $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\frac{d}{dx}H(x-x')dx' = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')H(x-x')dx'.$$

Como $H(x-x')$ só não é nula quando $x > x'$, podemos escrever $H(x-x') = 1$ para $-\infty < x' < x$, tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\frac{d}{dx}H(x-x')dx' = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(x')dx' = f(x),$$

usando o teorema fundamental do cálculo diferencial. Pela propriedade de filtragem (9)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\frac{d}{dx}H(x-x')dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\delta(x-x')dx'$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\underbrace{\left\{\frac{d}{dx}H(x-x') - \delta(x-x')\right\}}_{=0}dx' = 0,$$

que conduz, para uma função $f(x)$ arbitrária, a (31).

6 Funções delta multidimensionais

6.1 Duas dimensões

Definimos a função delta bidimensional como o produto de duas funções delta unidimensionais, ao longo das direções independentes x e y

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(x-x')\delta(y-y'), \tag{32}$$

com a seguinte normalização:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = 1. \tag{33}$$

A dimensão da função delta bidimensional é o inverso de uma área. Seja $f(x,y)$ uma função normal de duas variáveis. A propriedade de filtragem é escrita como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(x,y)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = f(x',y'). \tag{34}$$

Usando coordenadas polares planas (ρ,φ), tal que $x = \rho\cos\varphi$ e $y = \rho\sin\varphi$, a condição de normalização (33) torna-se

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = 1, \tag{35}$$

que é satisfeita caso

$$\boxed{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi').} \tag{36}$$

6.2 Três dimensões

A função delta tridimensional é o produto de três funções delta unidimensionais (com dimensão de inverso de volume):

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z'), \tag{37}$$

tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = 1. \tag{38}$$

Usando coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) a Eq. (38) fica

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{\infty} \rho d\rho \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = 1, \tag{39}$$

que leva à expressão

$$\boxed{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')\delta(z-z').} \tag{40}$$

Analogamente, para coordenadas esféricas polares (r, θ, ϕ) a Eq. (38) será satisfeita se

$$\boxed{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\phi-\phi'),} \tag{41}$$

uma vez que o elemento de volume é $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$.

Como um exemplo de aplicação no eletromagnetismo, vamos escrever na forma de uma densidade de carga elétrica um anel de raio R com centro na origem e no plano $z = 0$, uniformemente carregado com uma carga total Q. A densidade de carga é, em coordenadas cilíndricas

$$\mu(\rho, \varphi, z) = \frac{Q}{2\pi R}\delta(\rho - R)\delta(z),$$

já que, integrando em todo o espaço

$$\int d^3r \mu(\mathbf{r}) = \frac{Q}{2\pi R} \underbrace{\int_0^{\infty} \rho d\rho \delta(\rho - R)}_{=R} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z) dz}_{=1} = Q.$$

Observe que, devido à simetria axial do sistema, a densidade de carga não pode depender do ângulo azimutal φ.

Se resolvermos usar coordenadas esféricas, lembrando que o plano do anel é caracterizado por $\theta = \pi/2$, cujo cosseno é nulo, temos

$$\mu(r, \theta, \phi) = \frac{Q}{2\pi R^2}\delta(r - R)\delta(\cos\theta),$$

cuja integral é

$$\int d^3r \mu(\mathbf{r}) = \frac{Q}{2\pi R^2} \underbrace{\int_0^{\infty} r^2 dr \delta(r - R)}_{=R^2} \underbrace{\int_{-1}^{+1} d(\cos\theta)\delta(\cos\theta)}_{=1} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi} = Q.$$

7 Derivadas da "função" delta

Embora $\delta(x)$ não seja uma função, no sentido estrito da palavra, é possível dar a ela uma interpretação rigorosa (na teoria das distribuições, como será visto no próximo capítulo) tal que seja possível obter a sua derivada $\delta'(x)$, e usar os recursos do cálculo usual para trabalhar com ela. Para isso, sempre imaginamos que a função delta, bem como sua derivada, estejam multiplicadas por uma função "normal" $f(x)$ e integradas de $-\infty$ a $+\infty$. Por exemplo, temos a seguinte propriedade fundamental da derivada da função delta:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x-a)f(x)dx = -f'(a),} \tag{42}$$

que pode ser "demonstrada" como segue: integrando por partes o lado esquerdo da expressão acima temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-a)dx = f(x)\underbrace{\delta(x-a)}_{=0}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\delta(x-a)dx = -f'(a).$$

No eletromagnetismo é possível associar a derivada da função delta com a distribuição singular de carga correspondente a um dipólo elétrico que, por definição, é um sistema formado por duas cargas puntiformes $-q$ e $+q$, separadas por uma distância $2a$, ou seja, são fixadas nos pontos $x = -a$ e $x = +a$, respectivamente. A densidade de carga em uma dimensão será, pois,

$$\mu(x) = q\delta(x-a) - q\delta(x-(-a)) = q[\delta(x-a) - \delta(x+a)].$$

Fazendo a tender a zero, temos

$$\lim_{a\to 0} \frac{\delta(x-a) - \delta(x+a)}{2a} = \frac{d}{dx}\delta(0),$$

tal que, lembrando que $p \equiv q(2a)$ é o momento de dipólo elétrico, a densidade de carga do dipólo é

$$\mu(x) = p\delta'(0).$$

Várias propriedades importantes decorrem da definição (42), como

$$\delta'(-x) = -\delta'(x), \tag{43}$$

Para mostrá-la multiplicamos o primeiro membro por uma função "normal" $f(x)$ e integramos de $-\infty$ a $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(-x)f(x)dx = \int_{\infty}^{-\infty} \delta'(y)f(-y)(-dy) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(y)f(-y)dy$$

$$f(-y)\underbrace{\delta(y)}_{=0}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(-y)\delta(y)dx = f'(0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)f(x)dx,$$

onde fizemos a mudança de variável $y = -x$, integramos por partes, e usamos (42). Passando tudo para o primeiro membro

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{[\delta'(-x) + \delta'(x)]}_{=0} f(x)dx = 0,$$

se $f(x)$ for uma função arbitrária, diferente de zero portanto, o que leva a (43).

Derivando (29) chegamos à representação integral

$$\delta'(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} ke^{ikx}dk. \tag{44}$$

De forma análoga a (43), nova integração por partes conduz à derivada segunda da função delta

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta''(x-a)f(x)dx = f''(a),} \tag{45}$$

que pode ser generalizanda para a derivada de ordem m:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(m)}(x-a)f(x)dx = (-1)^m f^{(m)}(a).} \tag{46}$$

7.1 Derivadas parciais

Não há maiores dificuldades para generalizar o tratamento dado às derivadas da função delta para mais de uma dimensão espacial. Seja x_i uma coordenada genérica no espaço Euclidiano e $f(\mathbf{r}) = f(x_1, x_2, x_3)$ uma função bem-comportada da posição nesse espaço. Então a derivada parcial da função delta tridimensional em relação a ela será tal que, integrando em todo o espaço

$$\int d^3r f(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\mathbf{r}) = -\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}}, \tag{47}$$

ou, sendo $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ um vetor de componentes constantes,

$$\int d^3r f(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a}) = -\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{a}}, \tag{48}$$

Este procedimento nos permite definir o gradiente da função delta, $\nabla \equiv \sum_{i=1}^{3} \hat{e}_i \partial/\partial x_i$, como

$$\boxed{\int d^3r f(\mathbf{r})\nabla\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a}) = -\nabla f(\mathbf{a}),} \tag{49}$$

que, no eletromagnetismo, pode ser empregado para exprimir a densidade de carga singular correspondente a um dipólo elétrico de momento $\mathbf{p}$ e posicionado em $\mathbf{r} = \mathbf{a}$:

$$\mu(\mathbf{r}) = \mathbf{p}\cdot\nabla\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a}).$$

8 Funcionais

As "funções" delta, introduzidas por Dirac [1], pertencem a uma categoria geral de objetos matemáticos chamados distribuições ou funções generalizadas, cuja teoria rigorosa foi desenvolvida por vários matemáticos a partir de 1940, como L. Schwartz [2] e I. Gelfand [3]. Uma distribuição é um funcional linear definido

sobre um dado espaço de funções apropriadas. Com a teoria das distribuições, as manipulações formais (porém não-rigorosas) feitas com a função delta de Dirac podem ser justificadas.

Uma função real de variável real $f(x)$ é *integrável* no intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ (isto é, pertence ao espaço de funções $L[a,b]$) se a sua integral existe nesse intervalo:

$$\int_a^b f(x)\,dx < \infty. \tag{50}$$

Em geral, essa integral deve ser tomada no sentido de Lebesgue, que é mais geral do que no sentido de Riemann (o limite de uma soma). Uma função é *absolutamente integrável* se

$$\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty. \tag{51}$$

Uma função é *localmente integrável* se existem integrais do tipo (50) para quaisquer sub-intervalos limitados contidos em $[a,b]$. Por exemplo, a função $f(x) = \sin x$ é localmente integrável pois, para qualquer sub-intervalo limitado $[a,b] \in \mathbb{R}$, temos

$$\int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b < \infty.$$

Via de regra, funções contínuas são localmente integráveis num dado intervalo, mas há exemplos de funções localmente integráveis possuindo descontinuidades, como

$$(\ln x)_+ \equiv \begin{cases} \ln x, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x \leq 0, \end{cases} \tag{52}$$

Para que $(\ln x)_+$ seja localmente integrável em $\mathbb{R}$, precisamos mostrar que $\int_a^b f(x)dx < \infty$ para todos os intervalos $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Tomando um intervalo genérico onde $a < 0$ e $b > 0$ temos que

$$\int_a^b (\ln x)_+ dx = \int_a^0 0.dx + \int_0^b \ln x dx = 0 + b(\ln b - 1) < \infty.$$

Uma função real $f(x)$ é de *quadrado integrável* em $[a,b]$ se

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx < \infty, \tag{53}$$

e pertence ao espaço de funções $L^2[a,b]$. O *produto interno* em L^2 é definido como

$$< f, g > \equiv \int_a^b f(x)g(x)dx. \tag{54}$$

Um funcional é uma aplicação de um espaço de funções sobre $\mathbb{R}$, isto é, um funcional S associa uma dada função $f(x)$ a um número real a, o que escrevemos simbolicamente como

$$\mathsf{S}[f(x)] = a. \tag{55}$$

Observe que, enquanto uma função $y = f(x)$ associa um número y a um valor específico de x, um funcional depende dos valores de $f(x)$ *para todos* os valores de x em um dado intervalo $[x_1, x_2]$, não apenas para um deles.

Como um exemplo, considere o funcional

$$\mathsf{S}[f(x)] = \int_0^1 [f(x)]^2 dx, \tag{56}$$

Escolhendo diferentes funções obtemos valores distintos para o funcional, como

$$\mathsf{S}[\sin(x)] = \int_0^1 \sin^2 x dx = \frac{1}{2} - \frac{\sin(2)}{4}, \tag{57}$$

$$\mathsf{S}[x^n] = \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1}, \quad (n \neq -1/2). \tag{58}$$

Um funcional pode não ser bem-definido para todas as funções $f(x)$. Por exemplo, o funcional (56) só pode ser aplicado às funções que sejam de quadrado integrável no intervalo $[0, 1]$. Por exemplo, a função $f(x) = 1/\sqrt{x}$ não é de quadrado integrável neste intervalo pois

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx = \int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln 1 - \ln 0 = \infty,$$

de modo que o funcional (56) não é definido para essa função. De modo geral, para definir um funcional, devemos sempre indicar o espaço de funções (ditas *funções de base* ou ainda funções-teste $\varphi(x)$) sobre as quais age o funcional.

9 Distribuições

9.1 Funções de base

Há dois requisitos para que uma dada função $\varphi(x)$ seja considerada "adequada" na teoria das distribuições. Ela deve:

- ser diferenciável um número arbitrariamente grande de vezes;
- ser nula fora de um conjunto limitado I (que depende de cada função φ)[1]

O conjunto de funções de base adequadas na teoria das distribuições forma um espaço vetorial que será denotado por $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Um exemplo de função de base é [Fig. 7]:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x(1-x)}\right), & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 1. \end{cases} \tag{59}$$

a qual só tem valores não-nulos dentro do intervalo limitado $(0, 1)$. Dentro desse intervalo a função é infinitamente diferenciável [Fig. 7].

Outro exemplo é

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right), & \text{se } |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases} \tag{60}$$

que só é diferente de zero no intervalo $(-1, 1)$.

[1] Dizemos, nesse caso, que a função tem suporte limitado.

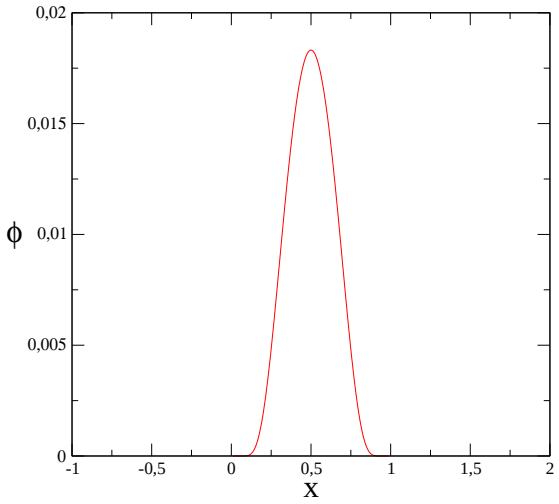


Figura 7: Um exemplo de função de base, dado por (59).

9.2 Conceito de distribuição

Uma distribuição (ou função generalizada) $\mathsf{T}[\varphi]$ é um *funcional linear e contínuo* sobre um espaço de funções de base adequadas $\varphi(x)$. Um funcional T é linear se, dadas funções de base $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ e números arbitrários k_1 e k_2, então

$$\mathsf{T}[k_1\varphi_1(x) + k_2\varphi_2(x)] = k_1\mathsf{T}[\varphi_1(x)] + k_2\mathsf{T}[\varphi_2(x)] \tag{61}$$

O exemplo de funcional dado anteriormente na Equação (56) não é uma distribuição, pois não satisfaz a propriedade linear (61), como pode ser verificado diretamente. Uma distribuição pode ser multiplicada por um número real e somada a outra distribuição, de modo que as distribuições pertencem a um espaço vetorial linear, onde o elemento neutro é a função $\varphi(x) = 0$. Este espaço será denotado $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Um funcional T é contínuo se, considerando uma sequência infinita de funções de base $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, tal que exista o limite

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x), \tag{62}$$

então

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{T}[\varphi_n(x)] = \mathsf{T}[\varphi(x)]. \tag{63}$$

Um exemplo de sequência infinita de funções de base é

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}\exp\left(-\frac{a^2}{a^2-x^2}\right), & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$$

pois $\varphi_n(x)$ só são não-nulas no intervalo limitado $(-a, a)$, onde também são infinitamente diferenciáveis. Além disso existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

10 Distribuições regulares

A toda função $f(x)$ localmente integrável corresponde uma distribuição $\widehat{f}$ definida pelo produto interno

$$\boxed{\widehat{f}[\varphi] =< \varphi, f >= \int_a^b f(x)\varphi(x)dx.} \tag{64}$$

Distribuições definidas dessa forma são ditas *regulares*. A propriedade de linearidade (61) é verificada diretamente pelas propriedades do produto interno

$$\widehat{f}[k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2] =< (k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2), f >= k_1 < \varphi_1, f > +k_2 < \varphi_2, f >$$

$$= k_1\widehat{f}[\varphi_1] + k_2\widehat{f}[\varphi_2].$$

Considerando que existe o limite (62), então (63) leva a

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{f}[\varphi_n] = \int_a^b f(x)\left[\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)\right]dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \widehat{f}[\varphi],$$

o que demonstra a condição de continuidade.

Duas funções localmente integráveis $f_1(x)$ e $f_2(x)$ definem a mesma distribuição regular (64) se elas são iguais em "quase todos" os pontos do intervalo $[a, b]$. O termo "quase todos", aqui, tem o significado usual da teoria de integração: iguais para todos os pontos de $[a, b]$ com a possível exceção de um conjunto de pontos de medida de Lebesgue nula.

11 Distribuições singulares

Há distribuições, porém, que não podem ser definidas por (64). Por exemplo, a função $f(x) = 1/x$ diverge em $x = 0$, portanto não é locamente integrável em $\mathbb{R}$. No entanto, podemos definir uma distribuição associada ao valor principal de Cauchy de $1/x$:

$$\boxed{\left(\mathsf{VP}\frac{1}{x}\right)[\varphi] = \mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx,} \tag{65}$$

onde o valor principal de Cauchy da integral divergente é dado por

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right\}, \tag{66}$$

tal que as propriedades de linearidade e a continuidade podem ser verificadas diretamente. Distribuições como (65) são ditas *singulares*.

11.1 A distribuição delta de Dirac

A "função" delta de Dirac é, na verdade, uma distribuição singular sobre um conjunto apropriado de funções de base. Seja, por exemplo, $\delta(x)$: ela é um funcional linear e contínuo que, agindo sobre uma função de base $\varphi(x)$, retorna o valor dessa função no ponto $x = 0$, ou seja, $\varphi(0)$:

$$\boxed{\delta_0[\varphi] = \varphi(0),} \tag{67}$$

De forma geral, definimos a distribuição delta de Dirac, associada à "função" $\delta(x-a)$, como

$$\boxed{\delta_a[\varphi] = \varphi(a).} \tag{68}$$

Para mostrar que $\delta(x-a)$ é uma distribuição, temos de provar a linearidade

$$\delta_a[k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2] = k_1\varphi_1(a) + k_2\varphi_2(a) = k_1\delta_a[\varphi_1] + k_2\delta_a[\varphi_2],$$

e a continuidade

$$\lim_{n\to\infty} \delta_a[\varphi_n] = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(a) = \varphi(a) = \delta_a[\varphi].$$

Sendo uma distribuição singular, o funcional associado à distribuição delta de Dirac não pode ser escrito como uma integral da forma (64). Entretanto, é conveniente escrever simbolicamente o funcional $\delta_a[\varphi]$ como uma integral

$$\delta_a[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \varphi(a), \tag{69}$$

que *não deve* ser interpretada no sentido da integral de Riemann ou de Lebesgue já que, em $x = a$ a integral (69) divergiria e não poderia ser definida. Logo, a integral (69) é uma mera representação de uma operação formal efetuada pela distribuição delta sobre a função de base $q(x)$. O uso dessa integral é conveniente do ponto de vista do cálculo, pois podemos manipular expressões *lineares* com $\delta(x-a)$ como se ela fosse uma função usual.

Por exemplo, podemos formar a combinação linear $k_1\delta(x-x_1)+k_2\delta(x-x_2)$ e integrá-la multiplicada por uma função bem-comportada $f(x)$, para obter uma outra combinação linear, a saber

$$\int_{-\infty}^{\infty} [k_1\delta(x-x_1) + k_2\delta(x-x_2)]f(x)dx = k_1f(x_1) + k_2f(x_2). \tag{70}$$

No entanto expressões não-lineares como $\sqrt{\delta(x)}$ e $e^{\delta}(x)$ *não são*, em geral, bem-definidas para a distribuição delta de Dirac.

12 Produto de distribuições

A teoria das distribuições é essencialmente linear, e o produto de duas distribuições nem sempre é bem definido. Em determinados casos, porém, o produto é bem definido, como no caso de uma distribuição T arbitrária e uma distribuição regular $\widehat{f}$ associada a uma função localmente integrável $f(x)$, cujo produto

$$\mathsf{P} = \widehat{f}\mathsf{T}, \tag{71}$$

é uma distribuição se T for um funcional linear e contínuo da função $f(x)\varphi(x)$, onde φ é uma função de base:

$$\mathsf{P}[\varphi] = \mathsf{T}[f(x)\varphi(x)]. \tag{72}$$

Em geral, se $f(x)$ é suave (infinitamente diferenciável), o produto $\widehat{f}\mathsf{T}$ existe para qualquer distribuição T, regular ou singular. Como um exemplo, seja T a

distribuição delta de Dirac δ_a. Então o produto da mesma com uma distribuição regular $\widehat{f}$ será, usando a expressão simbólica (69) para a integral

$$\mathsf{P}[\varphi] = (\widehat{f}\delta_a)[\varphi] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)\varphi(x)dx = f(a)\varphi(a), \tag{73}$$

supondo que $f(x)$ seja uma função contínua em $x = a$. Considerando o caso particular quando $f(x) = x - a$, com $a \neq 0$, temos

$$\widehat{(}x-a)\delta_a[\varphi] = (a-a)\varphi(a) = 0,$$

para todo x, e que podemos escrever simplesmente como

$$(x-a)\delta(x-a) = 0.$$

Se $a = 0$, temos $x\delta(x) = 0$, que é uma propriedade que pode ser demonstrada de forma não-rigorosa.

Podemos também generalizar o resultado anterior. Se o produto $x\mathsf{T} = 0$, então $\mathsf{T} = c\delta_0$ é um múltiplo da distribuição delta, onde c é uma constante indeterminada.

Outra situação onde o produto de duas distribuições é bem-definido consiste no caso onde temos duas funções de quadrado integrável $f(x)$ e $g(x)$, para as quais o produto das distribuições associadas $\mathsf{P} = \widehat{f}\widehat{g}$ é bem-definido:

$$\mathsf{P}[\varphi] = (\widehat{f}\widehat{g})[\varphi] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\varphi(x)dx. \tag{74}$$

Um contra-exemplo, ou seja, um exemplo de produto de duas distribuições que não é bem-definido, é a expressão $[\delta(x)]^2$. Usando a representação simbólica (69) chegamos a um resultado infinito, pois

$$(\delta_0\delta_0)[\varphi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\delta(x)\varphi(x)dx = \underbrace{\delta(0)}_{=\infty}\varphi(0) = \infty.$$

Em contrapartida, o produto de duas distribuições delta em pontos diferentes ($a \neq b$) é bem-definido, pois

$$(\delta_a\delta_b)[\varphi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\delta(x-b)\varphi(x)dx = \underbrace{\delta(a-b)}_{=0}\varphi(a) = 0,$$

de modo que a função delta bidimensional, por exemplo, $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)$ é bem-definida.

13 Derivadas de distribuições

Se insistíssemos em pensar em $\delta(x)$ como uma função no sentido usual do termo, não faria sentido algum trabalhar com sua derivada, já que ela não é diferenciável (a rigor, nem existe) no ponto $x = 0$. No entanto, é possível trabalhar com as derivadas de qualquer ordem de $\delta(x)$ do ponto de vista da Teoria das

Distribuições. Seja uma distribuição genérica T . A sua derivada [2] em relação a x, denotada $d\mathsf{T}/dx$, ou ainda T', é definida como

$$\boxed{\mathsf{T}'[\varphi(x)] = -\mathsf{T}[\varphi'(x)],} \tag{75}$$

onde $\varphi(x)$ são funções de base, as quais, por definição, são sempre infinitamente diferenciáveis dentro de um intervalo limitado, de modo que a derivada de uma distribuição será sempre bem-definida.

Caso T seja uma distribuição regular $\widehat{f}$, associada à função locamente integrável $f(x)$, a derivada da distribuição $\widehat{f}$ correspondente a f é a distribuição $\widehat{f'}$ associada à função $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}[\varphi] &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d}{dx}[f(x)\varphi(x)] - \varphi'(x)f(x) \right\} dx \\
&= \varphi(x)f(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)f(x)dx = -\widehat{f}[\varphi'].
\end{aligned} \tag{76}$$

onde usamos o fato das funções de base anularem-se no infinito. Comparando com (75) temos a relação evidente

$$\widehat{f'}[\varphi] = \widehat{f}'[\varphi].$$

Seja $\mathsf{P} = \widehat{f}\mathsf{T}$ o produto de duas distribuições, que é sempre bem-definido pois $\widehat{f}$ é uma distribuição regular. A derivada do produto é dada pela regra usual do cálculo

$$\mathsf{P}' = \widehat{f}'\mathsf{T} + \widehat{f}\mathsf{T}'. \tag{77}$$

Como as funções de base são infinitamente diferenciáveis, podemos definir derivadas de qualquer ordem q para uma distribuição como:

$$\frac{d^q}{dx^q}\mathsf{T}[\varphi(x)] = \mathsf{T}^{(q)}[\varphi(x)] = (-1)^q\mathsf{T}[\varphi^{(q)}(x)], \tag{78}$$

de modo que todas as distribuições são infinitamente diferenciáveis, mesmo as singulares. A derivada distribuicional é mais "fraca" que a derivada usual, pois ela pode ser usada em situações onde a definição usual falha. Um exemplo é a função $y(x) = \ln|x|$, como veremos mais adiante neste capítulo.

14 Derivadas de distribuições delta

Se, por exemplo, considerarmos a distribuição delta de Dirac δ_a, as suas derivadas são funcionais lineares e contínuas que retornam o valor da derivada da função de base no ponto $x = a$, a menos de um sinal

$$\boxed{\delta_a'[\varphi] = -\varphi'(a).} \tag{79}$$

Em particular

$$\delta_0'[\varphi] = -\varphi'(0), \tag{80}$$

[2] Também conhecida como derivada "fraca" ou "distribucional".

sendo que, nas aplicações práticas, usamos a linguagem (não-rigorosa) $\delta'(x)$ para indicar a derivada da "função" delta, como fizemos no capítulo anterior.

Observe que a função delta não é diferenciável no sentido usual, mas é infinitamente diferenciável no sentido distribucional. Em geral, a q-ésima derivada da distribuição delta é definida como

$$\boxed{\delta_a^{(q)}[\varphi] = (-1)^q \delta_a'[\varphi^{(q)}] = (-1)^q \varphi^{(q)}(a).} \tag{81}$$

14.1 Derivadas parciais

Toda a nossa discussão pode ser facilmente generalizada para mais de uma dimensão espacial. Sejam duas funções $f(\mathbf{r})$ e $g(\mathbf{r})$ no espaço tridimensional. Seu produto interno é

$$< f, g >= \int d^3r f(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}), \tag{82}$$

onde a integral se estende sobre uma região ou então sobre todo o espaço. Cada uma destas funções induz uma distribuição regular, como

$$\hat{f} =< \varphi, f >= \int d^3r \varphi(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}), \tag{83}$$

onde φ é uma função de base adequada. No caso do espaço tridimensional, isso significa que ela deve anular-se fora de uma região limitada do espaço, e ser infinitamente diferenciável dentro dela.

Por exemplo, podemos considerar uma região esférica de raio R, dentro da qual φ tenha valores não-nulos. Neste caso, usando coordenadas esféricas, e supondo simetria radial temos

$$\widehat{f}(r) = \underbrace{\int d\Omega}_{=4\pi} \int_0^\infty r^2 dr \varphi(r) f(r) = 4\pi \int_0^R r^2 dr \varphi(r) f(r) \tag{84}$$

caso, naturalmente, $f(r)$ seja locamente integrável nessa região.

Seja x_i uma coordenada genérica no espaço tridimensional, então a derivada parcial da distribuição T em relação a ela será

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathsf{T}[\varphi(\mathbf{r})] = -\mathsf{T}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right], \tag{85}$$

sendo que, em geral, a m-ésima derivada parcial é

$$\frac{\partial^m}{\partial x_i^m} \mathsf{T}[\varphi] = (-1)^m \mathsf{T}\left[\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_i^m}\right]. \tag{86}$$

Estes resultados nos permitem definir operadores diferenciais vetoriais agindo sobre distribuições, como o gradiente $\nabla \equiv \sum_{i=1}^3 \widehat{e}_i \partial/\partial x_i$:

$$\nabla \mathsf{T}[\varphi] = -\mathsf{T}[\nabla \varphi] \tag{87}$$

e o Laplaciano $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^3 \partial^2/\partial x_i^2$:

$$\nabla^2 \mathsf{T}[\varphi] = \mathsf{T}[\nabla^2 \varphi] \tag{88}$$

Seja $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^3}$ o módulo do vetor posição no espaço. A função $f(r) = 1/r$ tem uma singularidade na origem, de modo que não é diferenciável nesse ponto. No entanto, se encarada como uma distribuição agindo sobre funções de base apropriadas, podemos definir derivadas de qualquer ordem para ela. O Laplaciano de $1/r$, por exemplo, é dado por

$$\boxed{\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r})} \tag{89}$$

Para demonstrar essa importante relação, usamos (88) na distribuição regular associada à função $f(r) = 1/r$:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right)[\varphi] &= \left(\frac{1}{r}\right)[\nabla^2\varphi] = \langle \frac{1}{r}, \nabla^2\varphi \rangle = \int d^3r \frac{\nabla^2\varphi}{r} \\
&= \underbrace{\int d\Omega}_{=4\pi} \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = 4\pi\left\{ r\frac{d\varphi}{dr}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty r^2 \frac{d\varphi}{dr}\left(-\frac{dr}{r^2}\right)\right\} \\
&= 4\pi\int_0^\infty d\varphi = -4\pi\varphi(0) = -4\pi\delta_0[\varphi].
\end{aligned}$$

onde usamos simetria radial e o fato que tanto φ, bem como sua derivada radial, anulam-se no infinito.

A fórmula (89) pode ser "demonstrada" de forma simples (e não-rigorosa) usando conceitos de eletrostática. Uma carga puntual q na origem está associada a uma distribuição de carga singular no espaço dada por

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}).$$

Pela lei de Gauss, sabemos que o campo elétrico $\mathbf{E}$ satisfaz

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r})$$

onde ε_0 é a permissividade do vácuo (no sistema SI). No entanto, aplicando a Lei de Coulomb e a própria definição de campo elétrico, para uma carga puntual na origem temos que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{e}_r$$

onde $\hat{e}_r = \mathbf{r}/r$ é o vetor unitário (versor) na direção radial. Substituindo na lei de Gauss temos

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2}\hat{e}_r\right) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r}),$$

ou ainda

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2}\hat{e}_r\right) = 4\pi\delta(\mathbf{r})$$

Como o termo entre parêntesis é menos o gradiente de $1/r$, em coordenadas esféricas, temos então

$$\nabla \cdot \nabla\frac{1}{r} = \nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

em conformidade com (89).

A diferenciação é uma operação linear e contínua no espaço vetorial das distribuições. Logo, se existir o limite $\mathsf{T} = \lim_{n\to\infty} \mathsf{T}_n$, então existirá também o limite para as derivadas correspondentes $\mathsf{T}' = \lim_{n\to\infty} \mathsf{T}'_n$. Consequentemente, se uma série infinita é somável (isto é, a sequência das somas parciais é convergente), ela pode ser diferenciada termo a termo. Da mesma forma, se uma distribuição for somável em relação a um parâmetro contínuo $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$, a derivada da distribuição também será somável tal que exista a derivada da integral em relação ao parâmetro.

15 Derivadas de funções descontínuas

Uma das utilidades das derivadas distribucionais é dar um sentido matemático rigoroso a derivadas de funções descontínuas, ou seja, para as quais o conceito usual de derivada falha para os pontos de descontinuidade. Um exemplo é o fato, já discutido no capítulo anterior, que a derivada da função degrau unitário de Heaviside $H(x)$, descontínua em $x = 0$, é a "função" delta de Dirac $\delta(x)$.

15.1 Descontinuidades de primeira espécie

Seja $f(x)$ uma função integrável e continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$, com exceção do ponto $x = a$. O ponto $x = a$ é uma descontinuidade de primeira espécie se existem os limites à esquerda e à direita:

$$f_+(a) = \lim_{x\to a^+} f(x) < \infty, \qquad f_-(a) = \lim_{x\to a^-} f(x) < \infty, \tag{90}$$

com $f_+(a) \neq f_-(a)$. A diferença

$$\boxed{[f]_a \equiv f_+(a) - f_-(a)} \tag{91}$$

é chamada "salto" da função no ponto de descontinuidade.

A derivada de uma função $f(x)$ com uma descontinuidade de primeira espécie é uma distribuição, a qual é a derivada da distribuição regular $\widehat{f}$ associada à função, ou seja

$$\begin{aligned}
\widehat{f}'[\varphi] &= -\widehat{f}[\varphi'] = - < f, \varphi' > = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0^+} \left\{ \int_{-\infty}^{a-\epsilon} f(x)\varphi'(x)dx + \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\varphi'(x)dx + \int_{a+\epsilon}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \right\} \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0^+} \left\{ f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{a-\epsilon} - \int_{-\infty}^{a-\epsilon} \varphi(x)f'(x)dx + \right. \\
&\quad \left. \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\varphi'(x)dx + f(x)\varphi(x)|_{a+\epsilon}^{\infty} + \int_{a+\epsilon}^{\infty} \varphi(x)f'(x)dx \right\} \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0^+} \{f(a-\epsilon)\varphi(a-\epsilon) - f(a+\epsilon)\varphi(a+\epsilon)\} + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f'(x)dx \\
&= (f_-(a)\varphi(a) + f_+(a)\varphi(a)) + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f'(x)dx = [f]_a\varphi(a) + < f', \varphi >
\end{aligned}$$

onde separamos uma vizinhança de raio ϵ centrada no ponto $x = a$ e usamos o teorema do valor médio do cálculo integral para justificar que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\varphi'(x)dx = 0. \tag{92}$$

Pela definição de distribuição delta de Dirac (68) temos, então, que

$$(\widehat{f})'[\varphi] = [f]_a \delta_a[\varphi] + \widehat{f'}[\varphi], \tag{93}$$

onde $\widehat{f'}[\varphi] =< f', \varphi >$ é a distribuição regular associada à derivada da função f. Simbolicamente essa expressão é escrita como

$$\boxed{(\widehat{f})' = [f]_a \delta_a + \widehat{f'}.} \tag{94}$$

Em geral, se $f(x)$ tiver um número infinito enumerável de pontos de descontinuidade de primeira espécie $x = a_1, a_2, \ldots$, temos de somar todas as contribuições devido aos saltos respectivos:

$$\widehat{f'} = \widehat{f'} + \sum_i [f]_{a_i} \delta_{a_i}. \tag{95}$$

Derivando (94) obtemos a derivada segunda da distribuição

$$\boxed{(\widehat{f})'' = [f]_a \delta'_a + \left(\widehat{f'}\right)' = [f]_a \delta'_a + [f']_a \delta_a + \widehat{f''}} \tag{96}$$

onde usamos (79), e assim por diante.

15.2 Exemplos

Seja a função degrau unitário de Heaviside:

$$H(x-a) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > a, \\ 1/2, & \text{se } x = a, \\ 0, & \text{se } x < a, \end{cases} \tag{97}$$

cuja descontinuidade em $x = a$ é de primeira espécie pois o salto é finito:

$$[H]_a = H_+(a) - H_-(a) = 1, \tag{98}$$

de modo que a derivada da função degrau é, usando (94), uma distribuição regular dada por

$$(\widehat{H})' = [H]_a \delta_a + \widehat{H'} = \delta_a, \tag{99}$$

pois $H' = 0$ em todos os pontos exceto $x = a$.

Um caso parecido é o da função sinal:

$$\varepsilon(x-a) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > a, \\ 0, & \text{se } x = a, \\ -1, & \text{se } x < a, \end{cases} \tag{100}$$

que possui uma descontinuidade de primeira espécie em $x = a$, uma vez que o salto é

$$[\varepsilon]_a = \varepsilon_+(a) - \varepsilon_-(a) = 2 < \infty. \tag{101}$$

e cuja derivada distribucional é

$$(\widehat{\varepsilon})' = [\varepsilon]_a \delta_a + \widehat{\varepsilon'} = 2\delta_a. \tag{102}$$

16 Transformadas integrais

Nós supomos, aqui, que o estudante tenha estudado, em seu curso de Cálculo Avançado, as transformadas de Laplace. Elas são instrumentos valiosos para a solução de equações diferenciais lineares, sobretudo no domínio do tempo. Outro assunto que supomos conhecido do Cálculo são as séries de Fourier, que são desenvolvimentos de funções periódicas em séries de senos e cossenos. Quando a função não é periódica, introduzimos as chamadas Transformadas de Fourier. Estas últimas também são importantes não só para resolver equações diferenciais como também em diversas aplicações como análise de séries temporais e processamento de imagens. Neste capítulo, veremos que ambas, Laplace e Fourier, representam casos particulares de transformadas integrais.

Seja $f(t)$ uma função definida no domínio $t_1 < t < t_2$. Uma transformada integral da função $f(t)$ no domínio $u_1 < u < u_2$, denotada $f_T(u) = \mathcal{T}\{f(t)\}$, é o seguinte operador integral

$$\boxed{f_T(u) = \mathcal{T}\{f(t)\} = \int_{t_1}^{t_2} K(t,u) f(t) dt,} \tag{103}$$

onde $K(t,u)$ é dito o núcleo ("kernel") do operador. Quando o núcleo tem uma inversa K^{-1} podemos definir uma transformada inversa da função $f_T(u)$:

$$\boxed{f(t) = \mathcal{T}^{-1}\{f_T(u)\} = \int_{u_1}^{u_2} K^{-1}(t,u) f_T(u) du.} \tag{104}$$

A propriedade mais importante das transformadas integrais definidas em (103) é a sua linearidade: dadas duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e duas constantes c_1 e c_2, então

$$\boxed{\mathcal{T}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{T}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{T}\{f_2(t)\}.} \tag{105}$$

A linearidade permite o uso de transformadas integrais na solução de equações diferenciais lineares, sejam elas ordinárias ou parciais, particularmente quando elas envolvem a presença de distribuições (como funções delta de Dirac). Por exemplo, se no domínio t a equação é diferencial, no domínio u ela pode ser algébrica e mais fácil de resolver do que a equação diferencial correspondente. Para obter a solução no domínio t, fazemos uma transformada inversa.

Há várias transformadas integrais de interesse na Física Matemática [vide a Tabela 1], sendo que, na prática, as mais utilizadas são as transformadas de Laplace e Fourier. A primeira é mais adequada para problemas de valores iniciais (equações com derivadas temporais). A segunda é mais útil para problemas de contorno (equações com derivadas espaciais). Há casos onde ambas devem ser utilizadas simultaneamente, como nas equações da onda e do calor, por exemplo.

17 Transformadas de Laplace

Sendo a transformada de Laplace um assunto visto no curso de Cálculo [**?**, **?**], nós iremos nos limitar a enunciar sem demonstração a maioria das suas fórmulas e propriedades, salvo quando for um resultado mais avançado ou uma demonstração particularmente interessante.

Transformada	Símbolo	Núcleo (K)	t_1	t_2	K^{-1}	u_1	u_2
Laplace	$\mathcal{L}$	e^{-ut}	0	∞	$\frac{e^{ut}}{2\pi i}$	$c-i\infty$	$c+i\infty$
Fourier	$\mathcal{F}$	$\frac{e^{iut}}{\sqrt{2\pi}}$	$-\infty$	∞	$\frac{e^{-iut}}{\sqrt{2\pi}}$	$-\infty$	$+\infty$
Mellin	$\mathcal{M}$	t^{u-1}	0	∞	$\frac{t^{-u}}{2\pi i}$	$c-i\infty$	$c+i\infty$
Hankel	$\mathcal{H}*$	$tJ_\nu(ut)$	0	∞	$uJ_\nu(ut)$	0	∞
Hilbert	$\mathcal{H}$	$\frac{1}{\pi}\frac{1}{u-t}$	$-\infty$	∞	$\frac{1}{\pi}\frac{1}{u-t}$	$-\infty$	∞

Tabela 1: Transformadas integrais mais utilizadas.

17.1 Definições

Seja uma função (usualmente do tempo) $f(t)$ definida para $0 \leq t < \infty$. A sua transformada de Laplace é definida como

$$\boxed{f_L(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty dt e^{-st} f(t),} \tag{106}$$

onde $s = \sigma + i\omega$ é um número complexo, em geral.

Caso $f(t)$ seja contínua por partes em todo intervalo finito de $[0, \infty)$, e satisfaz a condição (ser do *tipo exponencial*)

$$|f(t)| \leq Me^{at}, \tag{107}$$

para todo $t \in [0, \infty)$, então a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para todo $s > a$. Essa condição normalmente impõe alguma restrição sobre os valores de s a serem considerados. A transformada de Laplace é única: para cada função há uma e somente uma transformada.

Se $f(t) = k$ (função constante), a sua transformada de Laplace é

$$f_L(s) = k\int_0^\infty dt e^{-st} = \frac{1}{s}, \tag{108}$$

caso $s > 0$. Em geral, se s for complexo, essa condição é Re $s > 0$. Para $f(t) = t$ (função identidade), a transformada por ser encontrada integrando por partes:

$$f_L(s) = \int_0^\infty t dt e^{-st} = -\frac{e^{-st}t}{s}\bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty dt e^{-st} = \frac{1}{s^2}, \tag{109}$$

onde, supondo Re $s > 0$, usamos $\lim_{t\to\infty} te^{-st} = 0$.

$f(t)$	$f_L(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	restrição	$f(t)$	$f_L(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	restrição
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$	t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}, s > 0$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\sin(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	$s > 0$	$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$s > 0$
$t\sin(kt)$	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$	$s > \lvert k\rvert$	$t\cos(kt)$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$	$s > \lvert k\rvert$
te^{-t}	$\frac{1}{(s+1)^2}$	$s > -1$	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}, s > a$
$e^{at}\sin(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$	$s > a$	$e^{at}\cos(kt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$	$s > a$
$1 - e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{s(1+\tau s)}$	$s > -\frac{1}{\tau}$	$H(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$s > 0$

Tabela 2: Algumas transformadas de Laplace de funções importantes.

Na tabela 2 apresentamos as transformadas de Laplace de algumas funções frequentemente usadas nas aplicações em Física Matemática, sobretudo as que envolvem o tempo como variável independente.

17.2 Propriedades

A transformada de Laplace é linear, ou seja, dadas duas funções $f_(t)$ e $f_2(t)$ e duas constantes c_1 e c_2, a transformada de uma combinação linear é a combinação das transformadas:

$$\boxed{\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{f_2(t)\},} \tag{110}$$

As propriedades do amortecimento é e deslocamento são, respectivamente

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)e^{-at}\} = f_L(s+a),} \tag{111}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}f_L(s),} \tag{112}$$

onde a função degrau unitário de Heaviside é

$$H(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < a, \\ 1, & \text{se } t > a, \end{cases}. \tag{113}$$

As transformadas de Laplace das derivadas primeiras e segunda são particularmente importantes no estudo de equações diferenciais (as linhas indicam derivadas temporais):

$$\boxed{\mathcal{L}\{f'(t)\} = sf_L(s) - f(0),} \tag{114}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 f_L(s) - sf(0) - f'(0),} \tag{115}$$

que podem ser generalizadas como

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n f_L(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1} f^{(n-k)}(0). \tag{116}$$

A transforrada de uma integral é

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s} f_L(s). \tag{117}$$

O produto das transformadas de duas funções é a transformada da convolução entre elas:

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{(f * g)(t)\},} \tag{118}$$

onde

$$\boxed{(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.} \tag{119}$$

17.3 Transformada inversa de Laplace

A transformada inversa de Laplace é definida por meio da integral de inversão de Mellin [4]

$$\boxed{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f_L(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{h\to\infty} \int_{\gamma-ih}^{\gamma+ih} e^{ts} f_L(s) ds} \tag{120}$$

onde a integral é calculada no plano s-complexo ao longo do segmento de reta dado por Re $s = \gamma$, onde γ é escolhido tal que todas as singularidades de $f_L(s)$ fiquem à esquerda da reta, e a ordenada (no eixo imaginário) vá de $-h$ até $+h$.

Na prática, a integral de inversão de Mellin é pouco usada, sendo preferível o uso de métodos algébricos (como a decomposição em frações parciais) e de tabelas de transformadas de Laplace. Para decompor uma fração racional $\frac{f(x)}{g(x)}$ em uma soma de frações parciais, a mesma deve satisfazer as seguintes condições [vide [**?**], Vol. 1, p. 389]:

- o grau do numerador $f(x)$ deve ser inferior ao grau do denominador $g(x)$;
- devemos conhecer os fatores do denominador $g(x)$: qualquer polinômio com coeficientes reais pode ser expresso como o produto de fatores lineares $(x - r)$ e quadráticos $(x^2 + px + q)$ reais.

- seja $(x-r)$ um fator linear, e $(x-r)^m$ a maior potência de $x-r$ que divide $g(x)$: a esse fator corresponde uma soma de m frações parciais

$$\frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}, \tag{121}$$

- seja (x^2+px+q) um fator quadrático, e $(x^2+px+q)^n$ a maior potência desse fator que divide $g(x)$. A esse fator corresponde uma soma de n frações parciais

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n} \tag{122}$$

- determinamos os coeficientes $A_1, \cdots; B_1, \cdots; C_1, \cdots$ identificando os coeficientes das potências semelhantes de x nos numeradores e resolvendo o sistema de equações algébricas.

Como um exemplo, vamos calcular a transformada inversa de Laplace da função

$$f_L(s) = \frac{1}{s^2-5s+6},$$

onde o denominador tem zeros simples em $s=3$ e $s=2$, de forma que podemos decompor em frações parciais supondo

$$f_L(s) = \frac{1}{(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3} = \frac{s(A+B)-3A-2B}{(s-2)(s-3)},$$

Comparando os numeradores temos que $A+B=0$ e $-3A-2B=1$, cuja solução é $A=-a$ e $B=1$, tal que, aplicando a transformada inversa de Laplace temos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-5s+6}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s-2}+\frac{1}{s-3}\right\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}.$$

Observando a tabela 2 concluimos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}, \tag{123}$$

donde

$$f(t) = -e^{2t} + e^{3t}.$$

Outro exemplo é

$$f_L(s) = \frac{3}{(s+1)(s^2+9)},$$

onde o denominador já está escrito como o produto de um fator linear e um quadrático, donde a sua decomposição em frações parciais é

$$f_L(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+9} = \frac{(A+B)s^2+(B+C)s+(9A+C)}{(s+1)(s^2+9)},$$

Comparando os numeradores resulta o sistema de equações algébricas $A+B=B+C=0$ e $9A+C=3$, que é facilmente resolvido: $A=C=3/10$ e $B=-3/10$; de sorte que

$$f(t) = \frac{3}{10}\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}\right].$$

Da tabela 2 segue que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \sin(kt), \tag{124}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = \cos(kt), \tag{125}$$

que, combinados com (123), fornecem a transformada inversa:

$$f(t) = \frac{3}{10}\left(e^{-t} - \cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t\right).$$

17.4 Transformada de Laplace da função delta

A transformada de Laplace da função delta é dada por

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t-a)dt = e^{-sa},} \tag{126}$$

onde $a > 0$. Caso $a < 0$, então $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = 0$.

Para resolver equações diferenciais pelo método da transformada de Laplace, tendo ou não coeficientes do tipo funções delta, procedemos da seguinte forma

1. aplicamos transformadas de Laplace em todos os termos da equação (usando linearidade);
2. resolvemos algebricamente a equação para $y_L(s)$;
3. determinamos a transformada inversa de Laplace $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y_L(s)\}$

17.4.1 Oscilador harmônico sob uma força impulsiva

No Capítulo 1, vimos que a função delta é conveniente para representarmos forças impulsivas, ou seja, forças que agem durante um intervalo de tempo muito curto com um impulso constante I. Podemos considerar a equação de movimento de um oscilador harmônico de massa m, constante da mola k e constante de amortecimento b, sujeito a uma força impulsiva aplicada no instante $t = t_0$:

$$my'' + by' + ky = F(t) = I\delta(t - t_0),$$

e devemos especificar a posição e a velocidade iniciais $y(0)$ e $y'(0)$, respectivamente.

Consideremos o exemplo numérico (correspondendo a um oscilador sem atrito):

$$y'' + y = \delta(t-10), \tag{127}$$

onde $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Usando (126) temos (escrevemos $y_L(s) \equiv \mathcal{L}\{y(t)\}$):

$$\underbrace{\mathcal{L}\{y''\}}_{s^2y_L(s)-sy(0)-y'(0)} + \underbrace{\mathcal{L}\{y\}}_{=y_L(s)} = \underbrace{\mathcal{L}\{\delta(t-10)\}}_{=e^{-10s}}$$

de forma que a transformada de Laplace da solução é

$$y_L(s) = \frac{s + e^{-10s}}{s^2+1}.$$

Agora temos de fazer o caminho de volta, computando a transformada inversa:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y_L(s)\} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\}}_{=\cos t} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-10s}}{s^2+1}\}.$$

Usando a propriedade do deslocamento (112) temos que

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}y_L(s)\} = y(t-a)H(t-a), \tag{128}$$

donde

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-10s}}{s^2+1}\} = H(t-10)\,\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}\Big|_{t-10} = H(t-10)\sin(t-10),$$

onde usamos (124). Logo a solução da equação diferencial é

$$y(t) = \cos t + H(t-10)\sin(t-10).$$

que também pode ser escrita como [Fig. 8(a)]

$$y(t) = \begin{cases} \cos t, & \text{se } 0 < t \leq 10 \\ \cos t + \sin(t-10), & \text{se } t \geq 10 \end{cases}, \tag{129}$$

de forma que a velocidade correspondente será [Fig. 8(b)]

$$y'(t) = \begin{cases} -\sin t, & \text{se } 0 < t < 10 \\ -\sin t + \cos(t-10), & \text{se } t > 10 \end{cases}. \tag{130}$$

É instrutivo analisar algumas das propriedades da solução acima. Primeiramente, a solução é contínua em $t = 10$, que é o ponto em que a função delta é aplicada[Fig. 127(a)]. De fato, o limite à esquerda,

$$\lim_{t\to 10^-} y(t) = \lim_{t\to 10} \cos t = \cos 10,$$

é igual ao limite à direita,

$$\lim_{t\to 10^+} y(t) = \lim_{t\to 10} [\cos t + \sin(t-10)] = \cos 10 + \sin 0 = \cos 10.$$

Já a derivada da solução é descontínua em $t = 10$, pois o limite à esquerda

$$\lim_{t\to 10^-} y'(t) = -\lim_{t\to 10} \sin t = -\sin 10,$$

é diferente do limite à direita,

$$\lim_{t\to 10^+} y'(t) = \lim_{t\to 10} [-\sin t + \cos(t-10)] = -\sin 10 + 1$$

de modo que o "salto" da derivada da solução no ponto onde a função delta é aplicada:

$$[y']_{10} \equiv \lim_{t\to 10^+} y'(t) - \lim_{t\to 10^-} y'(t) = 1 - \sin 10 + \sin 10 = 1.$$

e que é representada pela linha pontilhada na Fig. 8(b).

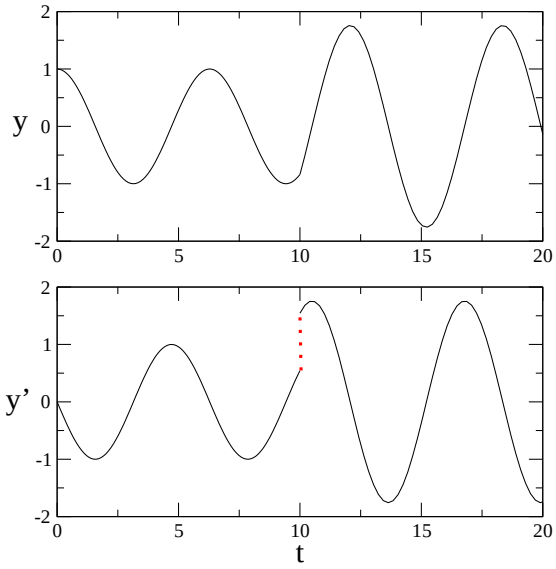


Figura 8: Posição (a) e velocidade (b) correspondentes ao exemplo (127).

18 Transformadas de Fourier

18.1 Definições

A transformada de Fourier de uma função $f(x)$, definida em $-\infty < x < +\infty$ é [3]

$$\boxed{f_F(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{ikx},} \tag{131}$$

e a transformada inversa da função $f_F(k)$, com $-\infty < k < +\infty$, é

$$\boxed{f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{f_F(k)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk f_F(k) e^{-ikx}.} \tag{132}$$

A transformada de Fourier existe desde que a função $f(x)$ seja contínua por partes, ou seja, tenha um número finito de descontinuidades em $(-\infty, +\infty)$, e que seja absolutamente integrável nesse intervalo, ou seja, se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty. \tag{133}$$

Em geral (mas nem sempre) essa condição é satisfeita se [**?**]:

$$f(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0. \tag{134}$$

[3] Essas definições na literatura mudam bastante conforme os autores. Nós utilizaremos as definições do Butkov [4].

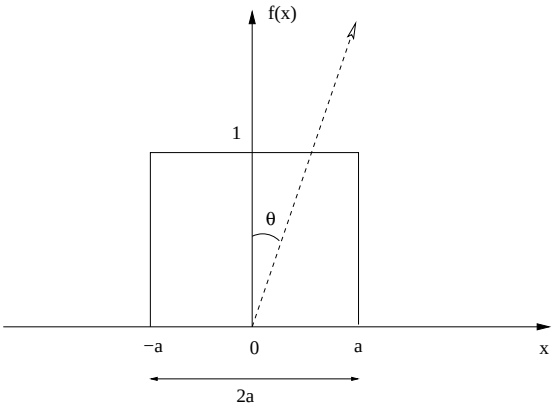


Figura 9: Difração da luz por uma fenda única.

Nessas condições, a transformada de Fourier é (i) contínua; (ii) limitada:

$$|f_F(k)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx \qquad \text{para todo } k, \tag{135}$$

e (iii) anula-se no infinito:

$$f_F(k) \xrightarrow[|k|\to\infty]{} 0. \tag{136}$$

18.2 Exemplos de transformadas de Fourier

18.2.1 Pulso quadrado

Uma função que satisfaz as condições (133) e (134) é

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq a, \\ 0, & \text{se } |x| > a, \end{cases}. \tag{137}$$

Sua transformada de Fourier é o seno cardinal

$$f_F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} dx\, e^{ikx} = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ak}{ak} = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathrm{sinc}\, ak. \tag{138}$$

Como uma aplicação física desse resultado, consideremos a difração de luz de comprimento de onda λ por uma fenda de largura $2a$ [Fig. 9]. A função $f(x)$ dada por (137) pode, nesse contexto, ser identificada como a função de transmissão de luz pela fenda. Identificando

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \sin\theta,$$

onde θ é a posição angular medida a partir do eixo de simetria, vemos que o quadrado da transformada de Fourier é o padrão de intensidade da luz difratada [Fig. 10]

$$I = |f_F(k)|^2 = I_0 \left(\frac{\sin ka}{ka} \right)^2,$$

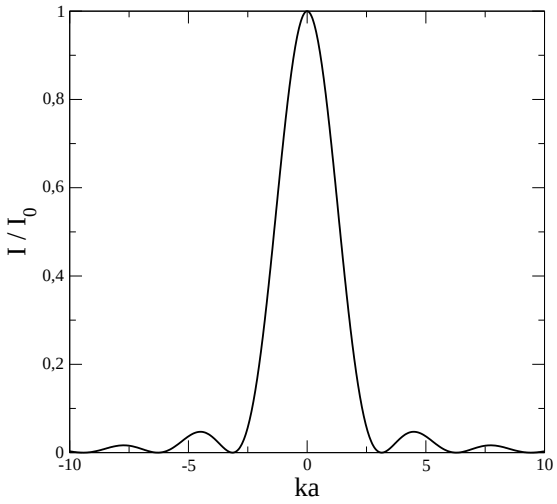


Figura 10: Padrão de interferência para difração por fenda única.

onde $I_0 = 2a^2/\pi$, tal que os mínimos de difração ocorrem quando a intensidade é nula, ou seja, quando $ka = n\pi$, onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Esses mínimos são identificados por posições angulares dadas por

$$n\lambda = 2a \sin\theta.$$

18.2.2 Gaussiana

Outra importante função, que satisfaz (133) e (134) é a gaussiana

$$f(x) = e^{-\alpha x^2}, \tag{139}$$

cuja transformada de Fourier pode ser encontrada facilmente completando o quadrado na exponencial do integrando,

$$f_F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} dx e^{-\alpha x^2 + ikx} = \sqrt{\frac{1}{2\alpha}} e^{-k^2/4\alpha}, \tag{140}$$

e que também é uma gaussiana.

Uma aplicação física desse resultado é na mecânica quântica: a função (139) pode representar a envoltória de um "pacote de onda gaussiano", que é uma superposição de um número infinito de ondas de matéria de diferentes comprimentos de onda. A largura desse pacote, Δx, é a incerteza na determinação da posição da partícula, cuja dinâmica é representada pelo pacote gaussiano. A sua transformada de Fourier (140) representa o mesmo pacote no espaço de momentum, e também é uma gaussiana, cuja largura Δk é a incerteza na determinação do número de onda k, ligado ao momentum p da partícula pela relação de De Broglie $p = \hbar k$. Um cálculo simples mostra que

$$\Delta x \Delta p = 8\hbar,$$

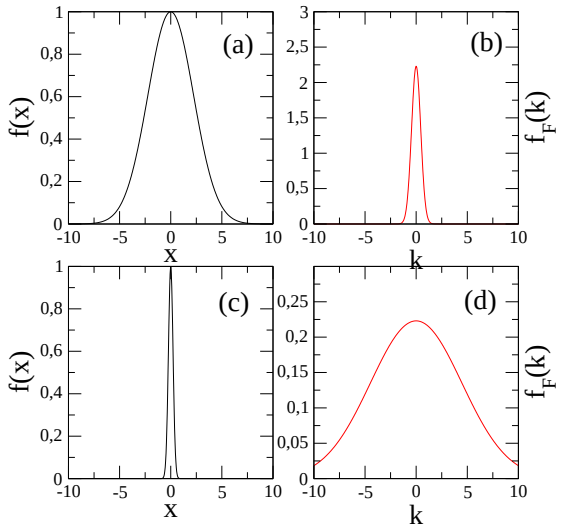


Figura 11: Gaussianas para (a) $\alpha = 0,1$ e (c) $\alpha = 10$, com as transformadas de Fourier em (b) e (d), respectivamente.

que está de acordo com o princípio da incerteza de Heisenberg $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$.

Para um valor pequeno de α [Fig. 11(a)] a gaussiana no espaço de posição é relativamente larga, significando grande incerteza na determinação da posição; enquanto a respectiva gaussiana no espaço de momentum [Fig. 11(b)] é relativamente estreita, indicando baixa incerteza na determinação de momentum. Para α grande as conclusões se invertem [Figs. 11(c) e (d)]. Isso sugere que o princípio da incerteza, ainda que tenha um forte conteúdo físico, também é uma consequência matemática natural do formalismo da mecânica ondulatória.

18.2.3 Senos e cossenos

Mesmo que uma função não satisfaça às condições (133) e (134) para que exista uma transformada de Fourier, ainda assim é possível trabalhar desde que interpretemos o resultado como uma distribuição. Um exemplo é a função constante $f(x) = 1$, para $-\infty < x < +\infty$, que claramente viola tanto (133) como (134).

Usando a representação integral da função delta, a sua transformada de Fourier é

$$f_F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} = \sqrt{2\pi}\, \delta(k), \tag{141}$$

ou seja, a transformada de Fourier é uma distribuição delta de Dirac.

De forma análoga, a transformada de Fourier da exponencial complexa $e^{ik_0 x}$ é $\sqrt{2\pi}\delta(k + k_0)$. Como resultado, obtemos as importantes transformadas de Fourier do seno e cosseno, que não satisfazem (133) e (134), em termos da

função delta de Dirac:

$$\mathcal{F}\{\cos k_0 x\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}\{e^{ik_0x}\} + \mathcal{F}\{e^{-ik_0x}\}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta(k+k_0) + \delta(k-k_0)\right), \tag{142}$$

$$\mathcal{F}\{\sin k_0 x\} = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{F}\{e^{ik_0x}\} - \mathcal{F}\{e^{-ik_0x}\}\right) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\delta(k+k_0) - \delta(k-k_0)\right), \tag{143}$$

18.3 Propriedades

A transformada de Fourier, assim como a de Laplace, é linear, ou seja,

$$\boxed{\mathcal{F}\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\} = c_1\mathcal{F}\{f_1(x)\} + c_2\mathcal{F}\{f_2(x)\}.} \tag{144}$$

Pela definição, segue-se imediatamente que

$$f_F(-k) = {f_F}^*(k). \tag{145}$$

Como consequência, se $f(x)$ é uma função par, sua transformada de Fourier é real; caso $f(x)$ seja ímpar, sua transformada será imaginária pura. Em geral, a transformada será um número complexo.

Uma importante propriedade é a da derivação:

$$\boxed{\mathcal{F}\{f'(x)\} = -ikf_F(k),} \tag{146}$$

que mostramos da seguinte forma: integrando por partes temos

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{df}{dx}e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{ikx}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{ik}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)e^{ikx}.$$

Vimos que $f(x)$ deve ser absolutamente integrável em $\mathbb{R}$ para que tenha transformada de Fourier. Essa condição é satisfeita se $f(x)$ se anula quando $|x|$ tende a infinito. Caso isso ocorra o primeiro termo acima se anula e chegamos a (146).

Em consequência de (146)

$$\boxed{\mathcal{F}\{f''(x)\} = -k^2 f_F(k).} \tag{147}$$

Como regra geral, quanto mais suave for $f(x)$ (ou seja, quanto maior for o número de derivadas contínuas), tanto mais compacta será sua transformada de Fourier. Se $f(x)$ for m vezes continuamente diferenciável, e se as suas m primeiras derivadas são integráveis, então a transformada de Fourier da m-ésima derivada de $f(x)$ será

$$\mathcal{F}\{f^{(m)}(x)\} = (-ik)^m f_F(k), \tag{148}$$

Analogamente, se $x^m f(x)$ é uma função integrável em $\mathbf{R}$, a transformada de Fourier de $f(x)$ é continuamente diferenciável m vezes tal que

$$f_F^{(m)}(k) = \mathcal{F}\{(ix)^m f(x)\}. \tag{149}$$

O teorema de Parseval assegura que, se a função $f(x)$ é normalizada em L^2, assim também sua transformada de Fourier, ou seja,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} dx|f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dk|f_F(k)|^2,} \tag{150}$$

e que pode ser demonstrada por substuição direta:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dk|f_F(k)|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk f_F(k) f_F^*(k) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{ikx}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi f(\xi) e^{-ik\xi}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi f^*(\xi) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(x-\xi)}}_{=2\pi\delta(x-\xi)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi f^*(\xi)\delta(x-\xi)}_{=f^*(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx|f(x)|^2,
\end{aligned}$$

onde usamos a representação integral da função delta e sua propriedade de filtragem.

Outras propriedades úteis são as de amortecimento e deslocamento, que são, respectivamente

$$\boxed{\mathcal{F}\{f(x)e^{ax}\} = f_F(k-ia),} \tag{151}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{ika} f_F(k),} \tag{152}$$

Sejam $f_F(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ e $g_F(k) = \mathcal{F}\{g(x)\}$ duas transformadas de Fourier. O teorema da convolução é

$$\mathcal{F}^{-1}\{f_F(k)g_F(k)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi f(x-\xi)g(\xi) \equiv f * g = g * f. \tag{153}$$

onde $*$ denota o produto de convolução, em analogia com a expressão (118), válida para transformadas de Laplace.

A transformada de Fourier da função delta é obtida a partir da propriedade de filtragem como

$$\boxed{\mathcal{F}\{\delta(x-a)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)e^{ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ika},} \tag{154}$$

o que nos habilita a usar as transformadas de Fourier na resolução de equações diferenciais ordinárias ou parciais envolvendo funções delta.

18.4 A integral de Fourier

Um resultado importante é o teorema integral de Fourier, que resulta diretamente da aplicação das definições da transformada e transformada inversa de

uma função:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi f(\xi) e^{ik\xi} \right)$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi f(\xi) e^{-ik(x-\xi)}.} \tag{155}$$

Inicialmente vamos recordar o desenvolvimento de uma função $f(x)$, com $-L \leq x \leq +L$, e que tem período $2L$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{156}$$

onde os coeficientes de Fourier são dados por

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt, \tag{157}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt, \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{158}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt, \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{159}$$

Substituindo (157), (158) e (159) em (156) teremos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \\ &+ \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^{+L} f(t) dt \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(x) dx + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^{+L} f(t) \cos\left[\frac{n\pi}{L}(t-x)\right] dt \end{aligned} \tag{160}$$

Agora vamos supor que $f(x)$ **não seja** periódica. Em outras palavras, o seu período é infinitamente grande. O limite $L \to \infty$ em (160) precisa ser tomado com muito cuidado para não levar a expressões sem sentido. Vamos chamar

$$\omega = \frac{n\pi}{L} = n\Delta\omega \tag{161}$$

onde $n = 1, 2, \ldots$ e $\Delta\omega = \pi/L$. Se $L \to \infty$ e supondo a seguinte condição de integrabilidade para a função $f(t)$: $\int_{-L}^{+L} f(t) dt < \infty$, então o primeiro termo no segundo membro de (160) tende a zero, e resta portanto

$$f(x) \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-L}^{+L} f(t) \cos[\omega(t-x)] dt. \tag{162}$$

Tomando o limite $L \to \infty$ temos que $\Delta\omega \to d\omega$ e podemos formalmente substituir a somatória por uma integral, o que resulta numa expressão exata

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\omega(t-x)] dt. \tag{163}$$

Como o cosseno é uma função par em ω, podemos estender a integração para todo os valores de ω:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos[\omega(t-x)]dt.} \tag{164}$$

Analogamente, como o seno é uma função ímpar, temos que

$$i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin[\omega(t-x)]dt = 0$$

para qualquer função $f(t)$. Somando estas duas expressões membro a membro teremos

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-ik(x-t)}.} \tag{165}$$

que é o teorema integral de Fourier (155). Portanto, podemos considerar as transformadas de Fourier como generalizações das séries de Fourier em situações onde as funções não são periódicas.

18.5 Transformadas de Fourier em várias dimensões

Podemos generalizar estes resultados para D dimensões espaciais. As transformadas direta e inversa de Fourier são definidas como

$$\boxed{f_F(\mathbf{k}) = \mathcal{F}\{f(\mathbf{r})\} = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}}\int d^D r f(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},} \tag{166}$$

$$\boxed{f(\mathbf{r}) = \mathcal{F}^{-1}\{f_F(\mathbf{k})\} = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}}\int d^D k f_F(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},} \tag{167}$$

onde tanto $\mathbf{r}$ como $\mathbf{k}$ são vetores num espaço D-dimensional. Algumas propriedades são adaptadas, nesse caso, para

$$\mathcal{F}\{\nabla f(\mathbf{r})\} = -i\mathbf{k} f_F(\mathbf{k}), \tag{168}$$

$$\mathcal{F}\{\nabla^2 f(\mathbf{r})\} = -\mathbf{k}^2 f_F(\mathbf{k}). \tag{169}$$

A transformada de Fourier da função delta D-dimensional é a generalização de (154),

$$\mathcal{F}\{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\} = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}}\int d^D r \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0}}{(2\pi)^{D/2}}, \tag{170}$$

onde $\mathbf{r}_0$ é um vetor constante.

Vamos apresentar as fórmulas específicas para os casos bi e tridimensional. Para $D = 2$, e usando coordenadas polares onde $\mathbf{r} = (\rho, \varphi)$ e $\mathbf{k} = (k, \psi)$, se alinharmos $\mathbf{k}$ com o eixo x temos que

$$e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{\pm ik\rho\cos\varphi}. \tag{171}$$

Caso alinhemos $\mathbf{r}$ com o eixo k_x, então trocamos φ por ψ. Os elementos de área são

$$d^2r = dS = \rho d\rho d\varphi, \qquad d^2k = kdkd\psi. \tag{172}$$

Em $D = 3$ é conveniente o uso de coordenadas esféricas onde $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$ e $\mathbf{k} = (k, \vartheta, \varphi)$. Alinhando $\mathbf{k}$ com o eixo z teremos

$$e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{\pm ikr\cos\theta}, \tag{173}$$

tal que, se alinharmos $\mathbf{r}$ com o eixo k_z, trocaremos θ por ϑ. Os elementos de volume nos espaços $\mathbf{r}$ e $\mathbf{k}$ são dados, respectivamente, por

$$d^3r = dV = d\phi\sin\theta d\theta r^2 dr, \qquad d^3k = d\varphi\sin\vartheta d\vartheta k^2 dk. \tag{174}$$

18.5.1 Exemplo: a equação de Helmholtz modificada

Como um exemplo ao mesmo tempo de cálculo de transformadas de Fourier em três dimensões e de como as mesmas podem ser usadas para resolver uma equação diferencial, vamos considerar a seguinte equação diferencial parcial (chamada de Helmholtz "modificada" devido ao sinal negativo no segundo termo) com uma função delta tridimensional no termo independente

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) - m^2 u(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}), \tag{175}$$

onde m é um número real arbitrário e $\mathbf{a}$ é um vetor constante. A condição de contorno, aqui, é $u(\mathbf{r}) \to 0$ para $|\mathbf{r}| \to \infty$.

De (166) a transformada de Fourier da variável dependente é

$$u_F(\mathbf{k}) = \mathcal{F}\{u(\mathbf{r})\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3r u(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \tag{176}$$

Aplicando transformadas de Fourier à equação (175), e usando (169) e (170) temos

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathcal{F}\{\nabla^2 u(\mathbf{r})\}}_{=-k^2u_F} - m^2 u_F &= -\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}}{(2\pi)^{3/2}} \\ u_F(\mathbf{k}) &= \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}}{(2\pi)^{3/2}(k^2+m^2)}. \end{aligned} \tag{177}$$

de modo que, agora, a solução da equação (175) implica encontrar a transformada de Fourier inversa dessa expressão que, de (167), é

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= \mathcal{F}^{-1}\{u_F(\mathbf{k})\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k u_F(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{a})}}{k^2+m^2}. \end{aligned} \tag{178}$$

Para calcular a integral de volume acima usamos (173) (alinhando $\mathbf{r}-\mathbf{a}$ com o eixo k_z, e (174)

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta)\int_0^\infty k^2 dk \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{a}|\cos\vartheta}}{k^2+m^2}, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{k^2dk}{k^2+m^2}\underbrace{\int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta)e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{a}|\cos\vartheta}}_{\equiv I(k)} \end{aligned} \tag{179}$$

Fazendo a seguinte mudança de variável: $t \equiv -ik|\mathbf{r}-\mathbf{a}|\cos\vartheta$, a integral em ϑ torna-se elementar:

$$I(k) = \frac{1}{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}\int_{ik|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} dte^t = \frac{2\sin k|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}{k|\mathbf{r}-\mathbf{a}|},$$

que, incorporada a (179) leva à integral radial (no espaço-k):

$$u(\mathbf{r}) = \frac{2}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{k^2 dk}{k^2+m^2}\frac{\sin k|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}{k|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}, \tag{180}$$

Duas novas transformações de variável:

$$\kappa \equiv k|\mathbf{r}-\mathbf{a}|, \qquad \sigma \equiv m|\mathbf{r}-\mathbf{a}|, \tag{181}$$

levam, após uma álgebra símples a

$$u(\mathbf{r}) = \frac{2}{(2\pi)^2}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}\int_0^\infty \frac{\kappa\sin\kappa\, d\kappa}{\kappa^2+\sigma^2}. \tag{182}$$

Como o integrando acima é uma função par de κ, então a integral de zero a infinito é metade da integral de $-\infty$ a ∞. Logo

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\kappa\sin\kappa d\kappa}{\kappa^2+\sigma^2}}_{\equiv J(\mathbf{r})}, \tag{183}$$

onde a integral

$$J(\mathbf{r}) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\kappa\sin\kappa d\kappa}{\kappa^2+\sigma^2} = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\mathrm{Imf}(\kappa)\mathrm{d}\kappa, \tag{184}$$

pode ser efetuada usando resíduos no plano κ-complexo, onde definimos a função

$$f(\kappa) = \frac{\kappa e^{i\kappa}}{\kappa^2+\sigma^2}.$$

As singularidades da função $f(\kappa)$ são os pontos $\kappa = \pm i\sigma$, de modo que adotamos um contorno fechado de integração

$$C = [-R, +R]\, U\, C_R,$$

onde C_R é um semicírculo de raio R no semi-plano superior [Fig. 12], envolvendo pois apenas o ponto $\kappa = i\sigma$, de modo que

$$\oint f(\kappa)d\kappa = \int_{-R}^{R} f(\kappa)d\kappa + \int_{C_R} f(\kappa)d\kappa. \tag{185}$$

Pelo teorema dos resíduos

$$\begin{aligned}\oint f(\kappa)d\kappa &= 2\pi i\mathrm{Res}\{\mathrm{f(i}\sigma)\} = 2\pi\mathrm{i}\lim_{\kappa\to\mathrm{i}\sigma}(\kappa-\mathrm{i}\sigma)\mathrm{f}(\kappa) = \\ &= 2\pi i\lim_{\kappa\to i\sigma}(\kappa-i\sigma)\frac{\kappa e^{i\kappa}}{(\kappa+i\sigma)(\kappa-i\sigma)} = \pi i e^{-\sigma},\end{aligned} \tag{186}$$

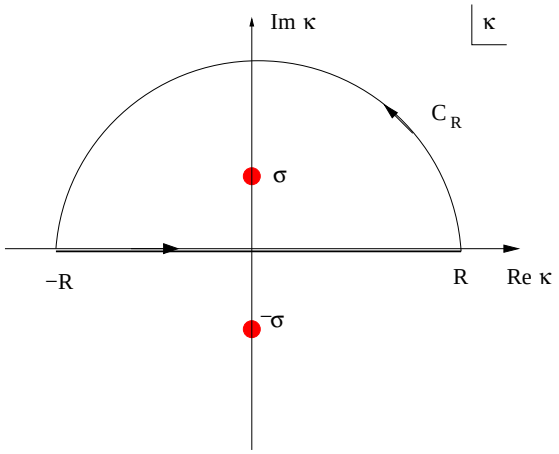


Figura 12: Caminho fechado no plano κ-complexo usado para calcular a integral (184).

que, por não depender de R, não tem seu valor alterado quando $R \to \infty$.

Já a integral sobre o semi-círculo C_R é nula, quando R tende a infinito, devido ao lema de Jordan, de modo que (185) fornece, nesse limite,

$$J(\mathbf{r}) = \mathrm{Im}\left[\pi \mathrm{i} \mathrm{e}^{-\sigma}\right] = \pi \mathrm{e}^{-\sigma} = \pi \mathrm{i} \mathrm{e}^{-\mathrm{m}|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}, \tag{187}$$

que, quando aplicada em (183), resulta na transformada inversa de Fourier que é a solução da equação (175):

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-m|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}, \tag{188}$$

e que satisfaz a condição de contorno, já que

$$\lim_{|\mathbf{r}|\to\infty} \frac{e^{-m|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} = 0. \tag{189}$$

19 Exercícios

1. Mostre que as propriedades de paridade (15) e escala (16) decorrem como casos particulares da propriedade geral (17).

2. Calcule as integrais:

   (a)
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x^2 + x - 2)(3x^2 - 5x + 1)$$

   (b)
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x^2 + 4x - 21)(7x^3 - 3x^2 + 2x - 1)$$

3. Mostre que as funções gaussiana (22) e pico de difração (26) são representação possíveis para a função delta.

4. Considere uma linha uniformemente carregada com uma carga total Q ao longo do eixo z e cujo ponto médio encontra-se na origem do sistema de coordenadas. Se o comprimento total da linha é $2b$, mostre que a densidade volumétrica de carga associada é, em coordenadas esféricas, dada por

$$\mu(\mathbf{r}) = \frac{Q}{2b}\frac{1}{2\pi r}\delta(r-b)\left[\delta(\cos\theta - 1) + \delta(\cos\theta + 1)\right]$$

5. Mostre as seguintes propriedades das derivadas da "função" delta:

   (a)
   $$x\delta'(x) = -\delta(x),$$

   (b)
   $$x^2\delta'(x) = 0,$$

   (c)
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x-y)\delta(y-a)dy = \delta'(x-a),$$

   (d)
   $$\delta''(-x) = \delta''(x),$$

   (e)
   $$x^2\delta''(x) = 2\delta(x).$$

   (f)
   $$\delta^{(m)}(x) = (-1)^m\delta^{(m)}(-x),$$

   (g)
   $$x^{m+1}\delta^{(m)}(x) = 0,$$

   (h)
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(m)}(x-y)\delta^{(n)}(y-a)dy = \delta^{(m+n)}(x-a).$$

6. Considere a seguinte representação, do tipo pulso-quadrado, para a função delta

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1/(2a), & \text{se } -a \le x \le a, \\ 0, & \text{se } x < a, \text{ ou } x > a. \end{cases}$$

   Considere um conjunto de infinitas cópias desta função, com período $2L$, e desenvolva esta função em série de Fourier, tal que, fazendo $a \to 0$, obtenha a seguinte representação em série para a função delta:

$$\delta(x) = \frac{1}{2L} + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

7. Mostre que a função

$$(\ln|x|)_- \equiv \begin{cases} 0, & \text{se } x \ge 0, \\ ln|x|, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

   é localmente integrável em $\mathbb{R}$.

8. O funcional

$$\mathsf{T}[\varphi] = \int_0^1 [\varphi(x)]^2 dx$$

   é uma distribuição? Por quê?

9. A função

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ x+1, & -1 \le x \le 0 \\ 1-x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > -1 \end{cases}$$

é aceitável como função de base? Por quê?

10. Mostre que, para $-\infty < a < b < \infty$, é aceitável como função de base:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \le a \text{ ou } x \ge b, \\ \exp\left[-\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x-b)^2}\right], & \text{se } a < x < b, \end{cases}$$

11. Mostre que: (a) $\widehat{\check{H}}' = \delta_a$, onde $\check{H}(x) = H(-x)$, sendo $H(x)$ a função degrau unitário de Heaviside $H(x)$;

(b) $\widehat{|x|}'' = 2\delta_0$;

(c) $(\widehat{\sin k|x|})'' = -k^2 \widehat{\sin k|x|} + 2k\delta_0$,

12. Mostre que a função $\ln|x|$ é localmente integrável, ou seja, que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\int_a^b \ln|x| dx < \infty$. Sugestão: faça $a < 0$ e $b > 0$ e use $\int_0^k ln x dx = k(\ln k - 1)$, para $k > 0$.

13. Considere a sequência de funções $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, com

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \le x \le 1/n \\ n^2\left(\frac{2}{n} - x\right), & 1/n < t \le 2/n \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que essa sequência converge ponto-a-ponto para a função $f(x) = 0$ para todo x. Dica: demonstre que, para todo $x > 0$, existe um inteiro N tal que, para todo $n > N$, $f_n(x) = 0$. Pode-se mostrar (mas é difícil!) que essa sequência converge fracamente para a distribuição delta, ilustrando que o limite distribucional de uma sequência nem sempre coincide com seu limite ponto-a-ponto.

14. Mostre que, em duas dimensões, vale a relação

$$\nabla^2 \ln\frac{1}{r} = -2\pi\delta(\mathbf{r})$$

15. Decomponha em frações parciais

$$\frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2}.$$

16. Calcule a transformada de Laplace das seguintes funções:

(a)

$$f(t) = 4e^{5t} + 6t^3 - 3\sin(4t) + 2\cos(2t),$$

(b)

$$f(t) = e^{-2t}\sin(4t),$$

(c)

$$f(t) = \begin{cases} \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right), & \text{se } t > \frac{2\pi}{3}; \\ 0, & \text{se } t \le \frac{2\pi}{3}. \end{cases},$$

(d) $f(t) = J_0(t)$. Dica: expanda a função de Bessel em série e calcule a transformada termo-a-termo.

(e) $f(t) = J_1(t)$.

17. Ache a transformada inversa de Laplace das seguintes funções:

(a)
$$f_L(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s-3},$$

(b)
$$f_L(s) = \frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)},$$

(c)
$$f_L(s) = \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)},$$

(d)
$$f_L(s) = \frac{1}{s^3+s^2+s+1},$$

Dica: use o teorema do desenvolvimento de Heaviside: se $P(s)$ e $Q(s)$ são polinômios tal que grau P(s) > grau Q(s), e se todas as raízes r_i de $Q(s)$ forem simples, então
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(r_i)}{Q'(r_i)} e^{r_i t},$$

(e)
$$F(s) = \frac{s}{(s^2+k^2)^2},$$

Dica: use a propriedade de convolução (119).

18. A equação de movimento de um oscilador harmônico amortecido, sob o qual age uma força impulsiva em $t = 2$, é
$$y'' + 3y' - 10y = 4\delta(t-2),$$
com $y(0) = 2$ e $y'(0) = -3$.

(a) Mostre que a transformada de Laplace da solução é
$$y_L(s) \equiv \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{4e^{-2s}+2s+3}{s^2+3s-10} = e^{-2s}\frac{4}{7}\left(\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+5}\right),$$

(b) Mostre que a transformada inversa, ou seja, a solução do problema de valor inicial, é
$$y(t) = e^{2t} + e^{-5t} + \frac{4}{7}H(t-2)\left[e^{2(t-2)} - e^{-5(t-2)}\right].$$

19. Resolva, usando transformadas de Laplace, os seguintes problemas de valores iniciais (os primos significam derivadas em relação ao tempo):

(a)
$$y'' + 2y' + 5y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

(b)
$$y'' + y' = e^{-2t}\sin t, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

(c)
$$y'' + 4y = \cos t, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2,$$

(d)
$$y'' + 4y' + 13y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2,$$

(e)

$$y'' + 4y = 3\,[H(t-1) - H(t-(1+2\pi))]\sin(t-1), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

(f)

$$y'' + y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

$$f(t) = \begin{cases} (3/10)t & \text{se } 0 \le t \le 10; \\ 3 & \text{se } t > 10. \end{cases}$$

(g)

$$2y'' + 4y' + 10y = \delta(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

(h)

$$y'' + 4y = 8\delta(t - 2\pi), \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0,$$

(i)

$$y'' + 110y' + \frac{1}{0,001}y = 90\delta(t-1), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 90,$$

20. Calcule a transformada de Fourier das seguintes funções

(a)

$$f(x) = \frac{a}{x^2 + a^2}, \qquad (a > 0),$$

(b)

$$f(x) = e^{-\gamma|x|}$$

Dica: use simetria das funções e integre por partes.

(c) $f(x) = \chi_{[-a,+a]}(x)$, onde a função característica é definida como

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in I; \\ 0 & \text{se } x \notin I. \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } |x| \le 1; \\ 0 & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

21. Resolva, usando transformadas de Fourier, a equação diferencial de um oscilador harmônico amortecido e forçado

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

onde $\omega_0 > \alpha > 0$, e

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & \text{se } |t| < \tau; \\ 0 & \text{se } |t| \ge \tau. \end{cases}$$

22. Podemos definir a semi-largura de uma gaussiana como a abscissa de um ponto cuja ordenada é $1/e$ o valor máximo da função. Aplicando essa idéia às gaussianas (139) e (140) mostre que o produto das larguras é $\Delta x \Delta k = 8$. Da relação de De Broglie, mostre que isso implica na seguinte forma do princípio da incerteza $\Delta x \Delta p = 8\hbar$.

23. Obtenha, usando resíduos, a transformada inversa de Fourier de

$$f_F(k) = \frac{1}{k^2 - 2ibk - a^2 - b^2}.$$

24. A equação de Schrödinger para uma partícula livre em três dimensões é

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t),$$

onde Ψ é a função de onda. Considere a seguinte condição inicial:

$$\Psi(\mathbf{r},t=0) = \Psi_0(\mathbf{r}).$$

Resolva a equação de Schrödinger, usando transformadas de Fourier para a parte espacial e integração direta para a parte temporal. Mostre que a solução pode ser colocada na seguinte forma

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \int d^3r' G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t=0)\Psi(\mathbf{r}',t=0),$$

onde

$$G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t=0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-i\omega(k)t}$$

é o chamado *propagador*, para

$$\omega(k) = \frac{\hbar^2k^2}{2m}.$$

Referências

[1] P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics* (Clarendon Press, Oxford, 1947)

[2] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Vols. 1-2 (Hermann, Paris, 1950-1951).

[3] I. M. Gel'fand e G. E. Shilov, *Generalized functions*, Vols. 1-5 (Academic Press, New York, 1966-1968).

[4] E. Butkov, *Física Matemática* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1978).

[5] G. B. Arfken e H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 5a. Ed. (Harcourt, San Diego, 2001).