Introdução à Dinâmica Não-Linear e Caos

Ricardo Luiz Viana
Departamento de Física
Universidade Federal do Paraná
Curitiba, Paraná, Brasil

13 de janeiro de 2023

Sumário

1 Sistemas Dinâmicos **11**

1.1 Objeto da Dinâmica Não-Linear 11
1.2 Modelos de crescimento populacional 13
1.2.1 O mapa logístico 13
1.2.2 Dinâmica do mapa logístico 14
1.2.3 Comportamento caótico 16
1.3 O problema de três corpos 18
1.3.1 Determinismo Laplaciano 19
1.3.2 Poincaré e o problema de três corpos 20
1.4 Dinâmica Não-Linear em Circuitos eletrônicos 22
1.4.1 A equação de Van der Pol 23
1.4.2 A dinâmica da equação de Van der Pol 26
1.4.3 Caos num circuito eletrônico 29
1.5 Lorenz e o *efeito borboleta* 32
1.5.1 Experimento de Bénard 33
1.5.2 O atrator borboleta 35
1.6 Caos e Turbulência 37

2 Mapas unidimensionais **41**

2.1 Mapas unidimensionais lineares 41
2.2 Pontos fixos 42
2.3 Mapa logístico 44
2.4 Mapa da tenda 47
2.5 Imagens diretas e inversas 48
2.6 Estabilidade dos pontos fixos 49
2.6.1 Mapa logístico 50
2.7 Órbitas periódicas 51
2.8 Estabilidade das órbitas periódicas 53
2.8.1 Mapa logístico 55
2.9 Bifurcações em mapas unidimensionais 56
2.9.1 Bifurcação transcrítica 57
2.9.2 Bifurcação tangente 59
2.9.3 Bifurcação forquilha 60

2.9.4 Bifurcações de duplicação do período 62
2.10 Bifurcações de duplicação do período no mapa logístico . . . 65
2.11 Cascata de bifurcações de duplicação de período 67
2.11.1 Primeira constante de Feigenbaum 69
2.11.2 Segunda constante de Feigenbaum 70
2.12 Universalidade 72
2.13 Auto-similaridade e renormalização 74
2.13.1 Equação de Feigenbaum-Cvitanovic 77
2.14 Problemas 79

3 Caos em mapas unidimensionais **81**
3.1 Aperiodicidade 81
3.2 Sensibilidade às condições iniciais 84
3.3 Expoente de Lyapunov 86
3.4 Caos em mapas lineares por partes 89
3.4.1 Representação no sistema binário 89
3.4.2 Mapa do deslocamento 90
3.4.3 Propriedades do mapa do deslocamento 92
3.4.4 Caos forte 93
3.5 Densidade invariante 97
3.5.1 Equação de Frobenius-Perron 98
3.6 Densidade invariante para o mapa logístico 100
3.7 Medida natural e ergodicidade 102
3.8 Função de auto-correlação 105
3.9 Janelas periódicas 107
3.9.1 Sequência-U 108
3.9.2 Derivada Schwarziana 110
3.9.3 Ordenamento de Sharkowsky 111
3.10 Janela de período 3 e intermitência 112
3.11 Mecanismo da intermitência 115
3.12 Crise 117
3.12.1 Transientes caóticos no mapa logístico 117
3.12.2 Mecanismo da crise 118
3.12.3 Teoria para a duração do transiente caótico 120
3.13 Problemas 121

4 Mapas bidimensionais **123**
4.1 Mapas bidimensionais lineares 123
4.2 Estabilidade do ponto fixo em mapas lineares 125
4.2.1 Autovalores reais e distintos 126
4.2.2 Autovalores complexos 127
4.3 Autovalores reais e iguais 129
4.4 Exemplos 129
4.4.1 Nó estável 129

4.4.2 Nó instável 131
4.4.3 Ponto de sela 132
4.4.4 Centro 134
4.4.5 Focos estável e instável 135
4.5 Critério geral de estabilidade 136
4.6 Mapas bidimensionais não-lineares 138
4.6.1 O mapa de Hénon 139
4.7 Estabilidade dos pontos fixos 141
4.7.1 Pontos fixos hiperbólicos 142
4.8 Estabilidade dos pontos fixos do mapa de Hénon 144
4.8.1 Autovalores e autovetores da matriz Jacobiana 145
4.9 Órbitas periódicas 147
4.9.1 Órbitas periódicas do mapa de Hénon 147
4.10 Estabilidade de órbitas periódicas 149
4.10.1 Estabilidade do 2-ciclo do mapa de Hénon 150
4.11 Iterações diretas e inversas 151
4.12 Direções e curvas invariantes 153
4.12.1 Direções invariantes 153
4.13 Curvas invariantes 154
4.14 Curvas invariantes instáveis para o mapa de Hénon 156
4.15 Problemas 159

5 Caos em mapas bidimensionais **161**
5.1 Diagrama de bifurcação para o mapa de Hénon 161
5.2 Sistemas conservativos e dissipativos 163
5.3 Atratores 165
5.4 Atrator caótico do mapa de Hénon 166
5.5 Expoentes de Lyapunov 170
5.6 Determinação numérica dos expoentes de Lyapunov 172
5.7 Mapa da ferradura de Smale 175
5.8 Dinâmica simbólica na ferradura de Smale 179
5.9 Pontos homoclínicos 182
5.10 A ferradura de Smale e o emaranhado homoclínico 184
5.11 Pontos homoclínicos no atrator caótico de Hénon 185
5.12 Crise de fronteira 187
5.12.1 Tangência heteroclínica 188
5.12.2 Tangência homoclínica 188
5.13 Teoria para os expoentes críticos 191
5.14 Crise interior 193
5.14.1 Crise de fusão de atratores 194
5.15 Controle de caos 195
5.15.1 Método OGY 195
5.15.2 Implementação do método OGY 197
5.16 Aplicação ao mapa de Hénon 199

5.17 Problemas 201

6 Fractais **203**
6.1 Dimensão de contagem de caixas 203
6.2 Exemplos de fractais 205
6.2.1 Conjunto de Cantor 205
6.2.2 Medida de Lebesgue 206
6.2.3 Triângulo de Sierpinski 207
6.2.4 Curva de Koch 208
6.3 Conjuntos de Cantor na Dinâmica Não-Linear 210
6.3.1 Transiente caótico no mapa logístico 210
6.3.2 Conjunto de Cantor no atrator do mapa do padeiro . 212
6.4 Atratores estranhos 215
6.4.1 Atrator do mapa do padeiro 215
6.4.2 Atrator caótico de Hénon 216
6.5 Dimensão de Lyapunov 217
6.6 Fractais gordos 219
6.6.1 Medida de grão grosso 220
6.6.2 Intervalo de parâmetros caóticos no mapa logístico . 222
6.7 Bacias fractais de atração 223
6.7.1 Determinação numérica 223
6.7.2 Dimensão de incerteza 225
6.7.3 Fronteiras de bacia fractais 227
6.8 Os conjuntos de Julia e Mandelbrot 229
6.8.1 O conjunto de Julia 229
6.8.2 Exemplos de conjuntos de Julia 231
6.8.3 Conjuntos de Julia conexos e desconexos 233
6.8.4 O conjunto de Mandelbrot 235
6.9 Problemas 236

7 Fluxos unidimensionais **239**
7.1 Fluxos unidimensionais 239
7.2 Estabilidade dos pontos de equilíbrio 240
7.3 A equação logística 242
7.3.1 Crescimento Malthusiano e logístico 243
7.3.2 Dinâmica da equação logística 245
7.4 Teorema de existência e unicidade 246
7.5 Bifurcações em fluxos unidimensionais 247
7.5.1 Bifurcação nó-sela 247
7.5.2 Bifurcação transcrítica 248
7.5.3 Bifurcação forquilha 249
7.6 Soluções numéricas 250
7.6.1 Método de Euler 251
7.6.2 Método de Runge-Kutta 252

7.7 Osciladores de fase 253
7.8 Oscilador não-uniforme 253
7.9 Oscilador de fase com perturbação externa periódica 255
7.9.1 Batimentos e quase-periodicidade 257
7.10 Problemas 259

8 Fluxos bidimensionais **261**
8.1 Fluxos bidimensionais lineares 261
8.2 Estabilidade dos pontos de equilíbrio 262
8.2.1 Autovalores reais e distintos 263
8.2.2 Autovalores complexos 264
8.2.3 Autovalores reais e iguais 265
8.3 Critério geral de estabilidade 266
8.4 Exemplos 267
8.5 Fluxos bidimensionais não-lineares 270
8.5.1 Estabilidade do ponto de equilíbrio 270
8.6 Equação de Duffing 272
8.6.1 Efeito de um termo dissipativo 274
8.7 Pêndulo 275
8.8 Trajetórias fechadas 278
8.9 Critérios para trajetórias fechadas 280
8.9.1 Critério de Bendixson 280
8.9.2 Critério de Dulac 281
8.9.3 Critério do índice 281
8.10 Teorema de existência e unicidade 283
8.11 Pontos fixos hiperbólicos 284
8.12 Curvas invariantes 285
8.13 Trajetórias homoclínicas e heteroclínicas 286
8.14 Bifurcação de Hopf 289
8.15 Problemas 290

9 Fluxos tridimensionais **293**
9.1 Fluxos tridimensionais lineares 293
9.1.1 Estabilidade do ponto de equilíbrio na origem 294
9.2 Sub-espaços invariantes 295
9.3 Solução do fluxo linear 296
9.3.1 Três autovalores reais e distintos 297
9.3.2 Dois autovalores complexos e um real 300
9.3.3 Dois autovalores reais repetidos e outro distinto . . . 302
9.4 Fluxos tridimensionais não-lineares 304
9.4.1 Variedades invariantes 305
9.4.2 O sistema de Rössler 306
9.5 Sistema de Lorenz 309
9.5.1 Ponto de equilíbrio central 309

9.5.2 Pontos de equilíbrio excêntricos 310
9.5.3 Bifurcação de Hopf 311
9.6 Fluxos no espaço de fase 312
9.6.1 Atratores no sistema de Lorenz 313
9.7 Expoentes de Lyapunov 314
9.8 Determinação numérica dos expoentes de Lyapunov 316
9.8.1 Caso de um fluxo tridimensional 317
9.9 Tipos de atratores 319
9.10 Atratores caóticos 321
9.11 Mapas de Poincaré 323
9.12 Mapas estroboscópicos 326
9.13 Determinação analítica do mapa estroboscópico 331
9.13.1 Obtenção do mapa 333
9.13.2 Casos particulares 335
9.14 Problemas 337

A A função delta de Dirac **339**
A.1 Definição 339
A.2 Propriedades 339
A.3 Representações 340

B Espectros de potência **343**
B.1 Transformada de Fourier 343
B.2 Transformada de Fourier discreta 347

Capítulo 1

Sistemas Dinâmicos

O objetivo desta Introdução é apresentar, de uma forma concisa, alguns conceitos e métodos básicos da Dinâmica Não-Linear, para dar ao leitor uma visão abrangente dos assuntos desenvolvidos neste livro. Começaremos nossa exposição por um exemplo de sistema dinâmico simples, mas cuja dinâmica apresenta aspectos bastante curiosos, que é baseada num modelo de crescimento populacional. Neste exemplo, o conceito de caos aparecerá como um destes comportamentos possíveis. A dinâmica, propriamente dita, enquanto parte da Mecânica, também oferece um grande número de problemas não-lineares, cujas soluções são igualmente ricas em fenômenos periódicos e caóticos, como o pêndulo amortecido e periodicamente forçado. Como terceiro exemplo motivador, apresentaremos um circuito eletrônico não-linear relativamente simples de construir, onde o comportamento caótico pode ser observado tanto na simulação computacional quanto em laboratório. Na sequência, abordaremos um problema de interesse prático relacionado à previsão do tempo, e como a investigação desse fenômeno levou a um sistema não-linear onde o comportamento caótico foi observado, e que despertou a atenção da comunidade científica pelo assunto. Finalizaremos este capítulo introdutório fazendo um breve histórico da Dinâmica Não-linear.

1.1 Objeto da Dinâmica Não-Linear

A Dinâmica Não-Linear estuda sistemas de equações de evolução temporal, ou seja, equações onde o tempo é uma variável independente. Dependendo do contexto, o tempo pode ser uma variável discreta, assumindo apenas valores inteiros, ou contínua, podendo ter qualquer valor real. No primeiro caso, teremos equações a diferenças finitas, enquanto no segundo, equações diferenciais ordinárias. As propriedades matemáticas destes dois tipos básicos de sistemas dinâmicos têm algumas semelhanças, mas são distintas o suficiente para que devam ser tratadas separadamente, o que

faremos neste trabalho.

Se as equações de evolução temporal (tanto discreto como contínuo) forem lineares, é possível obter soluções gerais que nos permitem determinar o comportamento futuro do sistema descrito de forma exata, em função do estado atual do sistema. Já se as equações forem não-lineares, essas soluções exatas, em geral, não existem numa forma fechada. Uma série de comportamentos, alguns deles bastante complicados, podem aparecer quando estudamos a evolução temporal de sistemas descritos por equações não-lineares: órbitas periódicas e quase-periódicas, ciclos-limite, transientes, e caos.

A Dinâmica Não-Linear concentra-se no comportamento a longo prazo do sistema que está sendo estudado. O comportamento futuro a curto prazo, normalmente, pode ser obtido por solução numérica (computacional) das equações de evolução. No entanto, estamos particularmente interessados em estudar propriedades gerais, como equilíbrio, estabilidade, tipos de convergência ou divergência, etc. Para isso empregamos uma abordagem geométrica da dinâmica, que traduz a diversidade de soluções das equações de evolução em trajetórias num espaço abstrato com um número arbitrariamente grande de dimensões. Foi Henri Poincaré, no final do Século XIX, que introduziu muitas dessas ideias, e que são utilizadas até hoje na descrição dos sistemas dinâmicos não-lineares.

O campo de aplicações da Dinâmica Não-Linear é muito extenso pois abrange qualquer sistema físico, biológico, econômico, etc. que possa ser descrito por equações de evolução. Na física, por exemplo, a dinâmica de partículas e corpos rígidos apresenta uma série de exemplos interessantes de sistemas dinâmicos não-lineares. As equações que descrevem circuitos elétricos com componentes não-lineares, como diodos e transistores, também aparecem em estudos de dinâmica não-linear. De forma geral, fluidos são sistemas de interesse físico que podem ser descritos pela Dinâmica Não-linear, numa abordagem que complementa e estende o seu tratamento tradicional usando a Mecânica dos Meios Contínuos.

Mas as idéias de dinâmica podem também ser aplicadas, com sucesso, no estudo de fenômenos biológicos, como o crescimento de uma população de bactérias, ou do número de células de um tumor canceroso, ou ainda do número de indivíduos infectados por uma doença contagiosa, apenas para dar alguns exemplos. Mesmo em ciências sociais, como a Economia, o modelamento matemático da evolução de preços de um dado bem, ou de índices macroeconômicos como taxas de inflação e desemprego, também recaem com frequência em sistemas dinâmicos não-lineares. A Dinâmica Não-Linear, embora tenha bases matemáticas sólidas, é uma área eminentemente interdisciplinar, e que portanto também é necessária na formação especializada de diversos profissionais, como na Física, Química, Biologia, Economia, Ecologia, Meteorologia, Engenharias, etc.

1.2 Modelos de crescimento populacional

Uma aplicação bastante interessante da dinâmica são modelos de crescimento populacional. Em algumas espécies, como a nossa, o crescimento populacional é um processo contínuo e há uma superposição de gerações, donde os modelos matemáticos mais apropriados são as equações diferenciais. Em outras espécies, sobretudo de insetos, as gerações não apresentam este tipo de superposição.

1.2.1 O mapa logístico

Vamos, portanto, considerar uma dada espécie de insetos que põem ovos no outono, por exemplo. Na primavera os insetos de uma geração saem desses ovos e têm seu ciclo de vida: alimentam-se, crescem, amadurecem, acasalam, põem ovos e morrem, antes que surjam os indivíduos da geração seguinte. Se as condições exteriores se mantiverem inalteradas, como o clima e a população de predadores, é razoável supor que a população numa dada geração é função apenas da população na geração anterior. Nesse tipo de problemas será conveniente discretizar o tempo como um número inteiro, representando o número de cada geração: $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Representaremos pelo símbolo P_n o tamanho da população, medido em número de indivíduos, da geração caracterizada pelo instante n. Quando a população é pouco numerosa, a cada geração n a população aumenta de uma quantidade R, que é a taxa de crescimento da população, igual à diferença entre a taxa de natalidade e mortalidade. Se a primeira é maior do que a segunda (nascem mais indivíduos do que morrem), a taxa R é positiva; caso contrário R é negativa. Logo, a população numa geração $n+1$ é dada, em função da população na geração anterior n, pela relação

$$P_{n+1} = P_n + RP_n = (1+R)P_n = rP_n \tag{1.1}$$

onde $r = R + 1$. Assim $r > 1$ se a taxa de crescimento for positiva, e $r < 1$ caso seja negativa.

Relações a tempo discreto como (1.1), na forma geral

$$P_{n+1} = f(P_n), \tag{1.2}$$

são chamadas equações a diferenças finitas ou também *mapeamentos* (que é um sinônimo de função). Uma corruptela deste último termo é a palavra *mapa*, que será usada doravante nesta acepção. Por exemplo, se $P_1 = f(P_0)$ podemos dizer que P_0 é mapeado em P_1 pela função f, da mesma forma que $P_2 = f(P_1)$, e assim por diante. Os mapas são sistemas dinâmicos, pois permitem-nos prever o estado futuro do sistema (no caso a população dos insetos), conhecido o seu estado presente (a população inicial).

No caso de (1.1), dada uma população inicial P_0, a população no tempo $t = 1$ será $P_1 = rP_0$; no tempo seguinte será $P_2 = rP_1 = r^2P_0$, etc. Num tempo n qualquer a população será

$$P_n = r^n P_0. \tag{1.3}$$

Com uma taxa de crescimento positiva teremos $r > 1$, de modo que r^n cresce ilimitadamente à medida em que o tempo n aumenta. Isso significa que, seja qual for a população inicial P_0, o número de indivíduos aumentará exponencialmente com o tempo, produzindo rapidamente uma superpopulação. Por outro lado, uma taxa de crescimento negativa ($r < 1$) fará com que a população diminua com o tempo até sua extinção.

Na verdade, há vários fatores que limitam o número de indivíduos que podem coabitar em uma região geográfica limitada, e com uma capacidade limitada de produção de alimentos. Uma forma de se exprimir essa tendência à saturação populacional consiste em supor que a taxa de crescimento não seja constante, mas sim diminuiria à medida em que a população atingisse um valor limite K, chamada capacidade de sustentação, que é a população máxima que um dado ambiente pode sustentar em termos de recursos naturais

$$r \to r\left(1 - \frac{P_n}{K}\right), \tag{1.4}$$

de modo que, caso a população atingisse esse valor limite ($P_n = K$) a taxa de crescimento seria nula. Substituindo (1.4) em (1.3) teremos

$$P_{n+1} = rP_n\left(1 - \frac{P_n}{K}\right), \tag{1.5}$$

de forma que o crecimento passa a ser limitado, o que foi proposto em 1844 por Pierre Verhulst no contexto da chamada equação diferencial logística, que tem em (1.5) sua versão a tempo discreto. [1]

Definimos uma população reduzida dividindo-a pelo seu valor máximo K,

$$x_n \equiv \frac{P_n}{K}, \tag{1.6}$$

Desta forma, enquanto P_n mede-se em número de habitantes, x_n torna-se uma quantidade adimensional tal que $0 \leq x_n \leq 1$. Obtemos, então, o chamado *mapa logístico* [2]

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n). \tag{1.7}$$

1.2.2 Dinâmica do mapa logístico

A dinâmica de mapas unidimensionais, como o mapa logístico, é o objeto dos Capítulos 2 e 3 deste trabalho. No entanto, é interessante desde já examinarmos algumas das principais características da evolução temporal por ele descrita, como a existência de soluções periódicas e caóticas.

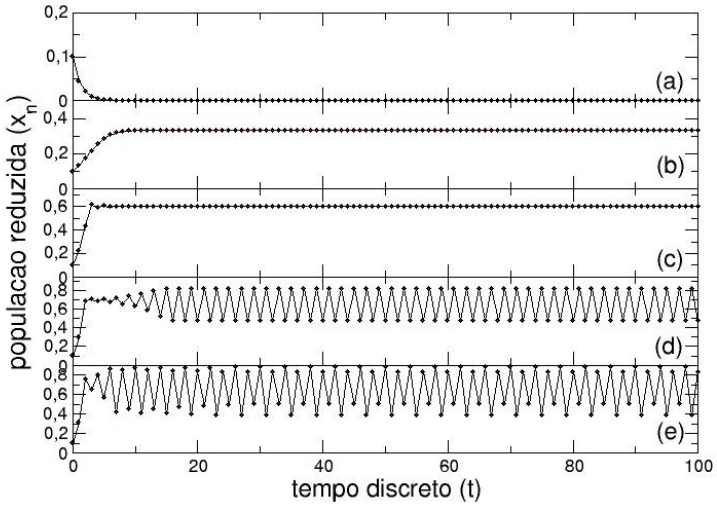

Figura 1.1: Gráfico das 100 primeiras iterações do mapa logístico (1.7) para $x_0 = 0,1$ e (a) $r = 0,5$; (b) $1,5$; (c) $2,5$; (d) $3,3$; (e) $3,5$.

Dada uma população inicial (em termos da fração da população máxima x_n) e do valor do parâmetro r, é possível obter a população nos períodos seguintes iterando a relação (1.7). Por exemplo, quando $r = 0,5$ e $x_0 = 0,1$ (10% da população máxima), o gráfico das 100 primeiras iterações, mostrado na Fig. 1.1(a), mostra que a população vai diminuindo com o tempo até chegar a zero. De fato, o valor $r = 0,5$ corresponde à uma taxa de crescimento negativa $R = r - 1 = -0,5$, indicando que a mortalidade é maior do que a natalidade nesta espécie, o que a leva à extinção com o passar do tempo. Este valor nulo da população é chamado ponto fixo do mapa, pois a aplicação de f neste ponto devolve o seu valor a cada iteração:

$$f(0) = 0, \qquad f(0) = 0, \qquad f(0) = 0, \cdots$$

Aumentando o valor do parâmetro r para $1,5$ a população, começando com o mesmo valor $x_0 = 0,1$, inicialmente exibe um crescimento que vai rapidamente convergindo para um valor constante $x^* = 1/3$ [Fig. 1.1(b)]. O novo valor de equilíbrio também é um ponto fixo do mapa logístico pois, para $r = 1,5$, o mapa logístico (1.7) fornece

$$f(x^*) = x^*, \qquad f(x^*) = x^*, \qquad f(x^*) = x^*, \cdots$$

Mas, nesse caso, o que ocorreu com o ponto fixo anterior, que representava a extinção da espécie? No Capítulo 2, mostraremos que ele não mais

é observado pois tornou-se instável, de maneira que qualquer população afasta-se rapidamente desse ponto fixo, aproximando-se do novo valor $x = 1/3$ (que é estável). Com efeito, sendo a taxa de crescimento $R = 0,5$ positiva (natalidade superando mortalidade) a população tem um aumento controlado e atinge um valor estacionário da ordem de um terço da população máxima. A existência dessa população estacionária se explica pelo equilíbrio entre natalidade e mortalidade da espécie.

Se r aumenta para $2,5$ essencialmente o mesmo comportamento é observado, com a diferença que a convergência ao valor de equilíbrio da população (que é, agora, $x = 0,6$) sofre uma ligeira oscilação, havendo valores alternadamente maiores e menores que ele [Fig. 1.1(c)]. A diferença entre uma convergência monotônica e oscilatória ao valor de equilíbrio também pode ser explicada, como será mostrado no próximo Capítulo.

Já para $r = 3,3$, ao invés de um único valor de equilíbrio da população, esta oscila entre dois valores da ordem de $x_0^* = 0,480$ e $x_1^* = 0,824$ [Fig. 1.1(d)]. Este é um exemplo de uma órbita periódica, ou ciclo, de período 2: as aplicações sucessivas do mapa logístico produzem uma alternância entre estes dois valores:

$$f(x_0^*) = x_1^*, \qquad f(x_1^*) = x_0^*, \qquad f(x_0^*) = x_1^*, \cdots$$

representando uma população que varia ciclicamente com o tempo. Este tipo de comportamento cíclico é observado em algumas espécies animais [3].

O segundo ponto fixo que havia sido observado anteriormente também torna-se instável, a partir de um dado valor de r, com a emergência desta órbita de período 2. Há, aqui, a ocorrência de uma bifurcação de duplicação de período, outro assunto a ser esmiuçado no Capítulo 2. Novas bifurcações deste tipo são observadas na medida em que r aumenta seu valor. Por exemplo, para $r = 3,5$ aparece um ciclo que se repete após quatro tempos, ou seja, uma órbita periódica de período 4 [Fig. 1.1(e)]. Na verdade, há uma cascata infinita desse tipo de bifurcações, levando a ciclos de período cada vez maior. No limite, estas bifurcações acumulam-se rapidamente num certo valor $r_\infty \approx 3,56995$, acima do qual o comportamento da população deixa de ser periódico.

1.2.3 Comportamento caótico

O que acontece para $r \approx 3,57$? Um exemplo pode ser visto na Figura 1.2(a), onde as 100 primeiras iterações do mapa logístico para $r = 3,6$ são mostradas, para uma condição inicial $x_0 = 0,1$. Para este valor não se observa nenhum padrão repetitivo dos ciclos anteriormente mencionados. Se continuarmos a iterar o mapa logístico para tempos arbitrariamente grandes, continuaremos a observar este comportamento, o que sugere ser a evolução aperiódica, ou seja, sem periodicidade evidente.

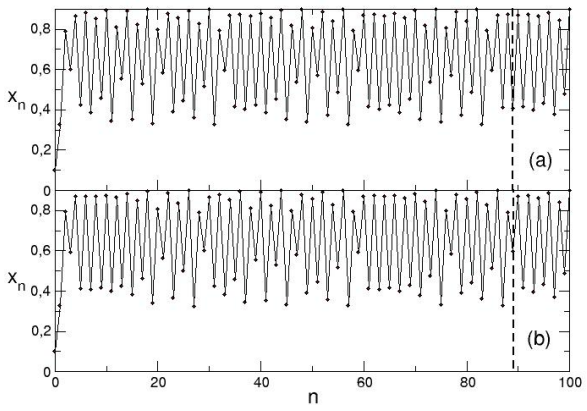

Figura 1.2: Gráfico das 100 primeiras iterações do mapa logístico (1.7) para $r = 3,6$ e (a) $x_0 = 0,1000$ e (b) $0,1001$.

A existência de comportamentos aperiódicos costuma ser associada a processos estocásticos, onde não há uma equação determinística que gere o processo, e sim um conjunto de regras de natureza probabilística, dando origem a uma evolução aleatória. Um exemplo clássico de processo estocástico é o problema do caminho aleatório: um indivíduo se desloca sobre uma reta, a partir da origem, dando passos de comprimentos iguais tanto para a direita como para a esquerda. A probabilidade do indivíduo dar um passo à direita é p, e a respectiva probabilidade para um passo à esquerda será, portanto, $1-p$. O dado fundamental neste problema é que cada passo é completamente independente do passo anterior, de forma que o problema do caminho aleatório não é um sistema dinâmico determinístico, e sim um processo estocástico denominado *cadeia de Markov*.

Se fizermos um gráfico do valor da posição do indivíduo (medido em múltiplos do tamanho do passo) em função do tempo, obteremos uma evolução bastante parecida com aquela observada para o mapa logístico no caso $r = 3,6$. No entanto, como o mapa logístico é um sistema determinístico, a evolução aperiódica da variável não é resultado de um processo semelhante ao do caminho aleatório. Uma das diferenças entre estas duas situações é a influência das condições iniciais no comportamento futuro do sistema.

Para ilustrar esta influência, a Fig. 1.2(a) mostra a evolução temporal dos valores de x para uma condição inicial $x_0 = 0,1000$. Na Fig. 1.2(b), as mesmas iterações são mostradas para uma condição inicial ligeiramente diferente $x'_0 = 0,1001$. Para termos uma ideia do que isso significa, no con-

texto do modelo de crescimento populacional que deu origem ao mapa logístico, vamos supor que a população máxima compatível com o ambiente seja de $K = 10000$ indivíduos. Então, de (1.6), a diferença entre as duas condições iniciais representa

$$\left(x'_0 - x_0\right) K = (0,1001 - 0,1000) \times 10^4 = 10^{-4} \times 10^4 = 1,$$

ou seja, apenas um indivíduo! Isso significa que a diferença entre as condições iniciais poderia ser atribuída a uma incerteza experimental na contagem dos indivíduos. Assim, na prática, não é possível realmente distinguir estas duas condições iniciais.

Comparando as Figs. 1.2(a) e (b), vemos que as iterações do mapa obtidas a partir de ambas condições iniciais, passam a diferir consideravelmente a partir do instante $n \sim 90$. Neste ponto, em particular, a população reduzida, para a primeira condição inicial, é de $\sim 0,4$; enquanto para a segunda, é $\sim 0,6$, uma diferença significativa de 20%. Portanto, um erro observacional na contagem de apenas um indivíduo no instante inicial, provoca uma incerteza relativamente grande após um certo tempo.

Este é um exemplo do que denominamos *dependência sensível às condições iniciais*: duas condições iniciais, originalmente muito próximas, geram evoluções que diferem progressivamente com o passar do tempo. A dependência sensível às condições iniciais é exclusivamente aplicada a sistemas dinâmicos determinísticos: processos estocásticos não exibem essa sensibilidade às condições iniciais.

Entendemos como caos a combinação de um comportamento aperiódico e a dependência sensível às condições iniciais. Sob este aspecto a evolução temporal observada no mapa logístico para $r = 0,6$ é caótica. Como uma condição inicial x_0 será sempre eivada de algum nível de incerteza (experimental ou numérica), a dependência sensível às condições iniciais faz com que seja virtualmente impossível prever com exatidão controlada o estado do sistema para tempos arbitrariamente grandes. O estudo de caos em mapas unidimensionais, de forma geral, será objeto do Capítulo 3 deste trabalho.

1.3 O problema de três corpos

Uma das primeiras e mais importantes aplicações da Dinâmica resultou do emprego da expressão Newtoniana para a força de atração gravitacional entre duas partículas de massas m_i e m_j[3]

$$\mathbf{F}_{ij} = G \frac{m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}, \tag{1.8}$$

onde $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{r}_j$ são as respectivas posições, e G é a constante gravitacional. As equações de movimento para um sistema de N partículas que interagem

por forças gravitacionais, obtidas a partir da segunda lei de Newton,

$$m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \mathbf{F}_{ij}, \qquad (i = 1, 2, \ldots N), \tag{1.9}$$

constituem um formidável conjunto de equações diferenciais não-lineares acopladas, também conhecido por problema de N corpos, e cuja solução é um dos objetivos centrais da Mecânica Celeste.

1.3.1 Determinismo Laplaciano

Sabemos que o caso particular de dois corpos ($N = 2$) tem uma solução exata, ou seja, podemos prever de maneira exata as posições e velocidades de cada partícula para quaisquer tempos: futuros ($t > 0$) ou passados ($t < 0$) [vide [2]]. Já o problema de três corpos ($N = 3$) não tem esta propriedade: não é mais possível obter, em geral, uma expressão fechada para as posições e velocidades dos três corpos em função do tempo. Uma aplicação deste problema é o sistema formado pelo Sol e dois planetas gigantes como Júpiter e Saturno orbitando em torno dele. As dificuldades aparecem na interação mútua entre Júpiter e Saturno, a qual interfere nas órbitas de ambos.

O próprio Newton já havia estudado o efeito da atração Solar e Terrestre sobre o movimento Lunar. O problema de três corpos tem alguns casos particulares onde soluções são conhecidas. Euler, em 1767, encontrou soluções quando as três partículas são colineares em todos os instantes de tempo. Em 1772, Lagrange obteve soluções nas quais as partículas estão fixas nos vértices de um triângulo equilátero, os chamados "pontos lagrangianos".

De modo geral, para $N \geq 3$, não há soluções exatas para o problema de N-corpos, embora sejam conhecidas algumas soluções analíticas aproximadas. Não obstante, podemos sempre recorrer a métodos numéricos (computacionais) para resolver as equações de movimento de cada partícula, e procurar determinar as suas posições e velocidades para quaisquer instantes de tempo que queiramos, no futuro e no passado.

O sucesso destes procedimentos analíticos e numéricos é atestado pelo grande desenvolvimento da Mecânica Celeste, que permitiu uma grande exatidão nas previsões do comportamento de planetas, estrelas e cometas. Um dos episódios marcantes do sucesso das previsões feitas com o auxílio da Mecânica Celeste foi a descoberta em 1846, por Johann Galle, do planeta Netuno. A existência de Netuno foi matematicamente prevista por Urbain Le Verrier com base no efeito gravitacional que um tal planeta teria sobre a órbita do vizinho planeta Urano [4].

Um grau de confiança tão alto no poder determinístico da Mecânica Newtoniana levou Laplace a afirmar que [cf. [6], pg. 42]

> *Uma inteligência que, para um instante dado, conhecesse todas as forças de que está animada a natureza, e a situação respectiva dos seres que a compões, e se além disso essa inteligência fosse ampla o suficiente para submeter esses dados à análise, ela abarcaria na mesma fórmula os movimentos dos maiores corpos do Universo e os do mais leve átomo: nada seria incerto para ela, e tanto o futuro como o passado estariam presentes aos seus olhos. O espírito humano oferece, na perfeição que foi capaz de dar à astronomia, um pequeno esboço dessa inteligência.*

um ponto de vista também conhecido como *determinismo Laplaciano*, no qual um ente (o "demônio" de Laplace) que conheça precisamente as posições e velocidades de cada átomo do Universo, conhecerá todos os estados passados e futuros a partir das leis da Dinâmica Clássica.

Uma visão completamente determinística do Universo como esta seria contestada ao longo dos séculos XIX e XX por várias concepções alternativas, como a Termodinâmica Estatística e a Mecânica Quântica. Podemos lembrar que Maxwell usou como fundamento da sua Teoria Cinética dos Gases a hipótese da incerteza das velocidades das moléculas de um gás após suas colisões. Décadas mais tarde a descrição quântica proposta por Heisenberg tem na relação de incerteza posição-momentum um obstáculo à própria definição de trajetória de uma partícula.

No entanto, mesmo na sua forma original, o determinismo Laplaciano pode ser contestado pela existência de caos já que, ainda que um sistema caótico possa ser previsível em princípio, na prática ele seria imprevisível devido à dependência sensível às condições iniciais. No final do século XIX, os trabalhos de Henri Poincaré sobre o problema de muitos corpos levaram à descoberta das chamadas *órbitas homoclínicas*, que são uma marca registrada da ocorrência de comportamento caótico.

1.3.2 Poincaré e o problema de três corpos

O trabalho pioneiro de Poincaré foi inspirado por um curioso episódio. Em 1885 foi anunciada pela revista *Acta Mathematica* uma competição internacional, oferecendo uma medalha de ouro e um prêmio de 2500 coroas, em homenagem ao sexagésimo aniversário do Rei Oscar II da Suécia e da Noruega. Uma das questões propostas pelo organizador do concurso, Gustav Mittag-Leffler, a partir de uma sugestão de Carl Weierstrass, foi a seguinte [cf. [4], pg. 147]:

> *Para um sistema com um número arbitrário de massas puntuais que atraem-se mutuamente de acordo com a Lei de Newton, supondo que dois pontos nunca colidem, encontrar uma expansão em série das coordenadas de cada ponto em termos de funções conhecidas do tempo convergindo uniformemente para qualquer período de tempo.*

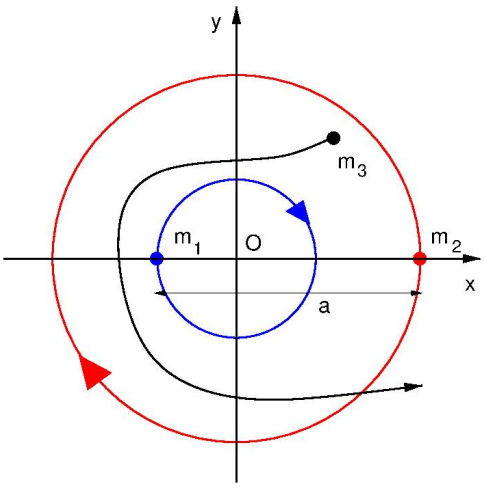

Figura 1.3: Problema restrito dos três corpos no plano

Em outras palavras, pedia-se uma solução para o problema de N corpos em termos de séries perturbativas convergentes para tempos arbitrários. Esta questão não é apenas de interesse acadêmico: se resolvida da maneira proposta, estaria provada a estabilidade do Sistema Solar, por exemplo, já que as posições de todos os planetas poderiam ser conhecidas para quaisquer períodos de tempo.

Como o problema de N corpos é complexo demais para uma abordagem direta, Poincaré se limitou a estudar o problema restrito de três corpos no plano. Neste caso, temos duas partículas que giram em órbitas circulares em torno do seu centro de massa num mesmo plano. Uma terceira partícula tem massa insignificante frente às outras duas, de modo que ela move-se neste plano sob a influência gravitacional das outras, sem contudo influenciar apreciavelmente o movimento delas [Fig. 1.3]. Esta forma do problema pode descrever, por exemplo, o sistema Sol-Terra-Lua e similares, como Sol-Júpiter-asteróides.

O problema restrito de três corpos no plano, ainda que seja relativamente símples, já espelha as dificuldades matemáticas do problema mais geral de N corpos. No transcorrer de seus estudos, Poincaré classificou diferentes tipos de movimentos periódicos presentes no sistema, e introduziu uma série de noções que utilizamos atualmente para estudar sistemas dinâmicos não-lineares, como superfícies de seção, variedades invariantes, e órbitas homoclínicas, que estudaremos mais detalhadamente no Capítulo 4.

Poincaré foi o vencedor da competição, com sua monografia sobre o problema restrito dos três corpos. Ainda que o problema não tenha sido resolvido, de fato, na investigação deste problema Poincaré introduziu idéias

essenciais da Dinâmica Não-Linear, razão pela qual ele é frequentemente referido como o "pai" desta disciplina. Weierstrass, que foi um dos árbitros da competição, escreveu a Mittag-Leffler [4]

> *Pode dizer ao seu soberano que este trabalho não pode, de fato, ser considerado como tendo fornecido a solução completa do problema proposto, mas que é, de qualquer forma, de tal importância que sua publicação irá inaugurar uma nova era na história da Mecânica Celeste. A finalidade que Sua Majestade tinha em mente na abertura da competição pode portanto ser considerada como tendo sido atingida.*

Poincaré publicou, em 1890, uma versão ampliada e corrigida da sa monografia, que é um dos trabalhos fundamentais na história da Dinâmica Não-Linear [8]. Este trabalho inspirou uma série de matemáticos ao longo do século XX, como George Birkhoff, e vários resultados importantes foram obtidos nos anos seguintes.

Até o momento, a questão original proposta no concurso do Rei da Suécia não foi resolvida de forma completa. O problema de N corpos não tem, de maneira geral, soluções analíticas - mesmo aproximadas, na forma de séries infinitas - que possam descrever de maneira completa a evolução do sistema. Mesmo assim, por integração numérica das equações de movimento é possível predizer a trajetória futura dos planetas no Sistema Solar por milhares de anos [7]. Por exemplo, a trajetória de uma sonda espacial enviada a Marte representa um problema de, pelo menos, três corpos - a sonda e os planetas Terra e Marte. A posição da sonda durante a longa viagem a Marte, que dura da ordem de sete meses, é prevista com exatidão pela Mecânica Newtoniana, a despeito do comportamento a tempo infinito ser, a princípio, desconhecido.

A necessidade de empregar métodos computacionais para a solução numérica de equações não-lineares fez com que o desenvolvimento da dinâmica não-linear acompanhasse a evolução da tecnologia da informação. Em 1945 entrou em operação ENIAC, o primeiro computador eletrônico digital programável, tendo como motivação as demandas de cálculo numérico geradas pelo esforço de guerra. Em 1955 Enrico Fermi, John Pasta e Stanislau Ulam realizaram um dos primeiros estudos numéricos utilizando um computador digital de primeira geração (o MANIAC), cujo objetivo era determinar o movimento em uma cadeia de partículas ligadas entre si por molas não-lineares [11].

1.4 Dinâmica Não-Linear em Circuitos eletrônicos

Historicamente, uma das linhas de pesquisa que desaguaram na descrição do comportamento caótico foi o estudo de circuitos eletrônicos não-lineares. Tais circuitos começaram a ser investigados a partir da década de 1920,

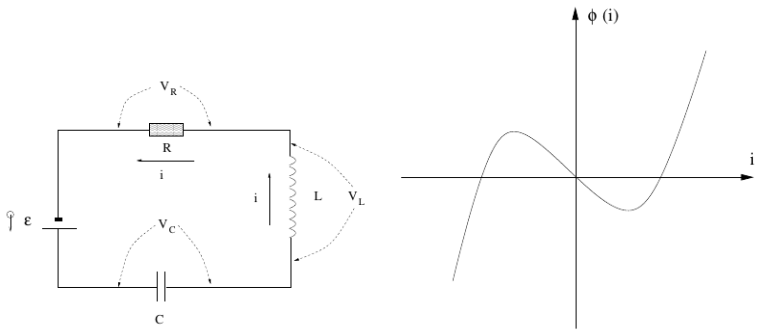

Figura 1.4: (a) Esquema de um circuito eletrônico descrito pela equação de Van der Pol. (b) Curva característica (esquemática) para o elemento não-linear do circuito.

como resultado da invenção das válvulas do tipo triodo, usados como retificadores de corrente em circuitos de rádiocomunicações. A partir de 1920, Balthazar Van der Pol (então chefe dos Laboratórios de Pesquisa da Phillips, em Eindhoven, na Holand) investigou teórica e experimentalmente o comportamento de circuitos eletrônicos com válvulas do tipo triodo, que têm uma resposta tensão-corrente não-linear, e portanto apresentam características distintas de circuitos RLC lineares.

O desenvolvimento do radar estimulou de forma decisiva as pesquisas em circuitos eletrônicos não-lineares. Em 1938, o *Radio Research Board* do Departamento de Pesquisa Científica e Industrial da Inglaterra emitiu um memorandum solicitando a ajuda de matemáticos para certos tipos de equações diferenciais não-lineares associados a circuitos de rádiocomunicação. Esse chamado motivou Mary Cartwright, então na Universidade de Cambridge, a investigar uma equação não-linear proposta por Van der Pol. Juntamente com Littlewood, eles publicaram vários trabalhos nessa linha, estudando soluções periódicas dessa equação na presença de uma tensão periódica externa. Eles também identificaram um comportamento não-periódico, também verificado experimentalmente, e que atualmente associamos ao caos.

1.4.1 A equação de Van der Pol

Na década de 1920, Balthazar Van der Pol investigou o comportamento de circuitos eletrônicos com válvulas do tipo triodo, que são elementos não-lineares usados como retificadores de corrente. O circuito esquematizado na Fig. **??** consiste num capacitor de capacitância C, uma fonte de tensão contínua com força eletromotriz $\mathcal{E}$, um indutor de indutância L e um elemento não-linear.

A corrente na malha é denotada por i, e as quedas de tensão no capacitor, no indutor e no resistor são denotadas v_C, v_L e v_R, respectivamente. Aplicando a regra das malhas temos, então, que

$$\mathcal{E} = v_C + v_L + v_R = \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + v_R, \tag{1.10}$$

onde q é a carga no capacitor e $i = dq/dt$ a corrente no indutor.

Originalmente Van der Pol usou, como elemento não-linear um tubo de vácuo do tipo triodo. Atualmente pode-se substituí-lo por diodos semicondutores, como o diodo túnel ou o diodo Zener. A resistência do elemento não-linear do circuito é especificada pela sua curva característica $v_R = \phi(i)$, onde

$$\phi(i) = -\alpha i + \beta i^2, \tag{1.11}$$

onde α e β são constantes. O termo $-\alpha i$ pode ser interpretado como uma *resistência negativa*, pois para pequenos valores de i o elemento não-linear está fornecendo energia ao sistema, ao invés de dissipá-la em calor, como num resistor convencional. Já para valores maiores de i a resistência torna-se positiva.

Substituindo (1.11) em (1.10) obtemos

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + \phi(i) = \mathcal{E}. \tag{1.12}$$

Derivando esta expressão em relação ao tempo e usando a regra da cadeia obtemos a equação diferencial do circuito

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + (3\beta i^2 - \alpha)\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0. \tag{1.13}$$

Definindo a frequência natural do circuito LC

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{1.14}$$

e introduzindo as seguintes variáveis normalizadas

$$x = i\sqrt{\frac{3\beta}{\alpha}}, \qquad t' = \omega_0 t, \qquad \varepsilon = \frac{\alpha}{\omega_0 L}, \tag{1.15}$$

chegamos à chamada equação de Van der Pol

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \tag{1.16}$$

onde os pontos denotam derivadas em relação ao tempo adimensional t'. Podemos reescrevê-la na forma de um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem em relação ao tempo

$$\dot{x} = y, \tag{1.17}$$

$$\dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \tag{1.18}$$

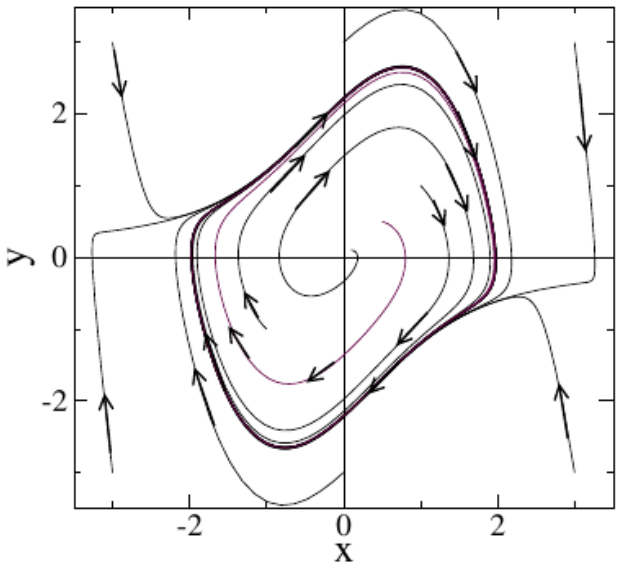

Figura 1.5: Ciclo-limite atrativo no plano de fase (x, y) obtido pela solução numérica do sistema (1.17)-(1.18) com $\varepsilon = 1$ e diversas condições iniciais $(x(0), y(0))$.

A equação de van der Pol não tem solução analítica exata, mas pode ser integrada numericamente, assim como as equações do problema de três corpos e outros sistemas dinâmicos não-lineares. Um exemplo de solução está na Fig. 1.7, que mostra diversas trajetórias no plano de fase $(x(t'), y(t'))$, obtidas a partir de diferentes condições iniciais $(x(0), y(0))$, no caso $\varepsilon = 1$. Observamos a presença de um atrator periódico chamado ciclo-limite. As propriedades deste tipo de trajetória fechada serão estudadas em detalhes no Capítulo 8. O ciclo-limite mostrado na Fig. **??** representa uma oscilação estacionária da corrente no circuito. Esta oscilação resulta do equilíbrio de duas tendências antagônicas: para pequenas correntes a resistência é negativa, fornecendo energia para o circuito, enquanto para correntes maiores domina o termo de resistência positiva, que retira energia do mesmo.

No circuito da Fig. 1.4 a fonte de tensão é contínua. Van der Pol investigou experimentalmente o efeito de uma tensão externa alternada com frequência $\Omega = 2\pi/T_0$. Nesse caso, a equação de Van der Pol forçada será expressa na forma

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = F \sin\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right). \tag{1.19}$$

A integração numérica desta equação revela diversos aspectos interessantes da dinâmica do sistema forçado. Se o período das oscilações T é

próximo, mas não igual ao período T_0 da perturbação (ou algum múltiplo inteiro de T_0), o período T ajusta-se a nT_0, depois de um certo tempo. Van der Pol e Van der Mark, em 1927, observaram experimentalmente este efeito, que chamaram *demultiplicação de frequências*, usando receptores telefônicos para monitorar a resposta do circuito. Entre cada ajuste de T aos múltiplos T_0, $2T_0$, $3T_0$, etc. eles observaram (ouviram) sons irregulares, que atribuíram ao ruido extrínseco associado ao circuito.

Atualmente interpretamos esta como uma manifestação do comportamento caótico da corrente no circuito. Embora o próprio Van der Pol não tenha interpretado matematicamente esta observação de caos no circuito, os seus resultados motivaram vários matemáticos, como M. L. Cartwribht, J. E. Littlewood, e N. Levinson, nos anos 1940's, a investigar a natureza destas soluções caóticos.

1.4.2 A dinâmica da equação de Van der Pol

Depois da normalização que fizemos, o parâmetro ε é o único cujo valor pode ser variado, representando a não-linearidade essencial do circuito. No caso em que $\varepsilon = 0$, a equação de Van der Pol (1.16) reduz-se à equação de um oscilador harmônico linear de frequência unitária:

$$\ddot{x} + x = 0, \tag{1.20}$$

cuja solução é semelhante à da equação do pêndulo simples para pequenas oscilações:

$$x(t) = A cos(t + t_0), \tag{1.21}$$

onde A e t_0 são constantes de integração, cujo valor pode ser obtido a partir das condições iniciais: $(x(0), y(0))$.

Em termos das variáveis originais (1.15), essa solução consiste numa oscilação regular da corrente no circuito, como previámos que aconteceria se não houvesse resistência no circuito LC. Considerando as variáveis dinâmicas $(x(t), y(t))$ podemos interpretar as oscilações nas variáveis x e y como uma curva fechada no gráfico *y versus x*, que aqui tem uma interpretação similar ao plano de fase do pêndulo (*v versus* θ). Assim, para diferentes condições iniciais $(x(0), y(0))$ teremos trajetórias distintas no plano de fase $(x(t'), y(t'))$, graças à conservação da energia eletromagnética. Como sabemos, a energia acumulada no campo elétrico entre as placas do capacitor é transferida ao indutor, pela criação de um campo magnético em seu interior.

A substituição do triodo por um resistor convencional seria responsável por uma solução semelhante à do pêndulo amortecido, na qual a corrente elétrica teria uma amplitude decaindo exponencialmente com o tempo até um valor nulo. No plano de fase $y - x$, diferentes condições iniciais levarão

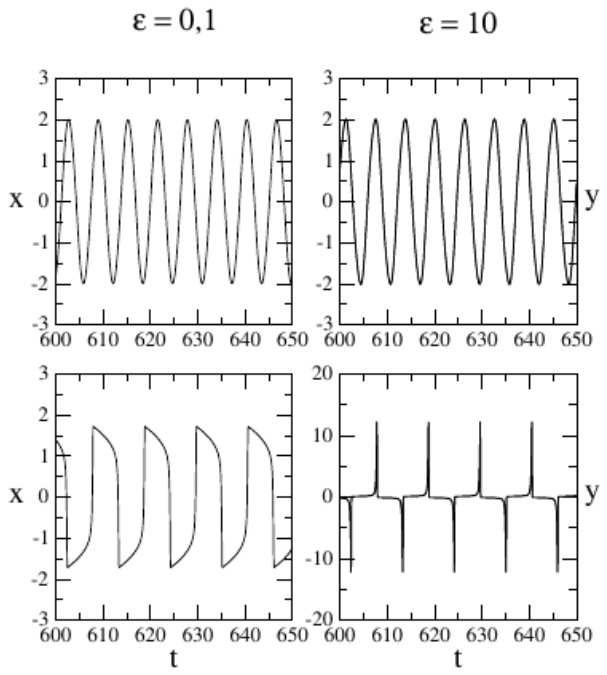

Figura 1.6: Evolução temporal das variáveis x e y do sistema (1.17)-(1.18) nos casos $\varepsilon = 0,1$ e 10.

a trajetórias que espiralam e convergem assintoticamente para o atrator na origem $(x,y) = (0,0)$.

Vamos considerar, agora, a situação completa onde ε é diferente de zero. Se ε for pequeno, é possível obter soluções analíticas aproximadas, usando técnicas bem conhecidas. No entanto, para $\varepsilon \neq 0$ arbitrário, a equação de van der Pol não tem solução analítica exata, mas pode ser integrada numericamente, como no caso da equação do pêndulo que vimos anteriormente.

Na Fig. 1.6 mostramos a evolução temporal das variáveis x e y do sistema (1.17)-(1.18) quando $\varepsilon = 0,1$ e 10. Em ambos os casos observamos oscilações regulares, tanto de x como de y, indicando um comportamento periódico para a corrente no circuito. No entanto, a natureza das oscilações é diferente nos dois casos. Ser $\varepsilon = 0,1$ observamos uma solução periódica que pouco difere daquela obtida para o oscilador harmônico do caso particular $\varepsilon = 0$. Já para $\varepsilon = 10$, as oscilações não são mais pendulares: elas exibem dois regimes. Há uma queda lenta na corrente, sucedida por uma queda rápida, o que pode ser mais facilmente visto na série temporal da taxa de variação $\dot{i}$. Estas são o que chamamos *oscilações de relaxação*, caracterizadas pela existência de duas escalas de tempo: uma lenta e outra rápida.

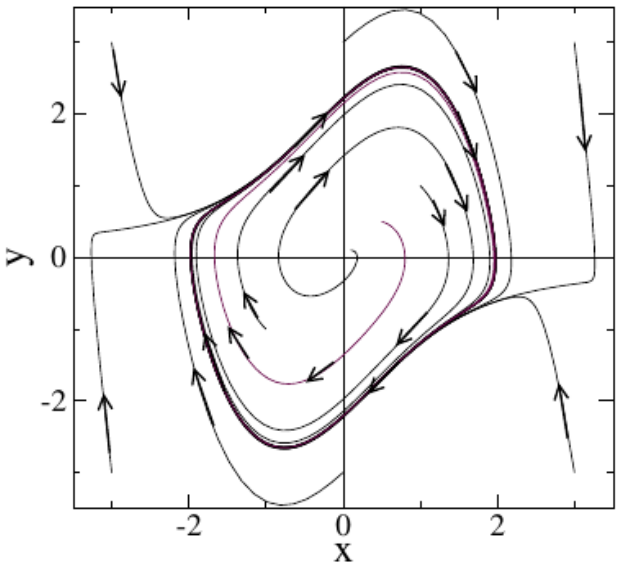

Figura 1.7: Ciclo-limite atrativo no plano de fase (x, y) obtido pela solução numérica do sistema (1.17)-(1.18) com $\varepsilon = 1$ e diversas condições iniciais $(x(0), y(0))$.

Nas oscilações pendulares (também descritas pela equação de Van der Pol quando ε é baixo), o período é usualmente fixado pelos parâmetros do sistema, de maneira que é relativamente difícil alterar seu valor, enquanto as amplitudes podem ser mais facilmente variadas. No exemplo do pêndulo símples, o período T é uma função do comprimento da haste e da aceleração da gravidade, ambos parâmetros de difícl manipulação, ao passo que a amplitude pode ser alterada simplesmente colocando o ângulo inicial da haste num valor desejado. Nas oscilações de relaxação ocorre o contrário: a amplitude tem um valor que dificilmente pode ser alterado, enquanto o período pode ser mais facilmente variado, simplesmente modificando as escalas de tempo (por exemplo, esticando um pouco mais a escala lenta). Devido a estas propriedades singulares, as oscilações de relaxação têm diversas aplicações interessantes, tanto físicas como biológicas.

Vamos considerar, agora, um valor intermediário, por exemplo $\varepsilon = 1$. Para interpretar a natureza das soluções, usaremos trajetórias no plano de fase $y - x$. Para diferentes condições iniciais $(x(0), y(0))$, temos trajetórias também distintas, mas todas convergem para uma curva fechada, chamada *ciclo-limite*. Os ciclos-limite também representam tipos de atratores no plano de fase, e representam oscilações estacionárias da corrente no circuito e da sua taxa de variação.

Podemos explicar a existência desta solução estacionária a partir da curva característica do triodo no circuito da figura **??**. O termo $-\alpha i$ pode ser interpretado como proveniente de uma *resistência negativa* $-\alpha$, pois o elemento não-linear estará na verdade *fornecendo* energia ao sistema. O termo βi^2 corresponde a uma resistência positiva, mas não-linear. Seu efeito é também o de dissipação de energia elétrica em calor, como num resistor convencional.

Quando a corrente i é pequena, o termo $-\alpha i$ é dominante, e a resistência negativa faz com que a corrente aumente. Já para valores maiores de i o termo quadrático βi^2 domina sobre o linear e o efeito resultante será a dissipação de energia, diminuindo a corrente no circuito. A oscilação estacionária descrita pelo ciclo-limite da Fig. 1.7) resulta do equilíbrio dessas duas tendências antagônicas. É curioso notar que a oscilação de relaxação é auto-sustentada: não é necessário ter um forçamento externo para mantê-la.

No circuito da Fig. 1.4 a fonte de tensão é contínua. Mas em circuitos de rádio-comunicação existe uma alimentação na forma de uma fonte de tensão alternada. Van der Pol também investigou experimentalmente o efeito de uma tensão externa alternada com frequência $\Omega = 2\pi/T_0$. Nesse caso, a equação de Van der Pol forçada será expressa na forma

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = F \sin\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right). \tag{1.22}$$

onde F é a amplitude (normalizada) da tensão externa.

A integração numérica desta equação revela diversos aspectos interessantes da dinâmica do sistema forçado. Se o período das oscilações T é próximo, mas não igual ao período T_0 da perturbação (ou algum múltiplo inteiro de T_0), o período T ajusta-se a nT_0, depois de um certo tempo. Van der Pol e Van der Mark, em 1927, observaram experimentalmente este efeito, que chamaram *demultiplicação de frequências*, usando receptores telefônicos para monitorar a resposta do circuito. Entre cada ajuste de T aos múltiplos T_0, $2T_0$, $3T_0$, etc. eles observaram (ouviram) sons irregulares, que atribuíram ao ruido extrínseco associado ao circuito.

Atualmente interpretamos esta como uma manifestação do comportamento caótico da corrente no circuito. Embora o próprio Van der Pol não tenha interpretado matematicamente esta observação de caos no circuito, os seus resultados motivaram vários matemáticos, como M. L. Cartwribht, J. E. Littlewood, e N. Levinson, nos anos 1940's, a investigar a natureza destas soluções caóticos.

1.4.3 Caos num circuito eletrônico

O sistema de Lorenz foi o primeiro conjunto de equações diferenciais ordinárias no qual a presença de comportamento caótico foi descrito de forma

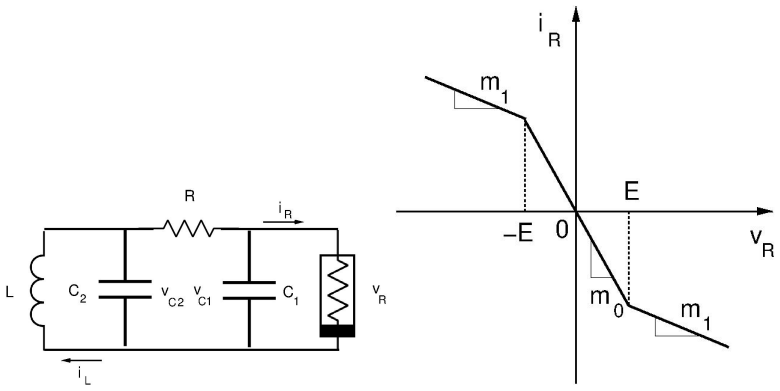

Figura 1.8: (a) Esquema de um circuito de Chua. (b) Curva característica para o elemento não-linear do circuito.

precisa. No entanto, as equações de Lorenz resultam do truncamento de um conjunto muito mais complicado de equações diferenciais parciais descrevendo campos de velocidade e temperatura de um fluido. Nos anos que se seguiram ao trabalho de Lorenz, outros sistemas dinâmicos exibindo comportamento caótico foram sendo descritos. Em particular, circuitos eletrônicos usados em radio-comunicações são frequentemente não-lineares e o estudo das suas soluções, periódicas ou caóticas, tem aplicações práticas interessantes. Uma das vantagens deste tipo de sistema é que eles podem ser modelados de forma precisa por sistemas de equações diferenciais, e também podem ser estudados experimentalamente, de modo a verificar os comportamentos dinâmicos previstos matematicamente para eles.

Um dos sistemas físicos mais símples que exibem comportamento caótico foi proposto por Chua, e consiste no circuito eletrônico mostrado na Fig. 1.8(a). Ele contém cinco elementos: um indutor com indutância L, um resistor de condutância G, duas capacitâncias C_1 e C_2, e um elemento não-linear, o chamado *diodo de Chua*. Este último é um elemento ativo, por necessitar de uma bateria para aporte de energia, e tem uma curva característica linear por partes [Fig. 1.8(b)].

$$i_R = g(v_R) = \begin{cases} m_0 v_R - B_p(m_1 - m_0), & \text{se } v_R \leq -B_p, \\ m_1 v_R, & \text{se } -B_p \leq v_R \leq B_p, \\ m_0 v_R + B_p(m_1 - m_0), & \text{se } v_R \geq B_p, \end{cases} \tag{1.23}$$

onde i_R e v_R são, respectivamente, a corrente e a tensão sobre o diodo de Chua, cujos parâmetros característicos são m_0, m_1 e B_p. Há várias realizações possíveis para o diodo de Chua, por exemplo usando amplificadores operacionais e resistores. Existe, ainda, uma versão alternativa do circuito de Chua, onde o indutor é substituído por um circuito eletrônico.

As variáveis dinâmicas que descrevem o circuito de Chua são as tensões sobre cada capacitor, denotadas v_{C1} e v_{C2}, e a corrente i_L que passa pelo indutor. Como a tensão sobre o diodo de Chua é igual a v_{C1}, podemos reescrever a curva característica (1.23) como

$$g(v_{C1}) = m_0 v_{C1} + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)\left(|v_{C1} + B_p| - |v_{C1} - B_p|\right) \tag{1.24}$$

Aplicando as regras de Kirchoff das malhas e dos nós ao circuito da Fig. 1.8(a), obtemos as seguintes equações diferenciais para o sistema

$$C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} = G(v_{C2} - v_{C1}) - g(v_{C1}), \tag{1.25}$$

$$C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} = G(v_{C1} - v_{C2}) + i_L, \tag{1.26}$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -v_{C2}. \tag{1.27}$$

É conveniente normalizar estas equações, definindo as seguintes variáveis e constantes:

$$x = \frac{v_{C1}}{B_p}, \qquad y = \frac{v_{C2}}{B_p}, \qquad z = \frac{i_L}{B_p G}, \qquad \tau = \frac{tG}{C_2}, \tag{1.28}$$

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1}, \qquad \beta = \frac{C_2}{LG^2}, \qquad a = \frac{m_1}{G}, \qquad b = \frac{m_0}{G}, \tag{1.29}$$

com as quais as equações (1.25)-(1.27) assumem a forma adimensional

$$\dot{x} = \alpha(y - x - \phi(x)), \tag{1.30}$$

$$\dot{y} = x - y + z, \tag{1.31}$$

$$\dot{z} = -\beta y, \tag{1.32}$$

onde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e, de (1.24), a função normalizada de resposta do diodo de Chua é

$$\phi(x) = bx + \frac{1}{2}(a - b)\left(|x + 1| - |x - 1|\right), \tag{1.33}$$

onde $a < b < 0$.

Nas simulações numéricas, podemos escolher os parâmetros como $\alpha = 10$, $\beta = 15$, $a = -1,27$ e $b = -0,68$. As equações (1.30)-(1.32) podem ser integradas numericamente a partir de condições iniciais $(x(0), y(0), z(0))$. Os valores subsequentes das variáveis $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ podem ser representadas por trajetórias num espaço abstrato de coordenadas $(x(t), y(t), z(t))$, que chamamos *espaço de fase*, em analogia com a representação similar que fizemos no problema do pêndulo amortecido e forçado. Usando as condições iniciais $x(0) = y(0) = z(0) = 0,1$, obtemos o atrator mostrado na Fig. 1.9, na forma de um rolo duplo.

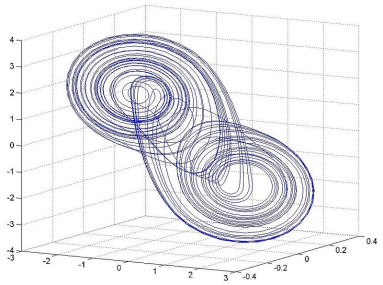

Figura 1.9: Atrator estranho no circuito de Chua para os seguintes valores dos parâmetros: $\alpha = 15,6$, $m_0 = -8/7$ e $m_1 = -5/7$ e $\beta = 25,58$.

Pode-se mostrar, usando as técnicas que serão expostas nos Capítulos 3 e 5, que o comportamento é caótico pois, além da evidente aperiodicidade das soluções, existe também dependência sensível às condições iniciais. Fisicamente isto significa que as tensões e correntes no circuito de Chua têm uma evolução irregular, mas cuja aperiodicidade não vem necessariamente da influência de um ruído extrínseco, como é comum em circuitos eletrônicos, mas sim uma decorrência da própria natureza determinística das equações que o descrevem. Uma das propriedades notáveis do circuito de Chua é que os resultados obtidos por solução numérica das equações (1.30)-(1.31) podem ser também obtidos experimentalmente, observados diretamente na tela de um osciloscópio.

1.5 Lorenz e o *efeito borboleta*

A previsão numérica do tempo é um tema de grande interesse prático, onde a construção adequada de modelos matemáticos, bem como a precisão com que os parâmetros e variáveis são conhecidos, desempenham um papel central na qualidade das previsões a curto e médio prazo. É um fato conhecido que, mesmo com modelos bastante sofisticados para o comportamento hidrodinâmico e termodinâmico da atmosfera, a previsão do tempo tem um horizonte finito de confiabilidade. Este é, portanto, um assunto em que a possibilidade de comportamento caótico é um fator limitante deste horizonte de previsões.

Em 1963 o meteorologista Edward Lorenz propôs um modelo matemático simples para a convecção atmosférica, cujas soluções numéricas revelaram a existência de caos de uma forma eloquente, despertando a atenção da comunidade científica para o tema. Considerando que a superfície terrestre é aquecida pela irradiação solar, o ar mais quente na sua proximidade tende a subir para camadas superiores da atmosfera, empurrando para baixo o ar mais frio. Este processo forma os chamados "rolos de convecção" do ar

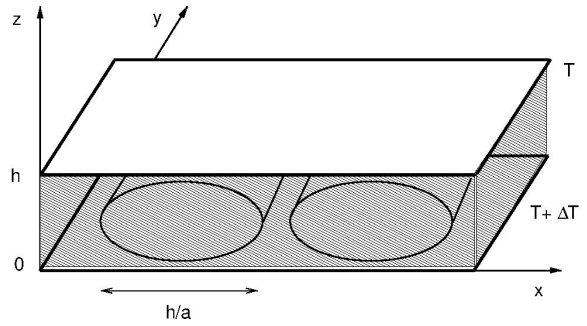

Figura 1.10: Figura esquemática do experimento de Bénard.

atmosférico aquecido de baixo para cima.

1.5.1 Experimento de Bénard

Em particular, Lorenz estudou o problema conhecido como experimento de Bénard, que consiste na convecção térmica de um fluido contido entre duas placas paralelas horizontais separadas por uma distância $z = h$, e infinitamente extensas na direção y, de maneira que o sistema é efetivamente bidimensional [Fig. **??**]. A placa superior é mantida a uma temperatura T_0, enquanto a inferior está à temperatura $T_0 + \Delta T$, onde a diferença de temperatura entre as placas é mantida constante.

No experimento de Bénard a temperatura do fluido entre as placas varia com a posição $\mathbf{r}$, causando o movimento do fluido devido à transferência de calor em seu interior. Devemos, assim, empregar equações hidrodinâmicas e térmicas, com condições de contorno adequadas. Utilizamos, no modelamento matemático do experimento de Bénard, a aproximação de Boussinesq, na qual ignoramos todas as variações nas propriedades do fluido, exceto a sua densidade ρ. Denotando por $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ é a velocidade do fluido, e ρ a sua densidade, a equação de movimento de um fluido incompressível e viscoso, também conhecida como equação de Navier-Stokes, é

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}, \tag{1.34}$$

onde p é a pressão, ν é o coeficiente de viscosidade cinemática, e $\mathbf{g} = g\hat{\mathbf{z}}$ é a aceleração da gravidade. A não-linearidade essencial neste tipo de problemas vem do termo $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$, um termo quadrático nas velocidades.

Uma simplificação considerável do problema consiste na suposição de que o sistema é translacionalmente invariante na direção y [Fig. 1.10], de modo que as variáveis físicas dependem apenas das coordenadas x e z. O princípio de conservação de massa, aplicado nesta configuração, permite-

nos definir uma função de fluxo, $\psi(x,z,t)$, cujas derivadas espaciais fornecem as componentes da velocidade do fluido como funções do tempo.

Se, no experimento de Bénard, a diferença de temperatura entre as placas ΔT for relativamente pequena, só existirá condução térmica, sem movimento do fluido, e o perfil de temperatura entre as placas será linear

$$T_{lin}(x,z,t) = T_0 + \Delta T - \frac{\Delta T}{h} z. \tag{1.35}$$

No entanto, se ΔT é aumentado a partir de um dado valor crítico, surgirão rolos de convecção e o perfil de temperatura irá desviar-se do perfil linear (1.35). Definimos uma função $\theta(x,z,t)$ como a diferença entre os perfis linear e não-linear, associada ao movimento do fluido.

Inserindo as funções ψ e θ nas equações hidrodinâmicas e de transferência de calor, obtém-se um conjunto de equações diferenciais parciais (equações de Saltzmann). Lorenz investigou soluções das equações de Saltzmann, usando o chamado método de Galerkin. No presente contexto, este método consiste em expandir as funções ψ e θ em séries de Fourier duplas em x e z, e retendo apenas os termos de orde ordem mais baixa, como segue

$$\psi(x,z,t) = c_1 X(t) \sin\left(\frac{\pi a x}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi h}{z}\right), \tag{1.36}$$

$$\theta(x,z,t) = c_2 Y(t) \cos\left(\frac{\pi a x}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi h}{z}\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi h}{z}\right), \tag{1.37}$$

onde c_1 e c_2 são constantes e a denota a razão de aspecto dos rolos de convecção [vide Fig. 1.10]. Os coeficientes dos modos de Fourier dependem do tempo e são denotados $X(t)$, $Y(t)$ e $Z(t)$.

Substituindo as expansões de Fourier acima (1.36) e (4.40) nas equações de Saltzmann, Lorenz obteve um sistema de três equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas, descrevendo a evolução temporal dos coeficientes de Fourier (X,Y,Z), chamadas equações de Lorenz que, na sua forma adimensional, são

$$\frac{dX}{dt} = \sigma(Y - X), \tag{1.38}$$

$$\frac{dY}{dt} = -Y + rX - XZ, \tag{1.39}$$

$$\frac{dZ}{dt} = -\beta Z + XY, \tag{1.40}$$

onde σ (número de Prandtl) e b são parâmetros que podemos considerar constantes. Já o parâmetro r é proporcional à diferença de temperatura ΔT entre as duas placas.

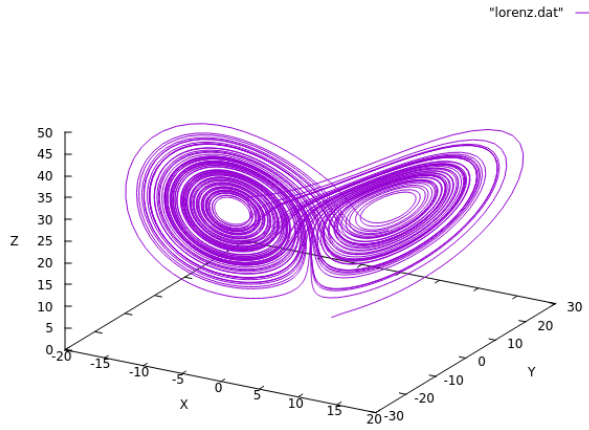

Figura 1.11: Atrator estranho para o sistema de Lorenz (1.38)-(1.40) com os valores $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, e $r = 28$.

1.5.2 O atrator borboleta

Nas simulações numéricas das equações de Lorenz (1.38)-(1.40) costuma-se fixar os valores de $\sigma = 10$ e $\beta = 8/3$, e considerar o parâmetro r como variável. Se as condições iniciais $(X(0), Y(0), Z(0))$ são arbitradas, as equações de Lorenz podem ser integradas numericamente para um dado valor de r. Se r assume valores relativamente baixos, o sistema (1.38)-(1.40) terá uma solução estacionária em $(X(t), Y(t), Z(t)) = (0,0,0)$, o que implica em uma condução térmica pura, onde o perfil de temperatura entre as placas é dado por (1.35).

Para valores $r > 1$ aparecem soluções estacionárias constantes $(X(t), Y(t), Z(t))$ que correspondem fisicamente aos rolos de convecção que aparecem entre as placas, quando a diferença de temperatura entre elas for suficientemente grande. Na medida em que r cresce, o sistema de Lorenz prevê que os rolos de convecção tornam-se instáveis e dão lugar a um comportamento aperiódico que pode ser visualizado como um atrator "estranho" num espaço de fase tridimensional, cujas coordenadas são as variáveis $X(t)$, $Y(t)$ e $Z(t)$. Os resultados, para $r = 28$, são mostrados na Fig. 9.11(a),(b) e (c), que apresentam trs projeções do atrator nos planos XY, XZ e YZ, respectivamente. O atrator de Lorenz têm similaridades com o que descrevemos anteriormente para o pêndulo forçado e amortecido, sendo um objeto fractal, com dimensão $2,05$.

O atrator de Lorenz exibe a sensibilidade às condições iniciais, que é uma das características do comportamento caótico. Lorenz descobriu esta propriedade quase que por acaso. O computador usado por ele em 1961

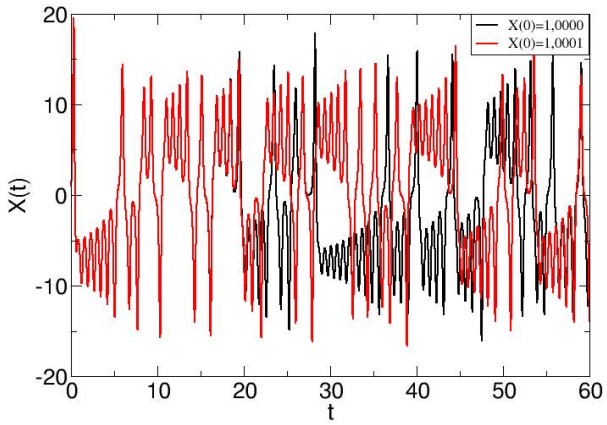

Figura 1.12: Evolução temporal da variável X do sistema de Lorenz para dois valores muito próximos da condição inicial $X(0)$. Os demais parâmetros têm os valores: $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, e $\rho = 28$.

para resolver numericamente as equações (1.38)-(1.40) era um Royal McBee LGP-30, com uma memória de $16kB$ e velocidade de $120kHz$: uma máquina moderna para a época, com um valor (atualizado) de 440 mil dólares. Mesmo assim, a solução do sistema de equações levava tipicamente várias horas [cf. [10], pgs. 359-361].

Para economizar tempo, ao invés de reiniciar uma solução desde o início, ele recomeçou de um ponto intermediário da solução antiga. Lorenz colocou como novas condições inicias não os valores com seis casas decimais que o computador gerou, mas sim digitou os valores que sairam diretamente da impressora, com apenas três decimais, portanto ligeiramente diferentes daqueles realmente obtidos na solução. Por exemplo, um valor como $0,387257$ seria impresso como $0,387$, uma diferença da ordem de uma parte em dez mil. Supondo que essa "pequena" diferença nas condições iniciais não fosse alterar nada relevante, ele saiu para tomar uma xícara de café. Ao retornar, uma hora depois, para sua surpresa a sequência de valores da solução numérica tinha sido diferente da anterior!

Um exemplo da dependência com as condições iniciais exibida pelo atrator de Lorenz mostrado na Fig. 9.11 está ilustrada na Fig. 1.12, onde mostramos a evolução temporal da variável $X(t)$ para dois valores muito próximos da condição inicial, a saber $X(0) = 1,0000$ e $X'(0) = 1,0001$, cuja diferença também é de uma parte em dez mil. Observamos que, para tempos até aproximadamente $t = 20$, a evolução das soluções numéricas obtidas a partir das duas condições iniciais é praticamente idêntica. No en-

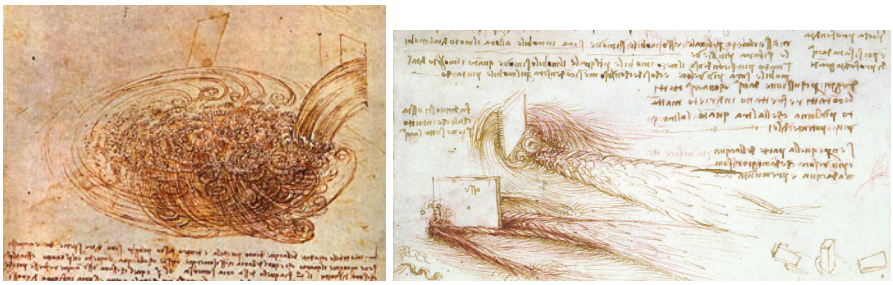

Figura 1.13: Desenhos de Leonardo da Vinci ilustrando turbulência no escoamento de água. Créditos: Royal Collection Trust/ Her Majesty Queen Elizabeth II 2019

tanto, a partir de $t = 20$ constatamos que as soluções respectivas são progressivamente diferentes. De fato, a evolução de ambas torna-se completamente distinta com o passar do tempo.

Motivado por esta descoberta surpreendente, Lorenz procurou estudar esse fenômeno usando os trabalhos de Poincaré e Birkhoff, e identificando o comportamento observado no atrator "estranho" como o tipo de solução não-periódica associado ao caos. O trabalho de Lorenz foi publicado em 1963 [12], e despertou o interesse da comunidade científica para este fenômeno. O formato de asas de borboleta do atrator caótico de Lorenz motivou o uso da expressão "efeito borboleta" para designar o próprio comportamento caótico. Em 1972, Lorenz apresentou na 139ª reunião da *American Association for the Advancement of Science* a palestra *Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?* ("o bater das asas de uma borboleta no Brasil pode ocasionar um tornado no Texas?"). Em outras palavras, uma influência tão pequena como o bater das asas de uma borboleta poderia alterar as condições iniciais de um sistema caótico (como a formação de ventos na atmosfera) a ponto de levar a um comportamento futuro imprevisível, como um tornado.

1.6 Caos e Turbulência

As equações de Lorenz (1.38)-(1.40) representam uma redução do comportamento extremamente complexo existente na atmosfera a um sistema dinâmico tridimensional. Embora saibamos que há comportamento caótico nas soluções das equações de Lorenz, é um passo gigantesco extrapolarmos estes resultados para um sistema como um fluido. Representamos as propriedades do fluido, como sua velocidade e temperatura como campos escalares e vetoriais ($\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ e $T(\mathbf{r},t)$, respectivamente), de modo que este sistema dinâmico tem dimensão infinita, do ponto de vista matemático.

Em sistemas complexos, como fluidos e plasmas por exemplo, o comportamento caótico está frequentemente associado com um fenômeno mais geral, que é a turbulência. Ao contrário de um escoamento laminar de um fluido, onde há uma regularidade tanto no espaço como no tempo, um fluido turbulento apresenta comportamentos irregulares e imprevisíveis. As evidentes características aperiódicas dos inúmeros vórtices formados no escoamento turbulento da água foram registradas por Leonardo da Vinci [Fig. 1.13].

Físicos e matemáticos importantes, como Heisenberg, Onsager, Landau e Kolmogorov, debruçaram-se sobre as questões fundamentais da natureza e origem da turbulência. Kolmogorov, em 1941, partiu da premissa que um escoamento turbulento é composto por "redemoinhos"de diferentes tamanhos. Os tamanhos dos redemoinhos dão origem a uma escala, ou comprimento típico. Como os redemoinhos de grandes escalas são instáveis eles quebram-se em estruturas menores que dividem entre si a energia cinética, e assim por diante. Quando os redemoinhos tornam-se suficientemente pequenos, a viscosidade do fluido é responsável pela dissipação da energia cinética presente nestas pequenas escalas. Além disso, as estruturas em pequena escala não teriam direção espacial de preferência, sendo assim isotrópicas. Nestas linhas, Heisenberg, a partir do seu trabalho de doutoramento (sob a orientação de Sommerfeld), criou uma teoria estatística da turbulência isotrópica. Estes resultados compõe a teoria da turbulência plenamente desenvolvida, da qual muito se conhece tanto teorica como experimentalmente nos dias de hoje.

Tão ou mais complicado é o problema da origem da turbulência, ou seja, de como o movimento turbulento evolui na medida em que um parâmetro característico (no caso, o número de Reynolds) aumenta seu valor. Este problema foi abordado por Landau, que desenvolveu uma teoria baseada numa sequência infinita de bifurcações de Hopf que aumentavam a periodicidade do sistema, até um limite supostamente turbulento. No entanto, a teoria de Landau teve um sucesso apenas limitado em seus enfoques ao assunto. Não por acaso, Feynman descreveu a turbulência como o problema não-resolvido mais importante da Física Clássica.

A conexão entre caos e turbulência foi analisada por Ruelle e Takens num trabalho pioneiro publicado em 1971. Os autores partiram do mecanismo proposto por Landau, baseado na acumulação de bifurcações, e propuseram uma *rota para o caos* envolvendo um número finito destas bifurcações e a subsequente criação de um atrator estranho, exibindo comportamento caótico. No entanto, o problema da relação entre caos e turbulência continua longe de uma solução definitiva, a despeito dos múltiplos esforços de pesquisadores de diferentes áreas.

Neste Livro vamos nos limitar à descrição de comportamentos periódicos e caóticos em sistemas dinâmicos com poucas dimensões: não trataremos de turbulência propriamente dita. Serão abordados mapas uni e bidimen-

sionais, uma vez que neles é possível observar ambos os comportamentos com um aparato matemático relativamente modesto. Na sequência estudaremos sistemas de equações diferenciais até três dimensões, o que é suficiente para entender sistemas fisicamente importantes como o pêndulo amortecido e forçado, o sistema de Lorenz e o circuito de Chua. Neste sentido, nosso trabalho pode servir como uma motivação para o leitor prosseguir neste assunto, a partir de obras mais avançadas.

Notes

[1]O modelo (1.5) leva a populações negativas se P_n superar o valor limite K. Para evitar este problema outros modelos têm sido propostos na literatura [**?**, 17].

[2]O mapa logístico surge também como um caso particular de um rotor periodicamente pulsado, vide Apêndice B.

[3]Por exemplo, as populações da lebre americana (*Lepus americanus*) e do lince-do-Canadá (*Lynx canadensis*) exibem ciclos com períodos que variam entre 9 e 11 anos, de acordo com registros feitos de 1845 a 1935 nas florestas boreais canadenses [**?**]

Capítulo 2

Mapas unidimensionais

Mapas unidimensionais são sistemas dinâmicos onde há uma única variável dependente do tempo, o qual é uma variável discreta, podendo assumir somente valores inteiros (positivos ou negativos). São sistemas que, apesar da aparente simplicidade, podem apresentar uma dinâmica extremamente rica, incluindo comportamento periódico, bifurcações e caos. Além disso, mapas são computacionalmente mais simples do que equações diferenciais, razão pela qual iniciamos nossa exposição por eles.

2.1 Mapas unidimensionais lineares

Antes de tratar dos sistemas não-lineares, cuja dinâmica é o nosso objeto principal de estudo, vamos estudar o caso mais simples de mapas lineares, que têm como vantagem possuir uma solução exata, o que facilita a análise do seu comportamento dinâmico.

Seja x_n uma variável dependente do tempo $n = 0, 1, 2, \ldots$, cujo valor depende somente do valor dessa variável num instante anterior x_{n-1}. Um mapa unidimensional é, em geral, uma relação da forma

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{2.1}$$

onde f é uma função arbitrária. Um exemplo é o mapa linear, dado por

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta, \tag{2.2}$$

onde α e β são parâmetros reais.

O mapa (2.2) é uma relação de recorrência para a qual, dado o valor da variável num dado instante, obtemos o valor da variável no instante seguinte. Por exemplo, supondo conhecida a condição inicial x_0, no próximo instante teremos

$$x_1 = f(x_0) = \alpha x_0 + \beta, \tag{2.3}$$

e no instante seguinte

$$x_2 = f(x_1) = \alpha x_1 + \beta = \alpha(\alpha x_0 + \beta) + \beta = \alpha^2 x_0 + \beta(1+\alpha). \tag{2.4}$$

Usaremos a seguinte notação: $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) \equiv f^{[2]}(x_0)$, onde $f^{[2]}(x) \equiv f(f(x))$ denota a segunda iterada da função $f(x)$, ou seja, a função composta com ela mesma, e que não deve ser confundida com a função elevada ao quadrado, ou $[f(x)]^2$. Da mesma forma, $f^{[n]}(x)$ é a n-ésima iterada de f, ou seja, a função $f(x)$ composta com ela mesma n vezes.

Assim, as iteradas subsequentes do mapa linear serão

$$\begin{aligned} x_3 &= f(x_2) = f(f(x_1)) = f(f(f(x_0))) \equiv f^{[3]}(x_0) \\ &= \alpha x_2 + \beta = \alpha(\alpha^2 x_0 + \beta(1+\alpha)) + \beta \\ &= \alpha^3 x_0 + \beta(1+\alpha+\alpha^2) \end{aligned} \tag{2.5}$$

A sequência de iteradas sucessivas do mapa, $\{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$, é chamada de *órbita* gerada pelo mapa $f(x)$, a partir da condição inicial x_0. Podemos usar o princípio de indução finita para determinar o valor da n-ésima iterada x_n, em função da condição inicial x_0.

$$\begin{aligned} x_n &= f(x_{n-1}) = \alpha x_{n-1} + \beta \\ &= \alpha(\alpha x_{n-2} + \beta) + \beta = \alpha^n x_{n-2} + \beta(1+\alpha) \\ &= \alpha^n x_0 + \beta(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{n-1}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

A expressão entre parênteses é igual à soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão α, de modo que

$$x_n = \alpha^n x_0 + \frac{\beta(\alpha^n - 1)}{\alpha - 1} = \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha - 1}\right)\alpha^n - \frac{\beta}{\alpha - 1}, \tag{2.7}$$

que é a solução geral do mapa linear (2.2) para $\alpha \neq 1$, pois fornece diretamente o valor de x_n para qualquer valor do tempo $n > 0$, sem a necessidade de se calcular as iteradas intermediárias. Só nos foi possível obter esta solução geral devido ao fato da função $f(x)$ ser linear.

2.2 Pontos fixos

O ponto fixo x^* da função $f(x)$ mapeia a si próprio. De modo geral, para o mapa unidimensional

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{2.8}$$

o ponto fixo é a solução da equação

$$x^* = f(x^*). \tag{2.9}$$

Se a condição inicial for colocada exatamente no ponto fixo ($x_0 = x^*$), então os demais pontos da órbita gerada pelo mapa serão

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x^*,$$

para qualquer n.

No caso particular do mapa linear (2.2) o ponto fixo será

$$x^* = \frac{\beta}{1-\alpha}, \qquad (\alpha \neq 1), \tag{2.10}$$

de maneira que reescrevemos a solução geral do mapa linear (2.7) como

$$x_n = (x_0 - x^*)\,\alpha^n + x^*. \tag{2.11}$$

Os pontos fixos representam soluções estacionárias de um mapa, ou seja, pontos de equilíbrio. É importante, porém, estudar também a sua estabilidade, ou seja, o comportamento das iterações do mapa em relação a pequenos desvios do ponto fixo. A partir da solução (2.11) temos três situações possíveis:

$|\alpha| < 1$**:** as potências α^n vão diminuindo conforme o aumento do tempo n ($\alpha^n < \alpha^{n-1}$), de modo que $|\alpha|^n \to 0$ se $n \to \infty$. De (2.11) temos que $x_n \to x^*$ se $n \to \infty$. Portanto, as iterações sucessivas geradas por qualquer condição inicial x_0 tenderão a x^* para tempos grandes. Dizemos que x^* é um *ponto fixo atrativo*, correspondendo a um ponto de *equilíbrio assintoticamente estável*;

$|\alpha| > 1$**:** os fatores α^n vão crescendo com n ($\alpha^n > \alpha^{n-1}$), tal que $|\alpha|^n \to \infty$ se $n \to \infty$, ou seja $x_n \to \infty$. As iterações sucessivas geradas por qualquer condição inicial x_0 afastar-se-ão de x^* para tempos grandes, e x^* será um *ponto fixo repulsivo*, correspondendo a um ponto de *equilíbrio instável*;

$|\alpha| = 1$**:** os α^n nem aumentam nem diminuem conforme o passar do tempo n, de modo que o ponto fixo não é nem atrativo nem repulsivo. Na verdade, se $\alpha = 1$ e $\beta \neq 0$ não existe ponto fixo, e se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ existem infinitos pontos fixos correspondendo a pontos de equilíbrio indiferentes (estabilidade marginal).

É possível, também, obter informações sobre o tipo de órbita a partir do sinal do parâmetro α. Temos quatro situações a considerar:

$0 < \alpha < 1$**:** o ponto fixo x^* é atrativo, e as iterações do mapa aproximam-se dele de forma monotônica, ou seja, se $x_0 > x^*$ então $x_n > x^*$ para todo tempo n. Analogamente, se $x_0 < x^*$ então $x_n < x^*$, de modo que temos uma *convergência monotônica* [Fig. 2.1(a)].

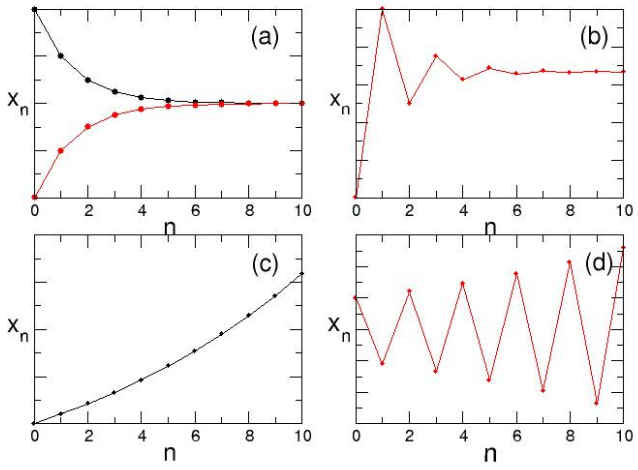

Figura 2.1: Órbitas de um mapa unidimensional linear para (a) convergência monotônica, (b) convergência oscilatória, (c) divergência monotônica, (d) divergência oscilatória.

$-1 < \alpha < 0$**:** o ponto x^* também é atrativo, mas iterações do mapa aproximam-se dele de forma oscilatória pois, de (2.11),

$$x_n = (x_0 - x^*)(-1)^n|\alpha|^n + x^*, \tag{2.12}$$

que resulta em valores alternadamente maiores e menores que x^*, tal que tenhamos uma *convergência oscilatória* [Fig. 2.1(b)].

$\alpha > 1$**:** o ponto fixo x^* é repulsivo, e as iterações do mapa afastam-se dele de forma monotônica (*divergência monotônica*) [Fig. 2.1(c)].

$\alpha < -1$**:** x^* é repulsivo, e iterações do mapa aproximam-se dele de forma oscilatória (*divergência oscilatória*)[Fig. 2.1(d)] .

2.3 Mapa logístico

Possivelmente o mapa unidimensional não-linear importante é o mapa logístico:

$$x_{n+1} = f(x_n) = r x_n (1 - x_n), \tag{2.13}$$

onde $0 \leq x_n \leq 1$. O gráfico de $f(x)$ é uma parábola com vértice no ponto de coordenadas $(1/2, r/4)$, que é um ponto de extremo pois $f'(1/2) = 0$ [Fig.

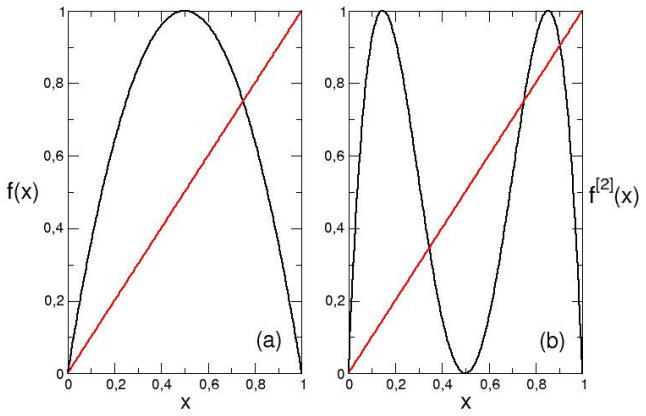

Figura 2.2: (a) Primeira e (b) segunda iteradas do mapa logístico para $r = 4$.

2.2(a)]. Supondo que o parâmetro r seja sempre positivo, então $f''(1/2) = -2r < 0$, de modo que o ponto $x = 1/2$ é um máximo, e a concavidade da parábola é voltada "para baixo". Alem disso, como a ordenada do vértice é $r/4$, para que $f(x)$ mapeie o intervalo $[0,1]$ nele mesmo é necessário que $0 < r < 4$.

Os pontos fixos do mapa logístico são dados pela condição

$$x^* = f(x^*) \tag{2.14}$$

ou seja, $x^* = rx^*(1-x^*)$, que é uma equação do segundo grau com as seguintes raízes

$$x_a^* = 0, \qquad x_b^* = 1 - \frac{1}{r}. \tag{2.15}$$

Não possuimos uma solução geral para o mapa logístico, nem para modelos não-lineares em geral, no caso de tempo n arbitrário e r qualquer. Temos, pois, de calcular as iterações sucessivas a partir de uma condição inicial x_0, para obter x_n:

$$\begin{aligned}
x_1 &= f(x_0) = rx_0(1-x_0) \\
x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = f^{[2]}(x_0) = rx_1(1-x_1) \\
x_3 &= f(x_2) = f(f(f(x_0))) = f^{[3]}(x_0) = rx_2(1-x_2) \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \\
x_n &= f(x_{n-1}) = f(f(\cdots f(x_0)\cdots)) = f^{[n]}(x_0).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

As iteradas sucessivas podem se tornar funções extremamente complicadas. Por exemplo, a segunda iterada do mapa logístico é a função [Fig.

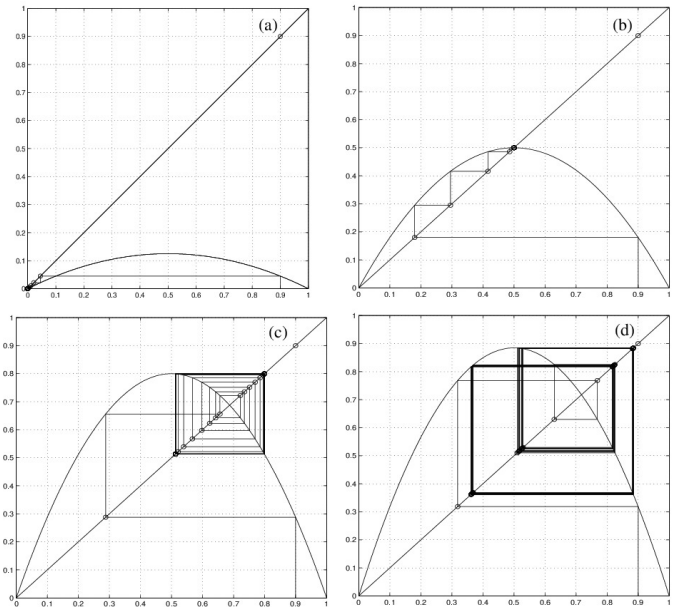

Figura 2.3: Diagramas de escada para o mapa logístico para (a) $r = 0,5$; (b) $2,0$; (c) $3,2$; (d) $3,54$.

2.2(b)]

$$\begin{aligned} f^{[2]}(x) &= f(f(x)) = r\,f(x)\;(1-f(x)) \\ &= r\,[rx(1-x)]\,[1-rx(1-x)] \\ &= r^2x(1-x) - r^3x^2(1-x)^2, \end{aligned} \tag{2.17}$$

Esse procedimento leva rapidamente a funções polinomiais bastante complicadas.

Uma maneira conveniente de visualizar as sucessivas iteradas do mapa logístico, assim como de qualquer mapa unidimensional, é construir o *diagrama de escada* correspondente. Inicialmente traçamos os gráficos da função $f(x) = rx(1-x)$ (para um dado valor de r) e da função identidade $f(x) = x$, e que é uma reta que passa pela origem e faz 45° com o eixo horizontal (primeira bissetriz). Os pontos fixos são as interseções do gráfico de $f(x)$ e da primeira bissetriz.

Localizamos no eixo horizontal o valor correspondente à condição inicial x_0, e subimos uma perpendicular até encontrar o gráfico da função $f(x)$. O valor correspondente no eixo vertical será $x_1 = f(x_0)$. Nós traçamos uma paralela ao eixo horizontal a partir deste ponto até interceptar a primeira bissetriz. A abscissa do ponto de interseção é igual a x_1. A partir deste ponto repetimos o processo: construimos uma perpendicular ao eixo horizontal passando por x_1 até encontrar o gráfico da função obtendo $x_2 = f(x_1)$,

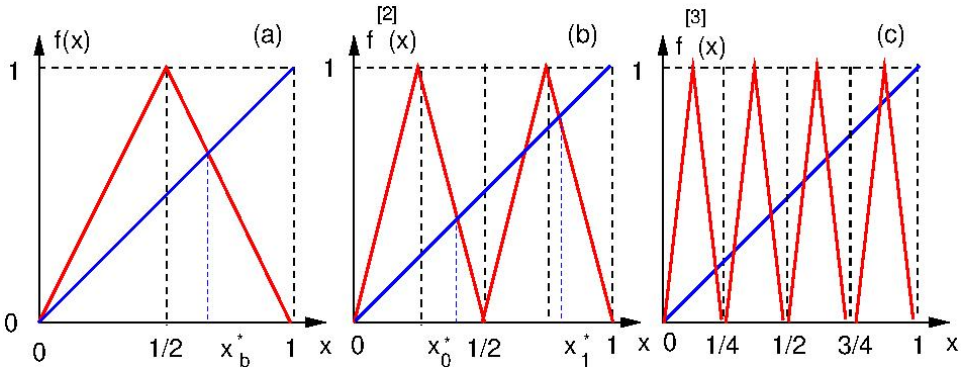

Figura 2.4: (a) Primeira, (b) segunda, e (c) tercera iteradas do mapa da tenda.

rebatemos no eixo horizontal e assim por diante. O diagrama resultante assemelha-se a uma escada, onde o início de cada degrau indica o valor da iterada do mapa.

Para o mapa logístico em $r = 0,5$ há apenas o ponto fixo na origem. A partir da condição inicial $x_0 = 0,9$ o diagrama de escada mostra a convergência das iterações para este ponto fixo [Fig. 2.3(a)]. No caso $r = 2,0$ aparecem os dois pontos fixos, e a mesma condição inicial indica uma convergência monotônica para o segundo [Fig. 2.3(b)]. Se $r = 3,2$ a convergência para este ponto fixo é oscilante, dando ao diagrama de escada a aparência de uma teia de aranha [Fig. 2.3(c)]. Finalmente, para $r = 3,54$, as iterações mostradas no diagrama de escada aparentam um comportamento irregular [Fig. 2.3(d)].

2.4 Mapa da tenda

Vamos considerar também o mapa

$$x_{n+1} = 1 - 2\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \begin{cases} 2x_n & \text{se } 0 \leq x_n \leq 1/2, \\ 2(1-x_n) & \text{se } 1/2 < x_n \leq 1, \end{cases} \tag{2.18}$$

cujo gráfico tem a forma de uma tenda [Fig. 2.4(a)], sendo linear por partes nos intervalos $[0,1/2]$ e $(1/2,1]$. No ponto $x = 1/2$ a função $f(x)$ é contínua, mas não diferenciável, o que significa que a derivada do mapa neste ponto não é única, pois $f'(1/2-\varepsilon) = 2$ e $f'(1/2+\varepsilon) = -2$. Um mapa linear por partes, como o mapa da tenda, comporta-se frequentemente como um mapa não-linear.

O mapa da tenda tem dois pontos fixos, que são as soluções da equação $x^* = f(x^*)$. Como $f(x)$ é definida de forma diferente nos intervalos $[0,1/2]$ e

$(1/2,1]$, temos de impor ambas as formas do mapa na equação que fornece o ponto fixo. No intervalo $[0,1/2]$ a condição $x^* = 2x^*$ é satisfeita por $x^* = 0$; ao passo que no intervalo $(1/2,1]$ a equação $x^* = 2(1-x^*)$ resulta em $x^* = 2/3$.

Na Figura 2.4(b) mostramos a segunda iterada do mapa da tenda:

$$f^{[2]}(x) = \begin{cases} 4x, & \text{se} \quad 0 \le x \le 1/4, \\ 2(1-2x), & \text{se} \quad 1/4 < x \le 1/2, \\ 2(-1+2x), & \text{se} \quad 1/2 < x \le 3/4, \\ 4(1-x), & \text{se} \quad 3/4 < x \le 1. \end{cases} \tag{2.19}$$

A primeira iterada do mapa da tenda $f(x) = f^{[1]}(x)$ tem um $(= 2^0)$ vértice no ponto crítico $x = 1/2$, e a inclinação das retas é $(1)/(1/2) = 2 = 2^1$. A segunda iterada, $f^{[2]}(x)$, tem dois $(= 2^1)$ vértices com inclinação $(1)/(1/4) = 4 = 2^2$; ao passo que a terceira iterada $f^{[3]}(x)$ tem quatro $(= 2^2)$ vértices e inclinação $(1)/(1/8) = 8 = 2^3$. Por indução finita, o gráfico da n-ésima iterada do modelo da tenda deve ter 2^{n-1} vértices, e a declividade de cada segmento de reta é 2^n.

2.5 Imagens diretas e inversas

Pontos que, se usados como condições iniciais num mapa $f(x)$, levam depois de um certo número finito de iterações ao ponto fixo x^* são chamados de pontos finalmente fixos. Mais formalmente, dizemos que x é um ponto finalmente fixo de $f(x)$ se existe um inteiro positivo n tal que $f^{[n]}(x)$ é um ponto fixo de f. Como um exemplo, no mapa da tenda (3.17) temos que $x = 1/8$ é um ponto finalmente fixo, pois iterações de $f(x)$ tendo $x_0 = 1/8$ como condição inicial convergem ao ponto fixo $x^* = 0$ em $n = 4$ iterações:

$$f(1/8) = 1/4, \quad f(1/4) = 1/2, \quad f(1/2) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(0) = 0.$$

Pode-se mostrar que, se $x = k/2^n$, onde k e n são dois inteiros positivos, e $0 < k/2^n \le 1$, então x é um ponto finalmente fixo do mapa da tenda [19].

Vamos considerar um mapa $f : A \to B$, onde A e B são sub-conjuntos na reta real (A é o domínio e B a imagem da função f). O mapa f será inversível se e somente se ele for uma função bijetora, ou seja, deve ser injetora e sobrejetora. Para uma função injetora, todo elemento da imagem B possui em único correspondente no domínio A. Uma função sobrejetora é tal que a imagem é igual ao contradomínio, ou seja, não existe nenhum elemento de B que não tenha um elemento associado em A. A inversa será $f^{-1} : B \to A$.

A imagem direta de um ponto x pelo mapa f é o valor de $f(x)$. A órbita obtida a partir de um dado x é o conjunto de suas imagens diretas $f^{[n]}(x)$. Se o mapa $f(x)$ for inversível, ele possui uma única função inversa $f^{[-1]}$.

Nesse caso, os pontos finalmente fixos são dados pelas suas imagens inversas (ou pré-imagens) $f^{[-n]}(x)$, ou seja, as suas imagens pela n-ésima iterada da função inversa. Nessa terminologia, os pontos finalmente fixos são imagens inversas do ponto fixo.

Um mapa inversível tem uma única órbita para tempos negativos. Um exemplo é o mapa linear $f(x) = \alpha x + \beta$. Se $\alpha \neq 0$ o mapa inverso é $f^{-1} = (x - \beta)/\alpha$, tal que cada ponto x terá uma única pré-imagem $f^{-1}(x)$. Já se o mapa f for não-inversível, há um número infinito de pré-imagens (e órbitas) possíveis. Os mapas logístico e da tenda são não-inversíveis. Por exemplo, $2/5$ é a imagem de dois pontos pelo modelo da tenda, a saber, $x = 1/5$ e $4/5$. Logo há duas pré-imagens do ponto $2/5$ pela primeira iterada,

$$1/5 = f^{[-1]}(2/5), \quad 4/5 = f^{[-1]}(2/5),$$

quatro pré-imagens pela segunda iterada,

$$1/10 = f^{[-2]}(2/5), 2/5 = f^{[-2]}(2/5), 11/20 = f^{[-2]}(2/5), 11/10 = f^{[-2]}(2/5),$$

e assim por diante.

2.6 Estabilidade dos pontos fixos

Determinamos anteriormente a estabilidade do ponto fixo de um mapa unidimensional linear $f(x) = \alpha x + \beta$. No caso de um mapa não-linear genérico

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{2.20}$$

vamos considerar o ponto fixo, dado por $x^* = f(x^*)$. Para determinar a estabilidade deste ponto fixo, podemos analisar o comportamento de uma órbita na vizinhança do ponto fixo, calculando a evolução temporal da diferença entre os pontos da órbita e o ponto fixo

$$\delta_n = x_n - x^*, \tag{2.21}$$

de forma que o mapa (2.20) torna-se

$$\delta_{n+1} = x_{n+1} - x^* = f(x^* + \delta_n) - x^*. \tag{2.22}$$

Supondo que a distância δ_n seja suficientemente pequena, ou seja, que $|\delta_n| \ll |x^*|$, podemos expandir o mapa em série de potências

$$f(x^* + \delta_n) = f(x^*) + \delta_n \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x^*} + \frac{1}{2}(\delta_n)^2 \left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right)_{x=x^*} + \ldots. \tag{2.23}$$

Truncando a série no termo linear, temos que

$$\delta_{n+1} \approx f(x^*) + \delta_n f'(x^*) - x^*, \tag{2.24}$$

que é um mapa linear da forma

$$\delta_{n+1} = \Lambda \delta_n, \tag{2.25}$$

onde definimos o fator de estabilidade:

$$\Lambda = f'(x^*). \tag{2.26}$$

Baseando-se, então, no critério de estabilidade para o mapa linear, onde $\alpha = \Lambda$, teremos as seguintes possibilidades

$|\Lambda| < 1$**:** x^* é um ponto fixo atrativo (assintoticamente estável)

$|\Lambda| > 1$**:** x^* é repulsivo (instável)

Caso $|\Lambda| = 1$, o critério de linearização falha na determinação da estabilidade, ou seja, o ponto fixo pode ser atrativo ou repulsivo, mas a linearização não é suficiente para determiná-la. O intervalo de estabilidade de x^* é $-1 < |\Lambda| < 1$, centrado em $|\Lambda| = 0$. Nesse último caso, o ponto fixo x^* é dito superestável por estar o mais afastado possível dos extremos do intervalo.

Assim como vimos no caso linear, o sinal de Λ determina o tipo de comportamento dos pontos da órbita:

$0 < \Lambda < 1$**:** convergência monotônica ao ponto fixo;

$-1 < \Lambda < 0$**:** convergência oscilatória;

$\Lambda > 1$**:** divergência monotônica do ponto fixo;

$\Lambda < -1$**:** divergência oscilatória.

Como um exemplo, considere o mapa da tenda (3.17). Como $|\Lambda| = |f'(x)| = 2 > 1$ para $0 \leq x \leq 1$, os pontos fixos $x_a^* = 0$ e $x_b^* = 2/3$ são instáveis. A divergência de $x_a^* = 0$ é monotônica, ao passo que, para $x_b^* = 2/3$, é oscilatória.

2.6.1 Mapa logístico

O mapa logístico $f(x) = rx(1-x)$ tem dois pontos fixos: $x_a^* = 0$, e $x_b^* = 1 - 1/r$. Como a derivada é $f'(x) = r(1-2x)$, o fator de estabilidade para $x_a^* = 0$, é

$$\Lambda(x_a^*) = r, \tag{2.27}$$

enquanto, para o ponto fixo $x_b^* = 1 - 1/r$, é

$$\Lambda(x_b^*) = 2 - r. \tag{2.28}$$

Como impusemos que $r > 0$, o ponto fixo $x_a^* = 0$ será atrativo desde que $r < 1$, caso contrário será repulsivo. Quando $r = 1$ sabemos que o critério

linear adotado não é suficiente para determinar a estabilidade. Além disso, tanto a convergência como a divergência serão monotônicas.

Já para o segundo ponto fixo o intervalo de estabilidade é $-1 < 2-r < 1$, ou seja, $1 < r < 3$. Para $0 < r < 1$ o valor de $x_b^* = 1 - 1/r$ é negativo, portanto ele nem existe nesse intervalo. Para $1 < r < 2$ a convergência a x_b^* é monotônica, enquanto para $2 < r < 3$ ela é oscilatória. Em particular, no ponto $r = 2$ o ponto fixo é superestável. Finalmente, para $r > 3$ o ponto fixo é repulsivo, com divergência também oscilatória.

Há dois valores importantes onde há uma mudança abrupta no ponto fixo: em $r = 1$ o ponto fixo na origem torna-se instável, ao passo que em $r = 3$ o segundo ponto fixo também muda sua estabilidade. Ambos são exemplos de bifurcações, que estudaremos mais à frente.

2.7 Órbitas periódicas

Recordemos que um ponto fixo x^* de um mapa $x_{n+1} = f(x_n)$ mapeia a si próprio após uma iteração, ou seja, tal que $x^* = f(x^*)$. Uma órbita periódica de período 2, também chamada 2-ciclo, é um conjunto de dois pontos $\{x_0^*, x_1^*\}$ tais que um mapeia no outro, e vice-versa:

$$x_1^* = f(x_0^*), \qquad x_0^* = f(x_1^*), \tag{2.29}$$

Como $x_1^* = f(x_0^*) = f(f(x_1^*)) = f^{[2]}(x_1^*)$, então x_1^*, assim como x_0^*, são pontos fixos da *segunda iterada* do mapa $f(x)$, portanto são soluções da equação

$$x^* = f^{[2]}(x^*). \tag{2.30}$$

Um exemplo simples é o mapa linear para $\alpha = -1$ e $\beta \neq 0$, $f(x) = -x + \beta$. Dada a condição inicial x_0 temos, da solução geral (2.11), que as iterações sucessivas do mapa são

$$x_1 = \beta - x_0, \qquad x_2 = x_0, \quad x_3 = \beta - x_0, \cdots,$$

de forma que $\{x_0, \beta - x_0\}$ é uma órbita de período 2 para qualquer x_0, o que faz com que esta situação seja exceptional.

Um outro exemplo é o mapa da tenda, onde a segunda iterada é dada por (2.19). Como há quatro intervalos onde é definida a segunda iterada, precisamos analisar os quatro casos possíveis [Fig. 2.4(b)]:

1. $x \in [0, 1/4]$: a equação $x^* = 4x^*$ tem apenas a solução $x_a^* = 0$, que é um dos pontos fixos do mapa;

2. $x \in (1/4, 1/2]$: a equação do primeiro grau $x^* = 2(1 - 2x^*)$ tem raiz $x_0^* = 2/5$, que é um dos pontos do 2-ciclo;

3. $x \in (1/2, 3/4]$: o segundo ponto fixo $x_b^* = 2/3$ do mapa é a solução de $x^* = 2[1 - 2(1 - x^*)]$;

4. $x \in (3/4, 1]$: o segundo ponto do 2-ciclo, $x_1^* = 4/5$ é raiz da equação $x^* = 4(1 - x^*)$.

Observe que há quatro pontos com essa propriedade, dos quais dois já são os pontos fixos, restando apenas dois pontos que compõem a órbita de período 2: $\{2/5, 4/5\}$.

Podemos generalizar essa discussão, definindo uma órbita periódica de período m (ou m-ciclo) como um conjunto de m pontos:

$$\{x_0^*, x_1^*, \ldots, x_{m-1}^*\}, \tag{2.31}$$

tais que um mapeia o outro de forma cíclica, ou seja

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* &= f(x_i^*), \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots m-1), \\ x_0^* &= f(x_{m-1}^*). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Aplicando sucessivamente as condições acima a qualquer um dos pontos do m-ciclo, por exemplo x_{m-1}^*, vemos que

$$x_{m-1}^* = f(x_{m-2}^*) = f(f(x_{m-3}^*)) = \cdots = f^{[m-1]}(x_0^*) = f^{[m]}(x_{m-1}^*), \tag{2.33}$$

de modo que os pontos de uma órbita de período m são pontos fixos da m-ésima iterada do mapa

$$x^* = f^{[m]}(x^*). \tag{2.34}$$

No entanto, assim como vimos para o mapa da tenda, nem todos os pontos fixos de $f^{[m]}$ pertencem a um m-ciclo. Boa parte deles são pontos fixos de iteradas anteriores, ou pertencem a ciclos de período mais baixo. Chamamos de pontos de período m (ou m-periódicos) do mapa $f(x)$ os pontos fixo da m-ésima iterada do mapa, dados por (2.34).

Para ilustrar a diferença entre pontos periódicos e pontos de uma órbita periódica, vamos tomar como exemplo o mapa da tenda. A terceira iterada do modelo da tenda, $f^{[3]}(x)$ tem quatro vértices, delimitando oito regiões, de forma que há um total de oito pontos de período 3 [Fig. 2.4(c)]. Desses oito pontos, dois já são os pontos fixos do mapa, mas não estão aqui incluidos os pontos do 2-ciclo, já que 2 não divide 3 (isto é, são primos entre si). Então restam $8 - 2 = 6$ pontos de período 3 para $f(x)$. Como cada 3-ciclo contém 3 pontos, há dois 3-ciclos. Um deles é $\{2/7, 4/7, 6/7\}$, como pode-se mostrar facilmente.

De forma geral, há 2^m pontos fixos da m-ésima iterada do mapa, $f^{[m]}(x)$. Alguns desses pontos são também pontos fixos de $f^{[k]}(x)$ com $k < m$; os pontos restantes juntando-se para formar órbitas de período m. Para encontrar o número de m-ciclos (órbitas de período m), nós subtraimos o número total de pontos de período k para todos os valores de $k < m$ e tais que k divide m. Por exemplo, quando $m = 4$, há $2^4 = 16$ pontos fixos da quarta iterada $f^{[4]}(x)$,

ou ainda 16 pontos de período 4. Dois desses pontos também são pontos fixos de $f(x)$, e dois outros são pontos fixos de $f^{[2]}(x)$. Sobram $16-2-2=12$ pontos fixos de $f^{[4]}(x)$ que formam $12/4=3$ órbitas de período quatro.

Pontos finalmente períodicos são aqueles cujas imagens pelo mapa $f(x)$ levam, após um número finito de iterações, a um ponto periódico do mapa. Por exemplo, $x=7/10$ é um ponto finalmente periódico para o mapa da tenda, pois suas imagens levam, após duas iteradas de $f(x)$, a um 2-ciclo:

$$f(7/10)=3/5, \quad f(3/5)=4/5, \quad f(4/5)=2/5, \quad f(2/5)=4/5,\cdots$$

Pode-se mostrar que, para o mapa da tenda, se x é um número racional pertencente ao intervalo $(0,1)$, então x é um ponto finalmente periódico e vice-versa [19]. Além disso, se $x=k/m$, onde k é um inteiro par e m é um inteiro ímpar, então x é ponto periódico, sendo a recíproca verdadeira.

2.8 Estabilidade das órbitas periódicas

Assim como os pontos fixos, também as órbitas periódicas podem ser atrativas ou repulsivas. A análise de estabilidade de uma órbita de período m, ou m-ciclo, pode ser feita a partir da observação que todos os m pontos dessa órbita são pontos fixos do mapa m vezes iterado $f^{[m]}(x)$. Caso um destes pontos seja estável, todos os outros também o serão, e o ciclo como um todo será assintoticamente estável. A mesma observação vale para os outros casos de estabilidade tal que, desta forma, podemos adaptar o critério deduzido na seção anterior.

O fator de estabilidade, no caso de órbitas de período m, é a derivada da m-ésima iterada do mapa, calculada em qualquer um dos pontos do m-ciclo, por exemplo x_0^*:

$$\Lambda_m \equiv \left.\frac{df^{[m]}(x)}{dx}\right|_{x=x_0^*}, \tag{2.35}$$

Sendo as iteradas sucessivas nada mais que funções compostas, e usando a propriedade

$$f^{[m]}(x)=f(f^{[m-1]}(x)) \tag{2.36}$$

podemos empregar a regra da cadeia para computar a derivada da m-ésima

iterada do mapa.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{df^{[m]}(x)}{dx}\right|_{x=x_0^*} &= \left.\frac{df(f^{[m-1]}(x))}{dx}\right|_{x=x_0^*} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=f^{[m-1]}(x_0^*)} \left.\frac{df^{[m-1]}(x)}{dx}\right|_{x=x_0^*} \\
&= \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_{m-1}^*} \left.\frac{df^{[m-1]}(x)}{dx}\right|_{x=x_0^*} \\
&= \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_{m-1}^*} \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_{m-2}^*} = \left.\frac{df^{[m-2]}(x)}{dx}\right|_{x=x_0^*} \\
&= \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_{m-1}^*} \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_{m-2}^*} \cdots \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_1^*} \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0^*}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

onde usamos que

$$x_n^* = f^{[m]}(x_0^*), \qquad x_{m-1}^* = f^{[m-1]}(x_0^*), \ldots \tag{2.38}$$

O fator de estabilidade será

$$\Lambda_m = (f^{[m]})'(x_i^*) = \prod_{i=0}^{m-1} \Lambda(x_i^*). \tag{2.39}$$

Observe que o produto das derivadas da função em cada ponto do ciclo será o mesmo: isso significa que a estabilidade de cada ponto será a mesma, e podemos então falar na estabilidade do ciclo como um todo.

Assim, os pontos do m-ciclo serão:

1. assintoticamente estáveis se $|\Lambda_m| < 1$,
2. superestáveis se $\Lambda_m = 0$,
3. instáveis caso $|\Lambda_m| > 1$.

tal que tenhamos

1. convergência monotônica se $0 < \Lambda_m < 1$,
2. convergência oscilatória se $-1 < \Lambda_m < 0$,
3. divergência monotônica se $\Lambda_m > 1$,
4. divergência oscilatória se $\Lambda_m < -1$.

Finalmente, se $|\Lambda_m| = 1$, a linearização não é suficiente para decidir sobre a estabilidade do m-ciclo.

No exemplo do mapa da tenda (3.17), vimos que a m-ésima iterada do mapa consiste numa sucessão de m tendas de altura 1 e largura da base

$1/2^m$, de forma que $|(f^{[m]})'| = |\Lambda_m| = 2^m$ que é sempre maior que 1 para $m > 0$. Portanto todas as órbitas de período m que possamos encontrar para o mapa da tenda serão repulsivas (instáveis).

Finalmente, no exemplo do 2-ciclo do mapa linear para $\alpha = -1$, como $|\Lambda| = 1$, o critério de linearização falha. Neste caso é fácil ver, pelo diagrama de escada, que trata-se de um equilíbrio indiferente, pois o 2-ciclo $\{x_0, \beta - x_0\}$ existe para qualquer condição inicial.

2.8.1 Mapa logístico

Retornando ao mapa logístico $f(x) = rx(1-x)$, vamos analisar agora a existência e a estabilidade da órbita de período 2: $\{x_0^*, x_1^*\}$, que são pontos fixos da segunda iterada do mapa (2.17). Impondo a condição $x^* = f^{[2]}(x^*)$ chegamos à seguinte equação algébrica de quarto grau

$$x^* = r^2\,[-r{x^*}^4 + 2r{x^*}^3 - (1+r){x^*}^2 + x^*]. \tag{2.40}$$

Pelo teorema fundamental da álgebra, esta equação terá quatro raízes, reais ou complexas. Sabemos, porém, que os pontos fixos da primeira iterada do mapa $f(x)$ também são pontos fixos da segunda iterada $f^{[2]}(x)$, já que

$$f^{[2]}(x^*) = f(f(x^*)) = f(x^*) = x^*. \tag{2.41}$$

Logo, das quatro soluções esperadas para (2.40), duas já são conhecidas, a saber: $x_a^* = 0$, e $x_b^* = 1 - (1/r)$.

Assim, podemos reescrever a equação do quarto grau como

$$(x - x_a^*)(x - x_b^*)(x - x_0^*)(x - x_1^*) = 0, \tag{2.42}$$

onde $x_{0,1}^*$ são os pontos da órbita de período 2, que são as soluções da equação do segundo grau:

$$-r^2(x^*)^2 + r(1+r)x^* - (r+1) = 0, \tag{2.43}$$

a saber,

$$x_{0,1}^* = \frac{1}{2}\left\{-r(r+1) \pm \sqrt{r^2(r+1)^2 - 4r^2(r+1)}\right\}. \tag{2.44}$$

O discriminante desta solução é

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2(r+1)^2 - 4r^2(r+1) \\ &= r^2(r^2 - 2r - 3). \end{aligned} \tag{2.45}$$

com zeros em $r = -1$ e $r = 3$. Logo, se $-1 < r < 3$ o discriminante será negativo e os valores de $x_{0,1}^*$ não serão reais, ou seja, para $0 < r < 3$ não haverá um 2-ciclo. Esta aparecerá apenas para $r > 3$:

$$x_{0,1}^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2r} \pm \frac{1}{2r}\sqrt{(r-3)(r+1)}. \tag{2.46}$$

A estabilidade do 2-ciclo é determinada pelo fator

$$\begin{aligned}\Lambda_2 &= f'(x_0^*)f'(x_1^*) = r^2(1-2x_0^*)(1-2x_1^*)\\ &= r^2 - 2r^2(x_0^*+x_1^*) + 4r^2x_0^*x_1^*\\ &= r^2 - 2r^2\left(1+\frac{1}{r}\right) + 4r\left(1+\frac{1}{r}\right)\\ &= -r^2+2r+4. \end{aligned} \tag{2.47}$$

O 2-ciclo será atrativo (assintoticamente estável) se

$$|\Lambda_2| = |r^2-2r-4| = |(r-1)^2-5| < 1, \tag{2.48}$$

que é equivalente ao par de inequações

$$-1 < (r-1)^2 - 5 < 1. \tag{2.49}$$

Resolvendo para r, temos que o intervalo de valores para os quais o ciclo é estável é

$$3 < r < 1+\sqrt{6} \approx 3,4495. \tag{2.50}$$

2.9 Bifurcações em mapas unidimensionais

Os sistemas dinâmicos têm usualmente um ou mais parâmetros que podem ser variados, alterando assim a natureza e as propriedades tanto de pontos fixos como de órbitas periódicas. Uma bifurcação consiste numa mudança na existência e/ou estabilidade de um ponto fixo ou órbita periódica, à medida em que um parâmetro é variado. Neste capítulo estudaremos as bifurcações de pontos fixos e órbitas periódicas de mapas unidimensionais da forma geral

$$x_{n+1} = f(x_n; p), \tag{2.51}$$

onde p é o parâmetro variável. No mapa logístico, por exemplo, é o parâmetro r que faz este papel.

Consideramos um ponto fixo x^* do mapa (2.51), que satisfaz

$$x^* = f(x^*; p), \tag{2.52}$$

para um dado valor do parâmetro p. O fator de estabilidade do mapa neste ponto fixo é

$$\Lambda(p) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*,p} \tag{2.53}$$

Na aproximação linear, o ponto fixo x^* é atrativo (assintoticamente estável) se $|\Lambda| < 1$ e repulsivo (instável) se $|\Lambda| > 1$. Lembrando que os pontos de uma órbitas de período m são pontos fixos da m-ésima iterada do mapa (2.51),

as mesmas observações anteriores são válidas se considerarmos o fator de estabilidade correspondente Λ_m, dado por (2.39).

Portanto, um ponto fixo x^* muda sua estabilidade quando o parâmetro p tem um valor específico p^*, tal que $|\Lambda(p^*)| = 1$. Dizemos, então, que $f(x;p)$ apresenta uma bifurcação no ponto p^*. Outra alteração possível na bifurcação é que pontos fixos podem ser criados ou destruídos quando $p = p^*$. Conforme o valor do fator de estabilidade podemos ter duas classes de bifurcações em mapas unidimensionais: de primeira espécie, quando $\Lambda(p^*) = +1$ e de segunda espécie, se $\Lambda(p^*) = -1$.

É importante destacar que os resultados a serem obtidos para bifurcações empregam a linearização do mapa. Assim, as bifurcações de primeira e segunda espécie são válidas localmente, ou seja, nas vizinhanças do ponto fixo x^* e do ponto de bifurcação p^*. Supomos, ainda, que o mapa f seja uma função suficientemente suave no seu domínio: ela deve ser contínua e diferenciável ao menos três vezes.

Devido às restrições que foram impostas, podemos trabalhar com *formas normais* dos mapas, que são expressões elementares do mapa f nas vizinhanças do ponto de bifurcação (x^*, p^*). Há três tipos básicos de bifurcações de primeira espécie: transcrítica, tangente e forquilha. Há um tipo de bifurcação de segunda espécie, que é a bifurcação de duplicação do período. Para cada uma teremos uma forma normal diferente, que trataremos separadamente.

2.9.1 Bifurcação transcrítica

A forma normal para a bifurcação transcrítica é

$$f(x;p) = x + px \pm x^2. \tag{2.54}$$

Considerando, inicialmente, o sinal positivo, teremos o mapa unidimensional

$$x_{n+1} = x_n + px_n + x_n^2, \tag{2.55}$$

cujos pontos fixos são $x_a^* = 0$ e $x_b^* = -p$. O fator de estabilidade é

$$\Lambda(x;p) = 1 + p + 2x \tag{2.56}$$

Para o ponto fixo $x_a^* = 0$ o fator de estabilidade é $\Lambda(x_a^*, p) = 1 + p$, que será estável se $|1 + p| < 1$, ou seja, se $-2 < p < 0$; e instável se $p > 0$ ou $p < -2$. O fator de estabilidade do outro ponto fixo é $\Lambda(x_b^*, p) = 1 - p$, e este será estável se $-2 < p < 2$; e instável se $p > 2$ ou $p < -2$.

O ponto de bifurcação será $p^* = 0$, de modo que $\Lambda(x_{a,b}^* = 0, p^* = 0) = 1$, e a bifurcação transcrítica é, de fato, de primeira espécie. Para $p < 0$ temos que x_a^* é estável, e x_b^* é instável; ao passo que, para $p > 0$, x_a^* torna-se instável e x_b^*, estável. Os pontos fixos permutam suas estabilidades no ponto de bifurcação [Fig. 7.7(a)].

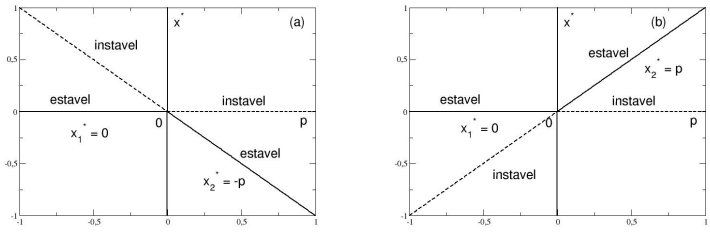

Figura 2.5: Bifurcações transcríticas (a) direta, e (b) reversa.

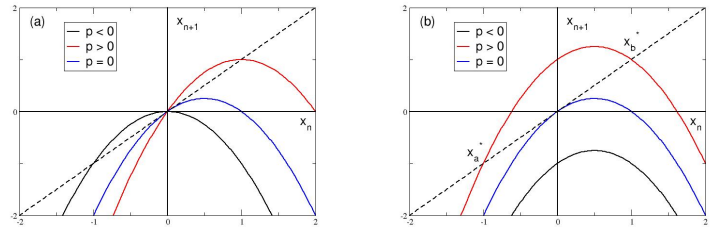

Figura 2.6: Diagramas de escada para uma (a) bifurcação transcrítica direta, e (b) bifurcação tangente reversa.

Vamos, agora, explorar o sinal negativo na forma normal (2.54), de modo que

$$x_{n+1} = x_n + px_n - x_n^2. \tag{2.57}$$

O leitor poderá verificar que os pontos fixos $x_a^* = 0$ e $x_b^* = p$ também trocam sua estabilidade no ponto de bifurcação $p^* = 0$ [Fig. 7.7(b)]. A natureza desta bifurcação pode, também, ser entendida a partir dos respectivos diagramas de escada para p maior, igual ou menor que zero [Fig. 2.6(a)].

Um exemplo de bifurcação transcrítica ocorre no mapa logístico $f(x;r) = rx(1-x)$ no ponto $r^* = 1$, desde que nós admitamos trabalhar com valores negativos de $f(x;r)$. Nesse caso, tanto quando $0 < r < 1$ como quando $r > 1$ haverá dois pontos fixos: $x_a^* = 0$ e $x_b^* = 1 - (1/r)$. O fator de estabilidade será $\Lambda(r) = r(1-2x)$. Como

$$\Lambda(x_a^*) = r, \qquad \Lambda(x_b^*; r) = 2 - r, \tag{2.58}$$

se $0 < r < 1$ então x_a^* é estável e x_b^*, instável. Já se $r > 1$ a situação se inverte: x_a^* fica instável, e x_b^*, estável [Fig. 2.7]. Exatamente no ponto de bifurcação $r^* = 1$ temos que $\Lambda(r^*) = 1$, para ambos os pontos fixos.

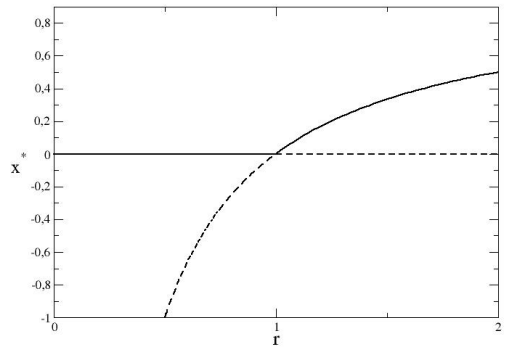

Figura 2.7: Bifurcação transcrítica no mapa logístico em $r^* = 1$.

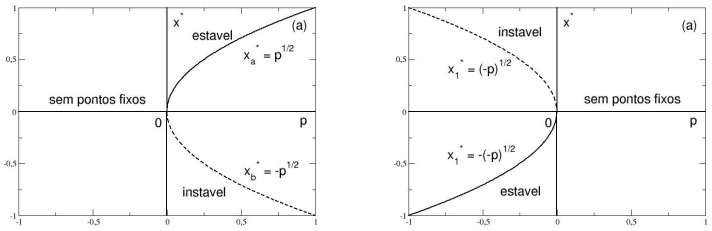

Figura 2.8: Bifurcações tangentes (a) direta, e (b) reversa.

2.9.2 Bifurcação tangente

Uma bifurcação tangente terá a forma normal

$$f(x;p) = x + p \pm x^2. \tag{2.59}$$

Considerando o sinal negativo na expressão acima temos o mapa

$$x_{n+1} = x_n + p - x_n^2, \tag{2.60}$$

cujos pontos fixos são $x^*_{a,b} = \pm\sqrt{p}$, com o fator de estabilidade

$$\Lambda(x;p) = 1 - 2x \tag{2.61}$$

Observe que, se $p < 0$, não há pontos fixos. Para $p > 0$, os fatores de estabilidade são $\Lambda(x^*_{a,b}, p) = 1 \mp 2\sqrt{p}$, de modo que $x^*_a = \sqrt{p}$ é estável e $x^*_b = -\sqrt{p}$ é instável. O ponto de bifurcação $p^* = 0$, é tal que $\Lambda(x^*_{a,b}, p^* = 0) = 1$, e

a bifurcação transcrítica é de primeira espécie. Portanto, na bifurcação surgem dois pontos fixos, um estável outro instável, cujas curvas no diagrama de bifurcação tangenciam o eixo vertical no ponto de bifurcação $(x^* = 0, p^* = 0)$ [Fig. 2.8(a)].

Tomando o sinal positivo na forma normal (2.54):

$$x_{n+1} = x_n + p + x_n^2, \tag{2.62}$$

de tal maneira que os pontos fixos $x^*_{a,b} = \pm\sqrt{-p}$ só existem para $p < 0$, sendo um instável e outro estável, enquanto para $p > 0$ os pontos fixos desaparecem [Fig. 2.8(b)]. Os respectivos diagramas de escada deste tipo de bifurcação são mostrados na Fig. 2.6(b). Se $p < 0$ o gráfico da primeira iterada do mapa (2.68) não intercepta a reta de 45°, enquanto para $p > 0$ há duas interseções, correspondentes aos pontos fixos $x^*_{a,b}$. Estes coalescem no ponto de bifurcação $p^* = 0$, onde o gráfico da primeira iterada é tangente à reta de 45°.

Vamos considerar o seguinte exemplo:

$$x_{n+1} = f(x_n; p) = pe^{x_n}, \tag{2.63}$$

cujos pontos fixos são dados pelas soluções da equação transcendente

$$x^* - pe^{x^*} = 0, \tag{2.64}$$

que pode ou não ter soluções, dependendo do valor de p. O fator de estabilidade destes pontos fixos é $\Lambda = pe^{x^*}$.

A bifurcação tangente ocorre no ponto $p^* = 1/e \approx 0,367$. Na Figura 2.9 mostramos a primeira iterada do mapa (2.63) para valores maiores e menores que p^*. Se $p = 0,2 < p^*$ o gráfico de $f_p(x)$ intercepta a primeira bissetriz em dois pontos fixos: $x^*_a \approx 0,25$ e $x^*_b \approx 2,5$ [Fig. 2.9(a)]. Como

$$|0,2e^{x^*_1}| \approx 0,26 < 1, \qquad |0,2e^{x^*_2}| \approx 2,44 > 1,$$

os pontos x^*_a e x^*_b são, respectivamente, estável e instável. No ponto de bifurcação p^* o ponto fixo é $x^* = 1$, e o gráfico de $f(x)$ tangencia a reta de 45°. Quando $p \to p^*$, os pontos fixos x^*_a e x^*_b aproximam-se e colidem no ponto de tangência $x^* = 1$ [Fig. 2.9(b)]. Para $p > p^*$ não há solução da equação (2.64) e, portanto, não há ponto fixo [Fig. 2.9(c)].

2.9.3 Bifurcação forquilha

A forma normal de uma bifurcação forquilha é

$$f(x; p) = x + px \pm x^3. \tag{2.65}$$

Considerando o sinal negativo temos a chamada bifurcação forquilha *supercrítica*

$$x_{n+1} = x_n + px_n - x_n^3, \tag{2.66}$$

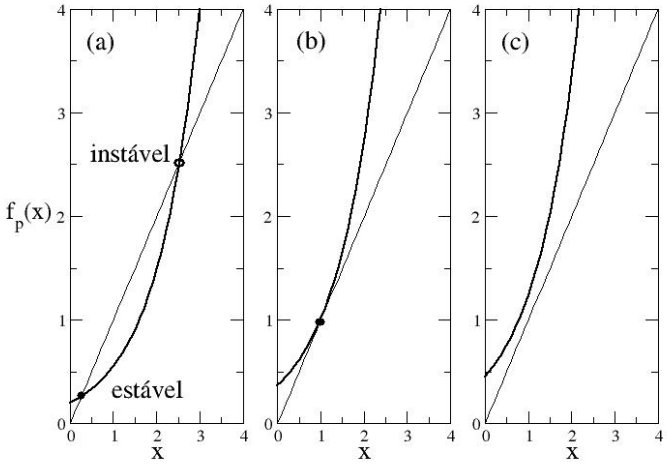

Figura 2.9: Bifurcação tangente no mapa exponencial para (a) $p = 0,2 < p^*$; (b) $p = p^* = 1/e$; (c) $p = 0,45 > p^*$.

cujos pontos fixos são $x_a^* = 0$ e $x_{b,c}^* = \pm\sqrt{p}$. O fator de estabilidade é

$$\Lambda(x;p) = 1 + p - 3x^2. \tag{2.67}$$

No ponto fixo $x_a^* = 0$ o fator de estabilidade é $\Lambda = 1 + p$, tal que ele é estável se $-2 < p < 0$ e instável caso $p > 0$ ou $p < -2$. O fator de estabilidade dos pontos fixos $x_{b,c}^* = \pm\sqrt{p}$ é $\Lambda = 1 - 2p$, de modo que ambos são estáveis se $p < 0$. Para $p < 0$ eles não existem. No ponto de bifurcação $p^* = 0$ o ponto $x_a^* = 0$ passa de estável para instável, e emergem os pontos fixos estáveis $x_{b,c}^*$ [Fig. 2.10(a)]. Os diagramas de escada correspondentes são mostrados na

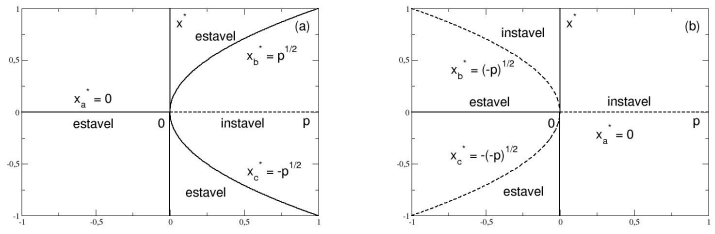

Figura 2.10: Bifurcação forquilha (a) supercrítica, e (b) subcrítica.

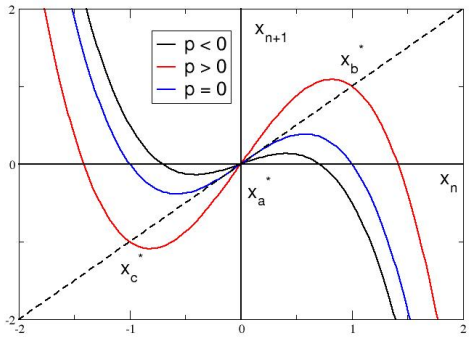

Figura 2.11: Diagrama de escada para uma bifurcação forquilha supercrítica.

Fig. **??**.

O sinal positivo em (2.54) é a forma normal de uma bifurcação forquilha subcrítica:

$$x_{n+1} = x_n + px_n + x_n^3. \tag{2.68}$$

No diagrama de bifurcação para este caso [Fig. 2.10(b)] observamos, para $p < 0$, três pontos fixos, dos quais $x_a^* = 0$ é estável, e $x_{b,c}^* = \pm\sqrt{-p}$ são ambos instáveis. Quando $p > 0$ resta apenas x_a^*, que é instável.

2.9.4 Bifurcações de duplicação do período

As bifurcações de segunda espécie são aquelas para as quais o fator de estabilidade no ponto de bifurcação é igual a -1. Há apenas um tipo pertencente a esta classe, que é a bifurcação de duplicação de período. Pelo próprio nome ela envolve pontos fixos e/ou órbitas de período m. Em geral, no ponto de bifurcação p^* ocorrerão duas coisas:

- uma órbita de período m, que é estável para $p < p^*$, torna-se instável para $p > p^*$;
- surge, para $p > p^*$, uma órbita estável de período $2m$.

No caso particular $m = 1$, um ponto fixo estável torna-se instável, e emerge, após a bifurcação, uma órbita estável de período 2.

A forma normal para a bifurcação de duplicação do período, neste caso, é

$$f(x;p) = -x - px + x^3, \tag{2.69}$$

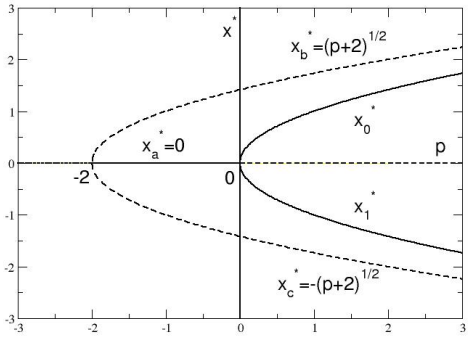

Figura 2.12: Bifurcação de duplicação do período

tal que

$$x_{n+1} = -x_n - px_n + x_n^3, \tag{2.70}$$

que tem três pontos fixos: $x_a^* = 0$ e $x_{b,c}^* = \pm\sqrt{p+2}$. Estes últimos só existem se $p > -2$.

O fator de estabilidade é

$$\Lambda(x;p) = -1 - p + 3x^2, \tag{2.71}$$

que, no ponto fixo $x_a^* = 0$, é $\Lambda = -1 - p$, de sorte que $x_a^* = 0$ será estável se $-2 < p < 0$, e instável se $p < -2$ ou $p > 0$. Os pontos fixos $x_{b,c}^* = \pm\sqrt{p+2}$ têm ambos o fator de estabilidade $\Lambda = 5 + 2p$, e portanto serão estáveis desde que $-3 < p < -2$. Assim, para $p > -2$ todos os três pontos fixos serão instáveis [Fig. 2.12].

No ponto de bifurcação $p^* = 0$ o fator de estabilidade no ponto fixo é $\Lambda = -1$, o que confirma estarmos lidando com uma bifurcação de segunda espécie. No entanto, para $x_{b,c}^* = \pm\sqrt{p+2}$ o fator de estabilidade é diferente. Para resolver esta dificuldade, consideramos a segunda iterada do mapa $f(x;p)$:

$$\begin{aligned} f^{[2]}(x;p) &= f(f(x);p) \\ &= (-1-p)(-x-px+x^3) + (-x-px+x^3)^3, \end{aligned} \tag{2.72}$$

que resulta numa formidável expressão algébrica envolvendo potências de x e de p. Mas, como a descrição que estamos fazendo das bifurcações restringe-se à vizinhança do ponto de bifurcação, podemos desprezar potências altas de x e p, retendo apenas os termos essenciais na forma normal, que é

$$f^{[2]}(x,p) = x + p(2+p)x - 2x^3 + o(x^4), \tag{2.73}$$

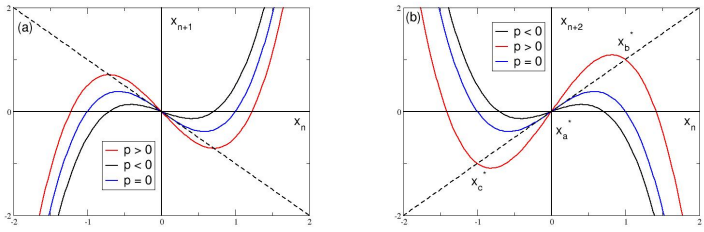

Figura 2.13: Diagramas de escada para (a) a primeira e (b) a segunda iteradas da forma normal para uma bifurcação de duplicação do período.

onde o símbolo $o(x^4)$ indica que estamos desprezando todos os termos na expansão de (2.72) contendo potências de grau igual ou superior a 4 (excluindo, também, termos do tipo x^2p^2, etc.). Efetuando este truncamento, os pontos fixos da segunda iterada são as raízes da equação

$$x^* = f^{[2]}(x^*, p) = x^* + p(2+p)x^* - 2(x^*)^3 \tag{2.74}$$

que fornece $x_a^* = 0$, e que já é o ponto fixo, como esperado, e $x_{b,c}^* \approx \pm\sqrt{p}$, onde a aproximação é justificável pois estamos considerando a vizinhança do ponto de bifurcação $p^* = 0$. Estes pontos compõem uma órbita periódica de período 2. Este 2-ciclo só existe para $p > 0$.

O fator de estabilidade do 2-ciclo é

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= \Lambda(x_b^*)\Lambda(x_c^*) \\ &= [-1-p+3(x_b^*)^2][-1-p+3(x_c^*)^2] = (1-2p)^2, \end{aligned} \tag{2.75}$$

de tal modo que, próximo ao ponto de bifurcação ($p^* \gtrsim 0$) temos que $\Lambda_1 > 1$, e o ciclo é estável. No ponto de bifurcação o fator de estabilidade é $\Lambda(p^*) = -1$, como esperado. No diagrama de bifurcações da Fig. 2.12, mostramos a evolução da estabilidade dos pontos fixos $x_{a,b,c}^*$. A bifurcação de duplicação de período corresponde ao ponto $(x^* = 0, p^* = 0)$.

A Fig. 2.13(a) mostra o gráfico da primeira iterada do mapa (2.70) nas vizinhanças do ponto de bifurcação. O fator de estabilidade $\Lambda = f'(x)$ é igual à inclinação do gráfico de $f(x)$, ou seja, a tangente do ângulo entre o gráfico e a reta tangente a ele em cada ponto. Assim, à medida em que p varia entre valores menores e maiores que zero, a inclinação do gráfico, que é negativa, aumenta em módulo passando pelo valor $\Lambda = -1$ no ponto de bifurcação. Já a segunda iterada, mostrada na Fig. 2.13(b), mostra os dois pontos fixos que formam o 2-ciclo surgindo para $p > 0$, na medida em que a inclinação do gráfico de $f^{[2]}(x)$ na origem supera $\Lambda = 1$.

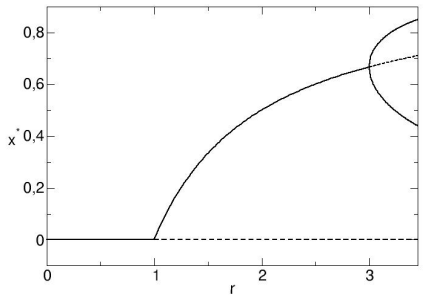

Figura 2.14: Diagrama de bifurcações do mapa logístico, para $0 < r < 1+\sqrt{6}$. Linhas cheias e tracejadas indicam órbitas estáveis e instáveis, respectivamente.

2.10 Bifurcações de duplicação do período no mapa logístico

Na Figura 2.14 apresentamos o diagrama de bifurcações do mapa logístico

$$x_{n+1} = f(x_n; r) = rx_n(1-x_n), \tag{2.76}$$

no intervalo $0 < r < 1+\sqrt{6}$. O diagrama de bifurcações é um gráfico que mostra os pontos fixos e/ou órbitas periódicas em função do parâmetro r. De acordo com a análise de estabilidade que fizemos anteriormente, no intervalo $0 < r < 1$ só existe o ponto fixo $x_a^* = 0$, e ele é atrativo (estável). No ponto $r = 1$ ele torna-se repulsivo (instável), e emerge o segundo ponto fixo estável $x_b^* = 1-(1/r)$.

No ponto $r = 3$ este segundo ponto também perde estabilidade e surge um 2-ciclo estável $\{x_0^*, x_1^*\}$ dado por (2.46). Portanto, neste ponto ($r^* = 3$) ocorre uma bifurcação de duplicação de período. Este 2-ciclo permanece atrativo até $r = 1+\sqrt{6} \approx 3,45$, quando ocorre nova bifurcação de duplicação de período (não mostrada na Figura).

Para entender o que ocorre antes e depois da bifurcação de duplicação de período no mapa logístico em $r^* = 3$ temos que analisar o comportamento da primeira e segunda iteradas do mapa. Nas Figuras 2.15(a) e (b) mostramos a primeira iterada do mapa em $r = 2,9 < r^*$ e $3,1 > r^*$. O ponto fixo na origem é instável em ambos os casos, mas o ponto fixo x_b^* passa de estável para instável, pois a inclinação da tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto fixo passa de menor para maior que $\pi/4$ radianos. Assim, o fator de estabilidade

$$|\Lambda(x_b^*)| = |(f_r)'(x_b^*)| = |r(1-2x_b^*)| \tag{2.77}$$

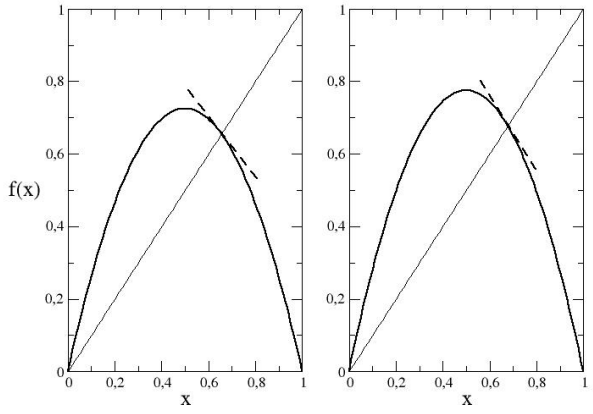

Figura 2.15: Primeira iterada do mapa logístico para (a) $r = 2,9 < r^*$ e (b) $r = 3,1 > r^*$. Observe o aumento da inclinação da tangente ao gráfico no ponto fixo (linha tracejada).

passa de $0,9$ no primeiro caso para $1,1$ no segundo. Exatamente no ponto de bifurcação $r^* = 3$ a derivada da primeira iterada é negativa, e de módulo unitário:

$$f'(x_b^*, r^*) = 3\,(1-4/3) = -1 \tag{2.78}$$

Na figura 2.16 mostramos a segunda iterada do mapa logístico,

$$f^{[2]}(x;r) = rf(x;r)[1-f(x;r)] = r^2x(1-x)[1-rx(1-x)], \tag{2.79}$$

no entorno do ponto de bifurcação. Para $r < 3$ o gráfico de $f^{[2]}(x;r)$ intercepta a primeira bissetriz apenas nos pontos fixos, não havendo portanto um 2-ciclo [Fig. 2.16(a)]. Quando atingimos o ponto de bifurcação o gráfico tangencia a primeira bissetriz [Fig. 2.16(b)]. Após o ponto de bifurcação aparecem dois novos pontos periódicos, que pertencem ao 2-ciclo estável [Fig. 2.16(c)].

De fato, como a derivada da segunda iterada é

$$\left(f^{[2]}\right)'(x;r) = r^2(1-2x)[1-rx(1-x)] + r^3x(1-x)(-1+2x), \tag{2.80}$$

temos que, no ponto de bifurcação,

$$(f^{[2]})'(x_b^*;r^*) = 1, \tag{2.81}$$

tal que o fator de estabilidade do 2-ciclo, após a bifurcação, seja

$$|\Lambda_2| = |f_r'(x_0^*)f_r'(x_1^*)| < 1. \tag{2.82}$$

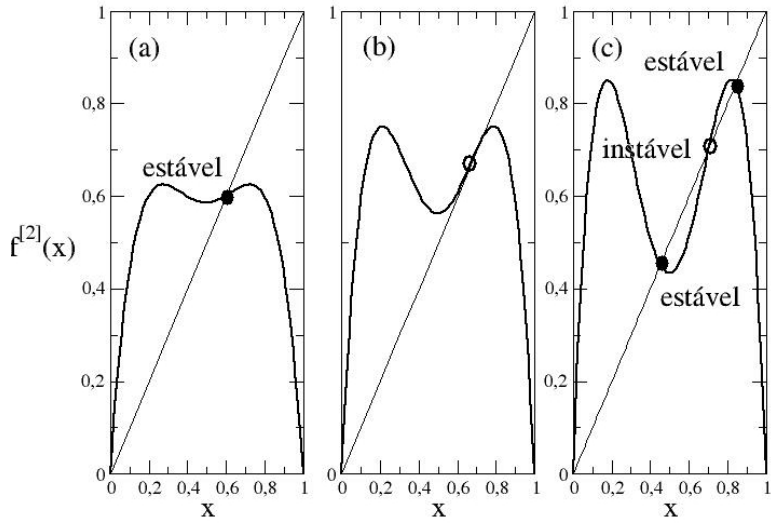

Figura 2.16: Segunda iterada do mapa logístico para (a) $r = 2,5$; (b) $3,0$; (c) $3,4$.

2.11 Cascata de bifurcações de duplicação de período

De maneira geral, o diagrama de bifurcações é um gráfico dos valores assintóticos da variável de estado x *versus* o parâmetro de controle. Por valores assintóticos entendemos o comportamento das órbitas após um intervalo de tempo suficientemente grande. Para o mapa logístico este diagrama foi obtido anteriormente para o intervalo $0 < r < 1 + \sqrt{6}$ (Fig. 2.14). Para obtermos o restante do diagrama, o que inclui o intervalo $1 + \sqrt{6} < r < 4$, usamos a seguinte metodologia:

1. Escolhemos um intervalo de valores para o parâmetro r. No caso do mapa logístico, $[0,4]$;
2. Fixamos o valor inicial do parâmetro r;
3. Escolhemos uma condição inicial x_0 (por exemplo, $0,2$);
4. Iteramos o mapa logístico $f(x;r) = rx(1-x)$ desconsiderando as primeiras, digamos, 100 iterações transitórias;
5. Continuamos iterando o mapa por mais, digamos 100 iterações onde nós presumimos observar o estado assintótico do sistema, e traçamos no diagrama os valores de x_t correspondentes (poderá haver em alguns casos uma grande superposição de pontos);
6. Incrementamos o valor do parâmetro r por uma pequena quantidade (por exemplo, $0,001$);

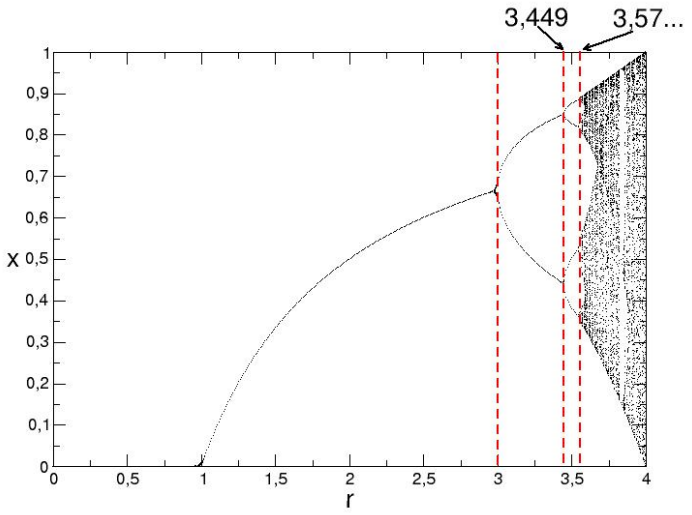

Figura 2.17: Diagrama de bifurcações do mapa logístico (**??**).

7. Repetimos os passos de (3) a (6) até o valor final do parâmetro r.

Observe que é necessário desconsiderar as iterações transitórias pois elas, caso superpostas no diagrama, poderiam mascarar os estados assintóticos, que são os resultados nos quais estamos interessados. Como o número de iterações transitórias pode variar bastante tanto com a escolha da condição inicial como com o valor do parâmetro (em particular, a duração dos transitórios pode ser extremamente grande na vizinhança de bifurcações), a indicação de um valor adequado para deve ser feita na base da tentativa-e-erro.

Outra característica importante dos diagramas obtidos numericamente é a ausência de órbitas periódicas instáveis. O motivo basicamente é a impossibilidade prática de um número com precisão finita ser colocado exatamente numa órbita instável.

Na figura 2.17 mostramos o diagrama de bifurcação do mapa logístico no intervalo $[0,4]$. Para $0 < r < 1$ o estado estacionário é o ponto fixo estável $x_a^* = 0$. Em $r = 1$ ocorre uma bifurcação transcrítica, e a origem torna-se instável. Em compensação emerge o segundo ponto estável $x_b^* = 1 - (1/r)$. Em $r = 3$ ocorre uma bifurcação de duplicação de período, na qual x_b^* torna-se instável e emerge um 2-ciclo estável, que perde estabilidade em $r = 1 + \sqrt{6} = \approx 3,449$.

Agora as novidades: em $r = 1 + \sqrt{6}$ há uma nova bifurcação de duplicação de período, com o aparecimento de um 4-ciclo estável. Esta órbita de período

m	período = 2^m	r_m	$r_m - r_{m-1}$	δ_m
1	2	3,0000000	-	-
2	4	3,4494896	0,4494896	-
3	8	3,5440903	0,0946007	4,7514
4	16	3,5644073	0,0203170	4,6562
5	32	3,5687594	0,0043521	4,6683
6	64	3,5696916	0,0009322	4,6686
7	128	3,5698913	0,0001997	4,6692
8	256	3,5699340	0,0000427	4,6694

Tabela 2.1: Pontos de bifurcação de duplicação de período no mapa logístico.

4 dura relativamente pouco, sofrendo uma nova bifurcação em $r \approx 3,544$ e instabilizando-se, cedendo seu lugar a uma órbita de período 8. Há uma rápida acumulação destas bifurcações e, para valores de r superiores a um valor $r_\infty \approx 3,57$ observamos traços mais ou menos contínuos de pontos no diagrama. Como veremos na sequência, boa parte dos valores de r no intervalo $(r_\infty, 4]$ corresponde a órbitas caóticas, interrompidas por janelas de comportamento periódico.

A cascata de bifurcações de duplicação de período, que inicia em $r = 3$ e termina em $r_\infty \approx 3,57$, foi estudada por Feigenbaum no final da década de 70 [20], muito embora outros pesquisadores como Myrberg [21] e May [16] já tivessem conhecimento de algumas de suas propriedades. Podemos observar na Figura 2.17, que a sequência de bifurcações de duplicação de período não ocorre em intervalos de mesma amplitude. Por exemplo, a distância entre a segunda e a terceira bifurcações é cerca de um quinto da distância entre a primeira e a segunda. As demais ocorrem em intervalos ainda menores, e aparentemente há uma acumulação de bifurcações no ponto r_∞.

2.11.1 Primeira constante de Feigenbaum

Denotaremos por r_m o valor do parâmetro r para o qual há uma bifurcação de período 2^m para o período $2 \times 2^m = 2^{m+1}$. Por exemplo, $r_1 = 3$ marca a bifurcação de um ponto fixo (período 1) para um 2-ciclo (período 2), assim como $r_2 = 1 + \sqrt{6}$ é a bifurcação do 2-ciclo em um 4-ciclo. Outros valores de r_m estão na Tabela 2.11.1, bem como a razão dos intervalos entre bifurcações sucessivas

$$\delta_m = \frac{r_{m-1} - r_{m-2}}{r_m - r_{m-1}} \tag{2.83}$$

m	$r_\infty - r_m$	$\frac{c}{\delta^m}$
1	0,5699456	0,5648
2	0,1204560	0,1209
3	0,0258553	0,0259
4	0,0055383	0,0055
5	0,0011862	0,0012
6	0,0000254	0,00025
7	0,0000543	0,000054
8	0,0000116	0,000011

Tabela 2.2: Acumulação de bifurcações de duplicação de período no mapa logístico

converge para um valor constante, à medida em que cresce o período da órbita:

$$\lim_{m\to\infty} \delta_m = \lim_{m\to\infty} \frac{r_{m-1} - r_{m-2}}{r_m - r_{m-1}} = \delta = 4,669201609\ldots, \tag{2.84}$$

chamada primeira constante de Feigenbaum. A cascata de bifurcações de duplicação de período acumula-se no ponto

$$\lim_{m\to\infty} r_m \equiv r_\infty = 3,569945672\ldots \tag{2.85}$$

Os intervalos entre os pontos de bifurcação e o ponto de acumulação (2.85) estão indicados na Tabela 2.11.1, mostrando que eles obedecem à relação

$$r_\infty - r_m \to c\delta^{-m}, \qquad (n \to \infty), \tag{2.86}$$

onde $c = 2,637$.

2.11.2 Segunda constante de Feigenbaum

Outra observação que pode ser feita a partir do diagrama de bifurcações [Fig. (2.17)] é que as sucessivas bifurcações de duplicações de período criam forquilhas com aberturas variáveis. Uma maneira de padronizar a medida dessas larguras é medir, dentro de uma dada forquilha, a distância d_m entre o ponto crítico $x_c = 1/2$ (onde o mapa logístico tem um máximo) e o ponto periódico mais próximo dentro do 2^m-ciclo correspondente [veja a Figura 2.18 para um esquema].

Como $f'(x_c = 1/2) = 0$, qualquer órbita de período m que contenha o ponto crítico é super-estável, pois

$$\Lambda_m = \prod_{i=0}^{m-1} f'(x_i) = 0, \tag{2.87}$$

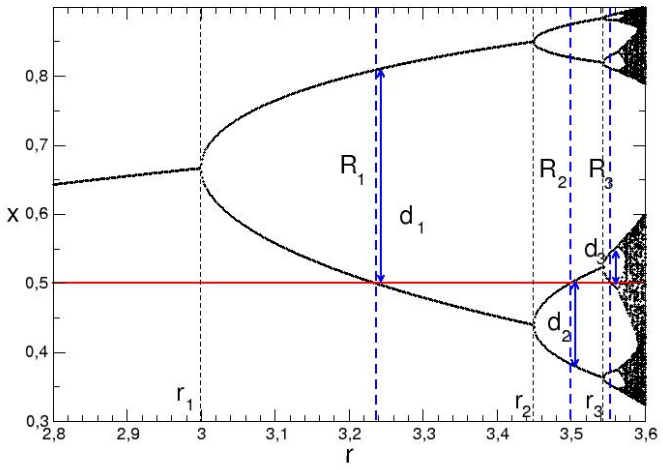

Figura 2.18: Diagrama de bifurcações do mapa logístico mostrando as distâncias ao ponto crítico em alguns ciclos superestáveis e os respectivos valores do parâmetro r.

caso algum dos pontos $x_i = 1/2$. Denotaremos por R_m o valor do parâmetro r para o qual há uma órbita superestável de período 2^m. Para este valor, d_m será a distância do ponto crítico ao ponto mais próximo a ele dessa órbita superestável.

Os valores de R_m e da abertura da forquilha d_m correspondente no diagrama de bifurcação, estão listados na Tabela 2.11.2 para períodos até 128. Os resultados sugerem que R_m também se acumulam como os valores de r_m, a saber,

$$\lim_{m\to\infty} R_m \equiv R_\infty = r_\infty = 3,569945672\ldots. \tag{2.88}$$

Outra conclusão tirada da Tabela 2.11.2 é que, para dois ciclos sucessivos, a distância d_m muda de sinal, ou seja, o ponto periódico mais próximo é alternadamente maior ou menor que o ponto crítico $1/2$. Finalmente, a razão entre as aberturas de duas forquilhas sucessivas, denotada por

$$\alpha_m = \frac{d_m}{d_{m-1}}, \tag{2.89}$$

tende para um valor constante, quando o período tende para infinito, a saber:

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_m = \lim_{m\to\infty} \frac{d_m}{d_{m-1}} = -\alpha = -2,502907875\ldots, \tag{2.90}$$

chamada segunda constante de Feigenbaum.

m	período = 2^m	R_m	d_m	α_m
1	2	$3,2360679775$	-0.30901694	-
2	4	$3,4985616993$	$0,11640177$	$-2,65475$
3	8	$3,5546408628$	$-0,04597521$	$-2,53194$
4	16	$3,5666673799$	$0,01832618$	$-2,50872$
5	32	$3,5642435316$	$-0,00731843$	$-2,50411$
6	64	$3,5697952937$	$0,00292368$	$-2,50316$
7	128	$3,5699134654$	$-0,00116809$	$-2,50296$

Tabela 2.3: Órbitas superestáveis e abertura das forquilhas no mapa logístico

m	Período 2^m	a_m	$\frac{a_m - a_{m-2}}{a_m - a_{m-1}}$
1	2	0,75	-
2	4	1,25	-
3	8	1,3680989	4,2337
4	16	1,3940462	4,5515
5	32	1,3996312	4,6458
6	64	1,4008287	4,6639
7	128	1,4010853	4,6682
8	256	1,4011402	4,6689

Tabela 2.4: Pontos de bifurcações de duplicação de período no mapa quadrático.

2.12 Universalidade

Se os resultados da seção anterior fossem exclusivos para o mapa logístico, eles não teriam interesse maior. No entanto, Feigenbaum mostrou que uma família de mapas unidimensionais compartilha estas propriedades. Como um exemplo, vamos considerar o mapa quadrático

$$x_{n+1;a} = a - x_n^2, \tag{2.91}$$

onde $-2 < x < 2$ e $0 \leq a \leq 2$. Na Figura 2.19 mostramos o diagrama de bifurcações para este mapa, que é muito semelhante ao diagrama do mapa logístico.

O mapa quadrático também exibe uma cascata de bifurcações de duplicação de período. Na tabela 2.5 mostramos os valores do parâmetro a_m, para os quais ocorre uma bifurcação de duplicação do período 2^m para 2^{m+1}, e o

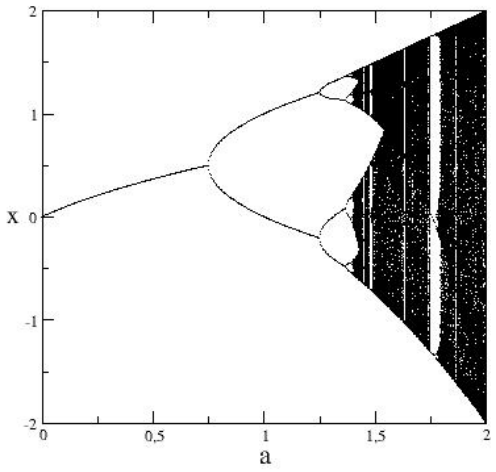

Figura 2.19: Diagrama de bifurcações do mapa quadrático

respectivo valor da razão entre as distâncias entre bifurcações sucessivas

$$\delta_m = \frac{a_{m-1} - a_{m-2}}{a_m - a_{m-1}}, \tag{2.92}$$

tal que temos, novamente, que

$$\lim_{m\to\infty} \delta_m = \delta, \tag{2.93}$$

que é a mesma constante de Feigenbaum para o mapa logístico.

A cascata de bifurcações de duplicação de período acumula-se no ponto

$$\lim_{m\to\infty} a_m \equiv a_\infty = 1,401\ldots \tag{2.94}$$

tal que

$$a_\infty - a_m \to \frac{c'}{\delta^m}, \qquad (n \to \infty). \tag{2.95}$$

O ponto crítico do mapa quadrático é $x_c = 0$, de modo que $f'(x_c) = 0$ e todos os ciclos superestáveis contém este ponto. A abertura das forquilhas é também definida como a distância d_m entre o ponto crítico e o ponto mais próximo da órbita superestável correspondente. A razão entre duas aberturas sucessivas, $\alpha_m = d_m/d_{m-1}$, tende à mesma constante do mapa logístico $-\alpha$, quando m tende ao infinito.

m	Período 2^m	a_m	δ_m	d_m	α_m
1	2	3,110931	1,80031	0,27777733	-
2	4	3,385529	4,04565	- 0,107204	- 2,59069
3	8	3,445801	4,55592	0,042518	- 2,52139
4	16	3,458777	4,64516	- 0,016962	- 2,50668
5	32	3,461559	4,66407	0,006775	-2,50370
6	64	3,462155	4,66813	- 0,002707	- 2,50308
7	128	3,462282	4,66895	0,001081	- 2,50294
8	256	3,462310	4,66915	- 0,000432	- 2,50291
9	512	3,462315	4,66920	0,000173	- 2,50291

Tabela 2.5: Pontos de bifurcações de duplicação de período no mapa (2.96)

Os resultados mostrados na Tabela **??** sugerem um comportamento similar para o mapa unimodal

$$f(x;p) = \frac{p}{4}\sin(\pi x), \tag{2.96}$$

que tem um máximo quadrático em $x = 0$, correspondente ao ponto crítico. Para este mapa os pontos de bifurcação acumulam-se no ponto

$$a_\infty = \lim_{m\to\infty} a_m = 3,46321\ldots,$$

e as razões δ_m e α_m tendem à primeira e segunda constantes de Feigenbaum, respectivamente, quando m tende ao infinito. Todas estas são evidências de um comportamento universal dos mapas unidimensionais unimodais.

2.13 Auto-similaridade e renormalização

A contribuição central de Feigenbaum foi explicar, usando a chamada teoria de renormalização, os motivos do comportamento universal de mapas unimodais, elaborando uma teoria matemática que permite a previsão das constantes δ e α, vistas na seção anterior.

A base da teoria de renormalização é uma propriedade denominada auto-similaridade, que significa algo que é parecido com si mesmo em diferentes escalas. Um exemplo símples de auto-similaridade é uma cabeça de couve-flor: ela é composta de gomos que, se ampliados, lembram a cabeça como um todo. Inúmeros outros exemplos de auto-similaridade existem na Natureza e em modelos matemáticos, explorados pela chamada geometria fractal.

Os diagramas de bifurcação dos mapas logístico e quadrático, por exemplo, são similares entre si, e ambos apresentam auto-similaridade. Como

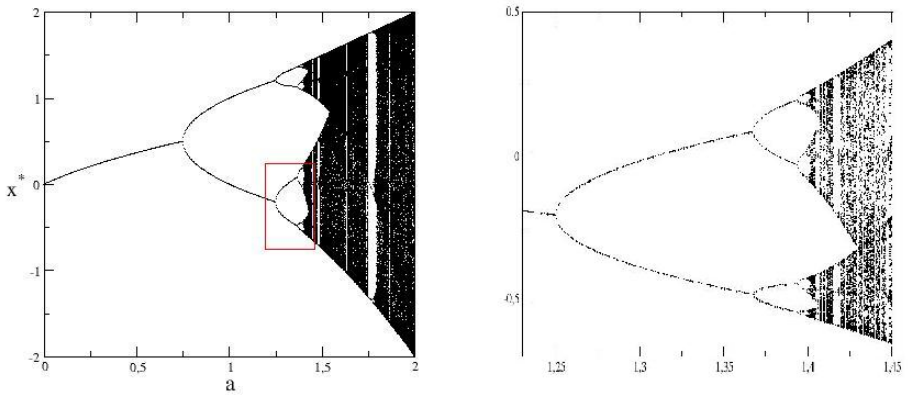

Figura 2.20: Diagrama de bifurcações do mapa quadrático e uma ampliação de parte do mesmo

pode-se ver na Figura 2.20 uma parte do diagrama, após ampliação, é muito parecida com o diagrama como um todo.

Para traduzir a auto-similaridade dos diagramas de bifurcação em uma teoria quantitativa, vamos considerar a primeira iterada de um mapa unimodal

$$x_{n+1} = f(x_n; p), \tag{2.97}$$

onde x_c é um ponto crítico, para o qual $f'(x_c; p) = 0$, ou seja, x_c é um ponto fixo superestável. Seja p_0 o valor de p para o qual ocorre este ponto fixo. Por exemplo, para o mapa logístico temos que o ponto fixo superestável ocorre quando $x_b^* = 1 - (1/R_0) = 1/2$, ou seja, $R_0 = 2$. Na Fig. 2.21(a) mostramos o gráfico da primeira iterada do mapa neste ponto $f(x; p_0)$.

Consideramos, agora, o próximo valor do parâmetro p, denotado p_1, para o qual haverá um 2-ciclo superestável. No mapa logístico, este valor será $R_1 = 3,2360679775$. A Fig. 2.21(b) mostra o gráfico da segunda iterada do mapa 2.97 no ponto p_1, para o qual sabemos que x_c é um dos pontos do 2-ciclo superestável. O quadrado em vermelho é a região na vizinhança do ponto crítico, que é ampliada na Fig. 2.21(c) por um fator $\alpha > 1$. Invertendo as coordenadas verticais desta ampliação obtemos, na Fig. 2.21(d), uma figura muito parecida com a primeira iterada 2.21(a).

Assim, a auto-similaridade entre as Figuras 2.21(a) e (d) pode ser matematicamente descrita como uma transformação que consiste em ampliar e inverter a região da segunda iterada $f^{[2]}(x; p_1)$ na vizinhança do ponto crítico, para o valor de parâmetro p_1 correspondente a um ciclo superestável. Esta ampliação é similar ao gráfico da primeira iterada $f(x; p_0)$ no valor de

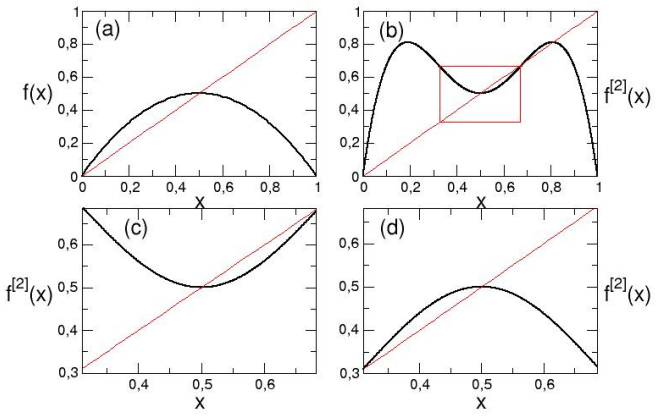

Figura 2.21: (a) Primeira iterada de um mapa unimodal com um ponto fixo superestável; (b) Segunda iterada com um 2-ciclo superestável; (c) ampliação da região marcada em (b); (d) inversão da região em (c).

parâmetro do ponto fixo superestável p_0. Temos, assim, a relação

$$f(x;p_0) \approx -\alpha f^{[2]}\left(\frac{x}{-\alpha};p_1\right), \tag{2.98}$$

onde o símbolo $\approx$ indica que os gráficos não são exatamente, mas aproximadamente similares.

De forma análoga, comparando os gráficos da segunda iterada em p_1 com a quarta iterada no próximo 4-ciclo superestável em p_2 teremos

$$f^{[2]}(x;p_1) \approx (-\alpha)^2 f^{[4]}\left(\frac{x}{(-\alpha)^2};p_2\right), \tag{2.99}$$

que, substituída em (2.98),

$$f(x;p_0) \approx (-\alpha)^2 f^{[4]}\left(\frac{x}{(-\alpha)^2};p_2\right). \tag{2.100}$$

Em geral, após n passos de renormalização, teremos

$$f(x;p_0) \approx (-\alpha)^n f^{[2^n]}\left(\frac{x}{(-\alpha)^n};p_n\right). \tag{2.101}$$

O grau de auto-similaridade vai aumentando conforme avançamos no valor de n. Feigenbaum descobriu que, no limite de infinitos passos de renormalização,

o processo tende para uma função universal $g(x)$ [20, 22]:

$$\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n f^{[2^n]}\left(\frac{x}{(-\alpha)^n};p_n\right)=g(x). \tag{2.102}$$

no sentido que $g(x)$ independe da forma inicial do mapa $f(x)$, desde que ele seja unimodal, tendo um máximo quadrático no ponto crítico.

2.13.1 Equação de Feigenbaum-Cvitanovic

Vamos obter a função universal no caso do mapa logístico, para o qual os valores de R_n acumulam-se, de (2.88), em $\lim_{m\to\infty} R_m \equiv R_\infty = r_\infty = 3,569945672$. Se nós iniciarmos o processo de renormalização no próprio ponto de acumulação, daí não sairemos, razão pela qual podemos dizer que

$$f(x;R_\infty)=-\alpha f^{[2]}\left(\frac{x}{-\alpha};R_\infty\right), \tag{2.103}$$

de modo que a função universal é dada por

$$g(x)=f(x;R_\infty), \tag{2.104}$$

que satifaz a chamada equação de Feigenbaum-Cvitanovic

$$g(x)=-\alpha g^{[2]}\left(-\frac{x}{\alpha}\right), \tag{2.105}$$

que é uma equação funcional [22].

Para resolvê-la, precisamos de condições de contorno: se deslocamos o ponto crítico para a origem (o que se faz por meio de uma translação trivial das coordenadas), teremos que os mapas unimodais têm máximos em $x=0$, ou seja, $f'(x)=0$. Assim, é razoável exigir que $g'(0)=0$. Sem perda de generalidade podemos impor também a condição $g(0)=1$.

Logo, impondo $x=0$ em (2.105) temos que

$$1=g(0)=-\alpha g(g(0))=-\alpha g(1)$$

de modo que, conhecida a função universal $g(x)$, a segunda constante de Feigenbaum será dada por

$$\alpha=-\frac{1}{g(1)}. \tag{2.106}$$

A equação de Feigenbaum-Cvitanovic não tem uma solução exata. Podemos, no entanto, procurar soluções aproximadas na forma de séries de potências. Para que as condições de contorno sejam satisfeitas, a solução deverá ser da forma [18]

$$g(x)=1+bx^2+cx^4+dx^6+\cdots, \tag{2.107}$$

onde b, c, d, etc. são coeficientes a serem determinados.

Vamos procurar uma solução tentativa $g(x) = 1 + bx^2$. A segunda iterada desta função, no ponto $-x/\alpha$, é

$$\begin{aligned} g^{[2]}\left(-\frac{x}{\alpha}\right) &= 1 + b\left\{g^{[2]}\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right\}^2 \\ &= 1 + b\left\{1 + b\left(-\frac{x}{\alpha}\right)^2\right\}^2 \\ &= 1 + b + 2b^2\left(-\frac{x}{\alpha}\right)^2 + b^3\left(-\frac{x}{\alpha}\right)^4, \end{aligned} \tag{2.108}$$

de modo que (2.105) é reescrita como

$$-\frac{1}{\alpha}(1 + bx^2) = 1 + b + 2b^2\frac{x^2}{\alpha^2} + b^3\frac{x^4}{\alpha^4}. \tag{2.109}$$

Nossa solução tentativa só tem termos até x^2, então em (2.109) nós ignoramos os termos de ordem superior, como x^4. Igualando termos de mesma ordem temos duas condições:

$$b = -\frac{2b^2}{\alpha}, \tag{2.110}$$

$$1 = -\alpha(1 + b). \tag{2.111}$$

De (2.110) obtemos $\alpha = -2b$ que, substituída em (2.111), leva-no à equação do segundo grau $2b^2 + 2b - 1 = 0$. No caso do mapa logístico $x \leq 1$, de modo que b deve ser negativo. A única solução negativa da equação é

$$b = \frac{-2 - \sqrt{12}}{4} \approx -1,366,$$

de forma que $\alpha = -2b \approx 2,73$. Comparando-se com o valor mais preciso da segunda constante de Feigenbaum, $\alpha = 2,502907875\ldots$, o que dá um erro de pouco mais de 9%. É um resultado até razoável, dada a simplicidade da nossa função tentativa.

Feigenbaum obteve uma aproximação função universal com mais termos na série

$$g(x) = 1 - 1,52763x^2 + 0,104815x^4 + 0,0267057x^6 + \cdots, \tag{2.112}$$

a partir da qual o valor da constante será $\alpha = 2,50280786$, com um erro de apenas $0,004\%$ em relação ao valor numérico.

A teoria de renormalização também pode ser aplicada para determinar a primeira constante de Feigenbaum δ, mas os detalhes técnicos são mais complicados do que o caso que estudamos. Maiores detalhes podem ser obtidos nas referências [20, 22].

A descoberta de um comportamento universal para mapas unidimensionais foi um importante marco na história da dinâmica não-linear. Logo após o trabalho de Feigenbaum, uma série de trabalhos experimentais mostrou a existência de cascatas de bifurcações de duplicação de período em sistemas como na experiência de Rayleigh-Bénard com mercúrio (para a qual $\delta = 4,4 \pm 0,1$) [23, 24], e água ($\delta = 4,3$) [25] [4].

2.14 Problemas

1. Considere o mapa de Ricker

$$x_{n+1} = x_n e^{r(1-x_n)}$$

Determine os pontos fixos e sua estabilidade. Identifique a bifurcação existente.

2. Considere o mapa logístico. Faça um programa computacional na linguagem que desejar (ou use algum software matemático) para obter: (a) gráficos de x_n em função de n; (b) diagramas de escada para $r = 0,5,\ 2,0,\ 3,2,\ 3,54$.

3. Seja uma função arbitrária $g(x)$ e seja z um zero símples desta função, ou seja, $g(z) = 0$ e $g'(z) \neq 0$. O método de Newton-Raphson para a determinação numérica dos zeros de $g(x)$ consiste em obter, a partir de um "chute" inicial x_0, aproximações sucessivas x_1, x_2, etc. que supomos convirjam para o valor z procurado. (a) Mostre que o método de Newton-Raphson implica no seguinte mapa unidimensional

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)},$$

e mostre que o zero procurado é um ponto fixo atrativo do mapa. (b) Considere a função $f(x) = x^2 - 7$. Use o mapa do ítem anterior para achar uma aproximação para o zero dessa função e compare com o valor exato.

4. Determine, para os seguintes mapas, órbitas de período 2 e a sua estabilidade: (a) $f(x) = -x^{1/3}$; (b) $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

5. O mapa da tenda pode ser generalizado, na forma

$$f(x) = \begin{cases} 2\mu x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2\mu(1-x), & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}.$$

(a) Ache os pontos fixos no intervalo $0 \leq \mu le 1$ e sua estabilidade; (b) Determine o 2-ciclo no intervalo $1/2 < \mu < 1$ e sua estabilidade.

6. Considere o mapa quadrático

$$x_{n+1} = x_n^2 + \mu,$$

onde $\mu \geq 0$ e x é um número real. (a) Determine os pontos fixos e sua estabilidade; (b) Descreva e classifique as bifurcações que encontrar.

7. Considere o mapa da tenda. Mostre que, se x é um ponto finalmente periódico, ele será um número racional (isto é, a razão entre dois inteiros co-primos). Dê um exemplo.

8. Faça um programa computacional na linguagem que desejar (ou use algum software matemático) para obter o diagrama de bifurcação para o mapa logístico, com o parâmetro r variando desde zero até 4. Faça ampliações do diagrama obtido (a) em torno do ponto de acumulação das bifurcações r_∞; (b) nas janelas de períodos 3, 5 e 6; (c) próximo ao ponto $r = 4$.

Notes

[4]A experiência de Rayleigh-Bénard consiste no aquecimento de um fluido de baixo para cima, sob a ação da gravidade. Este foi o sistema físico originalmente considerado por Lorenz na obtenção das equações mencionadas na Introdução. A diferença de temperatura entre as faces paralelas do aparato é o parâmetro de controle. Usando sensores adequados é possível medir, por exemplo, a velocidade do fluido num ponto intermediário entre as faces. As cascatas de bifurcação de período observadas correspondem ao aparecimento de picos de frequência nas séries temporais de medidas da velocidade do fluido.

Capítulo 3

Caos em mapas unidimensionais

No diagrama de bifurcações do mapa logístico (Fig. 2.17) o intervalo $r_\infty \approx 3,57 < r \leq 4$ apresenta regiões densamente preenchidas de iterações, intermeadas de janelas periódicas em grande número. Como veremos na sequência, essas regiões parcial ou completamente preenchidas correspondem ao chamado comportamento caótico, que é um dos nossos temas centrais.

Como discutimos na Introdução, nos contextos das equações de Lorenz (efeito "borboleta") e do próprio mapa logístico, as duas propriedades básicas que caracterizam o comportamento caótico são: (i) aperiodicidade; (ii) sensibilidade extrema às condições iniciais. Vamos discutir em separado cada uma delas.

3.1 Aperiodicidade

Em uma órbita periódica de período m de um mapa unidimensional, os valores repetem-se após m iterações:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_m = x_0,$$

onde m é um inteiro. Já numa órbita caótica a aperiodicdade significa a ausência de comportamento periódico, ou seja, a sequência de iterações $\{x_n\}$ nunca retornará a algum dos seus pontos anteriores.

Na prática é difícil distinguir uma órbita aperiódica de uma órbita com período alto, de modo que devemos empregar alguma técnica quantitativa para fazer isso, como a análise de Fourier. Dada uma série temporal discreta $\{x_n\}_{n=0}^{N}$ com N pontos, podemos obter a transformada de Fourier (discreta) $\{X_k\}_{k=0}^{N}$, que é uma série complexa no domínio das frequências. Para obter um resultado real, determinamos o espectro de potência $P(f) = |X_k|^2$

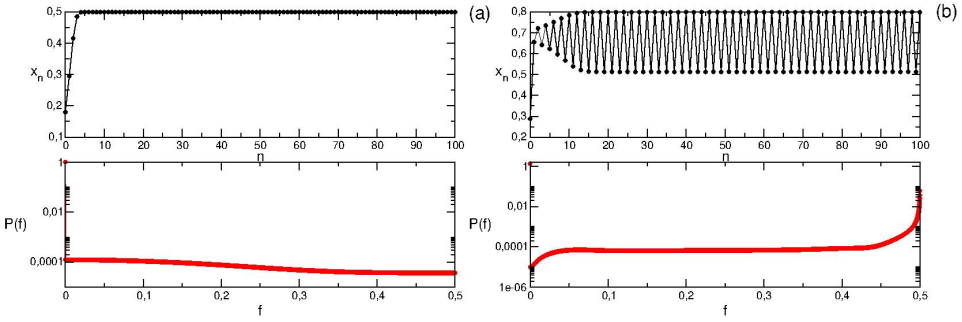

Figura 3.1: Série temporal e espectro de potências para o mapa logístico em (a) $r = 2$; (b) $3,2$.

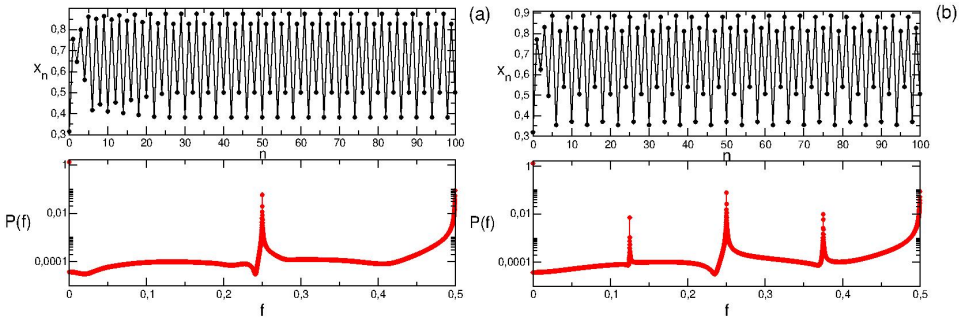

Figura 3.2: Série temporal e espectro de potências para o mapa logístico em (a) $r = 3,5$; (b) $3,55$.

correspondente. No Apêndice B fazemos uma breve revisão dos conceitos básicos das transformadas de Fourier contínuas e discretas. Em resumo, as informações que o espectro de potência podem nos fornecer sobre a série temporal são as seguintes:

- os picos do espectro de potência fornecem as frequências características presentes na série temporal discreta $\{x_n\}$;
- a altura dos picos correspondentes indicam os pesos relativos das respectivas contribuições de cada frequência à série.

Assim, uma série periódica terá um ou mais picos no espectro de potência cujas frequências estão associadas aos períodos correspondentes. Já o espectro de potência de uma série aperiódica é qualitativamente diferente, apresentando uma banda larga.

Uma série temporal obtida pelas iterações de um mapa unidimensional $\{x_n\}$ formam um conjunto discreto de pontos separados por um intervalo

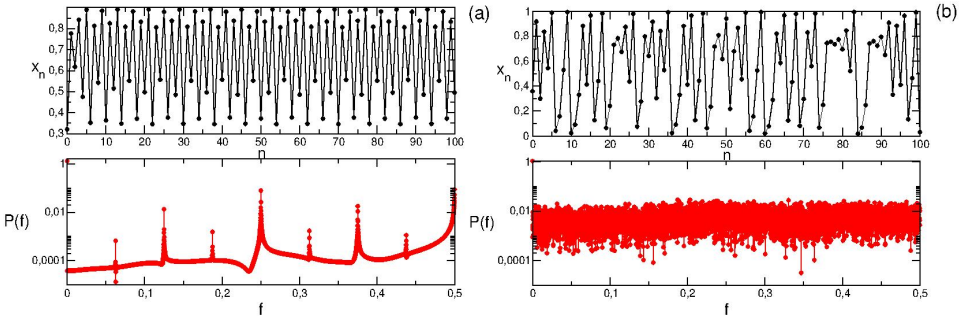

Figura 3.3: Série temporal e espectro de potências para o mapa logístico em (a) $r = 3,565$; (b) $3,99$.

de tempo $\Delta = 1$, donde a frequência de amostragem é $f_{max} = 1$. O espectro de potências é obtido de forma a ser simétrico em relação à chamada frequência de Nyquist $f_N = f_{max}/2$ que, no caso das órbitas de um mapa é $f_N = 0,5$. Consideraremos, como ilustração, séries temporais discretas obtidas pelas iterações sucessivas do mapa logístico

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \tag{3.1}$$

para um dado valor de seu parâmetro r e da condição inicial x_0. Na Fig. 3.1(a) representamos a série temporal para $r = 2$ e o espectro de potências correspondente. O ponto fixo $x_b^* = 0,5$, nesse caso, é uma órbita de período 1, donde a frequência teria de ser $f = 1$. No entanto, como plotamos apenas até a frequência de Nyquist ($f_N = 0,5$), o pico de frequência não aparece no espectro. O caso de $r = 3,2$ [Fig. 3.1(b)] apresenta uma órbita de período $T = 2$, com frequência característica $f = 1/T = 1/2 = 0,5$ aparecendo como um pico no espectro de potência.

Para $r = 3,5$ [Fig. 3.2(a)] a órbita de período $T = 4$ tem frequência característica $f = 1/4 = 0,25$ correspondendo a um pico no espectro de potência, bem como seu harmônico $2f = 0,5$. Quando $r = 3,55$ [Fig. 3.2(b)] a órbita de período 8 apresenta picos de frequência em $f = 1/8 = 0,125$, assim como seus harmônicos $2f = 0,25$, $3f_0 = 0,375$e $4f_0 = 0,5$. O mesmo pode ser dito da órbita de período 16 para o caso $r = 3,565$ [Fig. 3.3(a)], com picos em $f = 1/16 = 0,06255$ e seus harmônicos $2f$, $3f$, até $8f$. Dentro da cascata de bifurcações de duplicação de período, esse padrão se mantém. Os experimentos reportados em [23, 24, 25] usam como ferramenta básica de trabalho o espectro de potências.

O caso $r = 3,99$ [Fig. 3.3(b)] é completamente diferente dos anteriores, visto que a órbita aparenta ser aperiódica, e seu espectro de potência não contém nenhuma frequência característica. Pelo contrário, o espectro tem uma banda larga de frequências, o que confirma a nossa suspeita de aperiodicidade ligada ao comportamento caótico.

Á primeira vista, poderia parecer que a existência da aperiodicidade bastaria para caracterizar caos. Não é este o caso, pois uma série temporal proveniente de um processo estocástico (não-determinístico), como ruído branco, também possui um espectro de potências similar ao da série caótica. De fato, a análise espectral não é suficiente para distinguirmos ruído (estocasticidade extrínseca) de caos (estocasticidade intrínseca).

3.2 Sensibilidade às condições iniciais

No Capítulo 1 definimos, ainda que de forma provisória, caos como a combinação de comportamento aperiódico com a chamada sensibilidade às condições iniciais: duas condições iniciais originalmente muito próximas dão origem a órbitas que separam-se exponencialmente com o passar do tempo. Em termos mais precisos, consideremos $f(x)$ um mapa unidimensional. Dizemos que $f(x)$ apresenta sensibilidade às condições iniciais se existe um $\delta > 0$ tal que, para qualquer x e qualquer vizinhança centrada em x, existe um y e um inteiro n tais que

$$|f^{[n]}(x) - f^{[n]}(y)| \geq \delta. \tag{3.2}$$

Em outras palavras, se uma certa órbita é gerada a partir da condição inicial x_0:

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = f^{[n]}(x_0), \ldots\}$$

e outra órbita é gerada a partir de uma segunda condição inicial y_0, muito próxima da primeira ($|x_0 - y_0| \ll 1$),

$$\{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n = f^{[n]}(y_0), \ldots\},$$

então, após um número n de iterações tenhamos

$$|x_n - y_n| = |f^{[n]}(x_0) - f^{[n]}(y_0)|, \tag{3.3}$$

tão grande quanto se queira. Para que um mapa exiba dependência sensível às condições iniciais, nem todos os pontos próximos a x precisam afastar-se exponencialmente de x, mas deve existir pelo menos um ponto com essa propriedade em cada vizinhança de x [28].

Como discutido no Capítulo 1, a sensibilidade às condições iniciais implica na indeterminação do comportamento sistema, ou seja, numa dificuldade essencial para prever o estado futuro do sistema. Como as condições iniciais sempre são conhecidas a menos de uma dada incerteza (numérica ou experimental), duas condições iniciais muito próximas podem ser indistinguíveis, na prática. Não obstante, a evolução gerada por cada uma delas irá gerar pontos completamente diferentes com o passar do tempo.

Um exemplo já mencionado é o do mapa logístico. Na figura 3.4(a) mostramos as 100 primeiras iterações do mapa logístico em $r = 4$ para duas

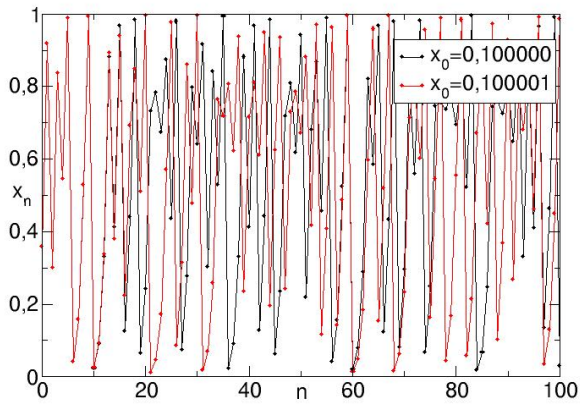

Figura 3.4: Iterações do mapa logístico para $r = 4,0$ e condições iniciais (a) $x_0 = 0,100000$, (b) $0,100001$.

condições iniciais: $x_0 = 0,1$ e $0,100001$, que diferem em apenas $0,001\%$ uma da outra. Durante as primeiras 15 iterações, as órbitas geradas pelas duas condições iniciais têm pontos praticamente idênticos, mas posteriormente elas se afastam mutuamente e seguem trajetórias completamente independentes. No entanto, como todos os pontos das duas órbita estão confinados ao intervalo $[0,1]$, é evidente que haverá novas aproximações ao acaso. O importante é que as duas órbitas perdem rapidamente qualquer correlação mútua.

Um outro exemplo é o chamado mapa de Bernoulli

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} 2x_n & \text{se } 0 \leq x_n \leq 1/2, \\ 2x_n - 1 & \text{se } 1/2 < x_n \leq 1, \end{cases} \tag{3.4}$$

Uma outra forma de escrever as equações acima é usando a prescrição "módulo 1":

$$x_{n+1} = f(x_n) = 2x_n \pmod 1, \tag{3.5}$$

que significa tomar o resto da divisão de x_n por 1, quando x_n for maior que 1. O mapa de Bernoulli é linear por partes, como o mapa da tenda. Mas ele é descontínuo em $x = 1/2$. O único ponto fixo desse mapa é $x^* = 0$ já que $x = 1$ mapeia em $x = 0$ devido à prescrição módulo 1. Esse ponto fixo é sempre repulsivo.

Vamos consider duas condições iniciais muito próximas: $x_0 = 1/3$ e $x'_0 = 0,333$. As iterações provenientes da primeira condição inicial são pontos de uma órbita de período 2, pois $f(1/3) = 2/3$ e $f(2/3) = 1/3$.

n	x_n	x'_n	$\delta_n = \lvert x_n - x'_n \rvert$
0	$1/3$	$0,333$	$3,33 \times 10^{-4}$
1	$2/3$	$0,666$	$6,66 \times 10^{-4}$
2	$1/3$	$0,332$	$1,33 \times 10^{-4}$
3	$2/3$	$0,664$	$2,66 \times 10^{-4}$
4	$1/3$	$0,328$	$5,33 \times 10^{-3}$
5	$2/3$	$0,656$	$0,01066$
6	$1/3$	$0,312$	$0,02133$
7	$2/3$	$0,624$	$0,04266$
8	$1/3$	$0,248$	$0,08533$
9	$2/3$	$0,496$	$0,17066$
10	$1/3$	$0,992$	$0,65866$

Tabela 3.1: Sensibilidade às condições iniciais no mapa de Bernoulli

Na tabela 3.2 nós mostramos os resultados das 10 primeiras iterações para ambas as condições iniciais, bem como a distância entre elas. Durante as primeiras 4 ou 5 iterações as duas órbitas permaneceram relativamente próximas, já que a distância entre elas é da ordem de $0,1\%$ do tamanho do intervalo $[0,1]$. Após 10 iterações, no entanto, esta distância já era da ordem de 66% do tamanho do intervalo.

3.3 Expoente de Lyapunov

Vamos supor que, num mapa unidimensional arbitrário $x_{n+1} = f(x_n)$, escolhamos duas condições iniciais muito próximas entre si: x_0 e x'_0, tal que a distância inicial entre elas:

$$\delta_0 = |x'_0 - x_0| \tag{3.6}$$

seja muito pequena ($\delta_0 \ll |x_0|$).

Após n iterações do mapa os pontos das órbitas geradas a partir de x_0 e x'_0 estarão distantes de

$$\delta_n = |x'_n - x_n| \tag{3.7}$$

Admitindo que a distância acima dependa exponencialmente do tempo, medido em número de iterações do mapa, temos que

$$\delta_t \sim \delta_0 e^{t\lambda} \tag{3.8}$$

onde λ é o expoente de Lyapunov.

Se há comportamento caótico, as órbitas originárias de condições iniciais muito próximas afastam-se exponencialmente com o passar do tempo.

Neste caso, λ é positivo. Pontos fixos e órbitas periódicas, mesmo instáveis, estão sempre associadas a λ negativo, ou seja, as órbitas convergem exponencialmente com o passar do tempo.

Na definição matemática do expoente de Lyapunov fazemos um limite, onde a distância inicial tende a zero, e onde o número de iterações tende a infinito. Isolando λ em (3.8) e aplicando estes limites, temos

$$\lambda = \lim_{\delta_0 \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\delta_n}{\delta_0} \right) \tag{3.9}$$

Substituindo a expressão 3.7 para a distância entre as órbitas na definição 3.9 do expoente de Lyapunov, teremos

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{\delta_0 \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|f^{[n]}(x'_0) - f^{[n]}(x_0)|}{\delta_0} \right) \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \lim_{\delta_0 \to 0} \frac{f^{[n]}(x_0 + \delta_0) - f^{[n]}(x_0)}{\delta_0} \right| \end{aligned} \tag{3.10}$$

Como

$$\lim_{\delta_0 \to 0} \frac{f^{[n]}(x_0 + \delta_0) - f^{[n]}(x_0)}{\delta_0} = \left(\frac{d}{dx} f^{[n]}(x) \right)_{x = x_0}$$

podemos expressar (3.10) como

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^{[n]}(x_0)}{dx_0} \right| \tag{3.11}$$

Usando repetidas vezes a regra da cadeia (vide Eq. 2.37) para escrever a derivada da n-ésima iterada de $f(x)$ como o produto das derivadas de $f(x)$ em cada ponto da órbita x_i, com $i = 0, 1, 2, \ldots n-1$:

$$\frac{df^{[n]}(x_0)}{dx_0} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{df(x_i)}{dx_i} = \prod_{i=0}^{t-1} f'(x_i) \tag{3.12}$$

teremos

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{t-1} f'(x_i) \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \tag{3.13}$$

Para o mapa da tenda, por exemplo,

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} 2x_n & \text{se} 0 \leq x_n \leq 1/2 \\ 2(1 - x_n) & \text{se} 1/2 < x_n \leq 1, \end{cases} \tag{3.14}$$

temos que $f'(x_i) = \pm 2$ para "quase todo" x_i, ou seja, com exceção do ponto $x = 1/2$, para o qual a derivada não é definida. Assim, de 3.13

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln 2 = \ln 2 > 0, \tag{3.15}$$

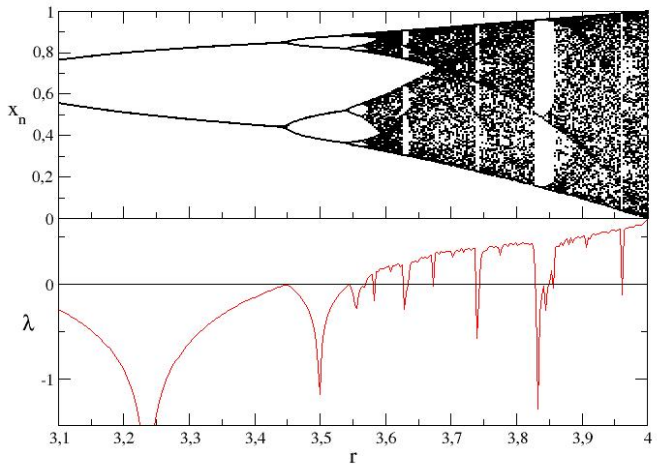

Figura 3.5: Diagrama de bifurcação e expoente de Lyapunov para o mapa logístico

donde "quase todas" as órbitas do mapa da tenda são caóticas. As exceções são obviamente as órbitas periódicas, como estudamos no Capítulo anterior, e que são todas instáveis. Essas observações todas são válidas, também, para o mapa de Bernoulli $f(x) = 2x$, mod 1.

Os exemplos a que nos referimos são excepcionais, pois a derivada do mapa é constante. Em geral temos que fazer a determinação do expoente de Lyapunov numericamente, implementando computacionalmente a fórmula 3.13. Em particular, podemos acoplar os programas para o diagrama de bifurcações e para a determinação do expoente de Lyapunov.

Na Fig. 3.5 nós mostramos o diagrama de bifurcação para o mapa logístico, juntamente com os valores correspondentes do expoente de Lyapunov, no intervalo $3,1 < r < 4$. Para valores de r abaixo do ponto de acumulação $r_\infty \approx 3,57$, os expoentes de Lyapunov são predominantemente negativos.

Como os pontos de uma órbita de período m se repetem após m iterações do mapa, não é necessário tomar o limite $n \to \infty$, e a expressão 3.13 para o expoente de Lyapunov fica

$$\lambda = \frac{1}{m} \ln \left| \prod_{i=0}^{m-1} f'(x_i) \right| = \frac{1}{m} \ln |\Lambda_m|, \tag{3.16}$$

onde Λ_m é o fator de estabilidade do m-ciclo. Para um ciclo estável, sabemos

que $|\Lambda_m| < 1$, de modo que $\lambda < 0$, como de fato deve acontecer para uma órbita periódica.

Um caso particular é o de um ciclo super-estável, para o qual $\Lambda_m = 0$. De (3.16) concluimos que o expoente de Lyapunov tende para menos infinito, o que podemos também observar na Fig. 3.5. Além disso, nos pontos de bifurcação, como em $r = 1+\sqrt{6}$, onde o 2-ciclo passa de estável para instável, o modulo do fator de estabilidade é $|\Lambda_m| = 1$, de modo que $\lambda = 0$ para eles. O ponto de acumulação das bifurcações, em r_∞, também corresponde a um expoente de Lyapunov igual a zero.

No intervalo $r_\infty < r \leq 4$ temos uma situação mais complicada. Há intervalos com $\lambda > 0$, onde as órbitas são caóticas, entremeados com janelas periódicas, onde λ é não-positivo. O valor limite $r = 4$ corresponde ao maior valor do expoente de Lyapunov, $\lambda = \ln 2 \approx 0,69$.

3.4 Caos em mapas lineares por partes

A definição que temos usado até agora para caos (aperiodicidade e dependência sensível às condições iniciais) é útil em várias circunstâncias, especialmente na investigação computacional e experimental, mas é uma matematicamente não-rigorosa. Em determinadas situações, no entanto, é possível definir caos de forma precisa, ainda que limitada a alguns sistemas dinâmicos específicos. Este é o caso dos mapas lineares por partes definidos no intervalo $[0,1]$: (i) o mapa da tenda

$$x_{n+1} = 1 - 2\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \begin{cases} 2x_n & \text{se} 0 \leq x_n \leq 1/2, \\ 2(1-x_n) & \text{se} 1/2 < x_n \leq 1, \end{cases} \tag{3.17}$$

e (ii) o mapa de Bernoulli

$$x_{n+1} = 2x_n, \qquad (mod 1). \tag{3.18}$$

Ambos os mapas são similares, pois são não-diferenciáveis no ponto crítico $x = 1/2$, a diferença sendo apenas o sinal da derivada no intervalo $(1/2, 1]$. Logo eles têm praticamente as mesmas propriedades matemáticas, e podem ser tratados de forma unificada. Em particular, ambos tem o expoente de Lyapunov $\lambda = \ln 2$, sugerindo a existência de comportamento caótico para suas órbitas típicas. De fato, como veremos nesta seção, é possível demonstrar para eles a ocorrência do chamado caos forte, ou transitivo.

3.4.1 Representação no sistema binário

Para trabalhar com o mapa de Bernoulli (3.18) é conveniente representar os números x_n no sistema binário. Para recordar, no sistema decimal (de

base 10) há dez algarismos $a_i = \{0,1,2,\ldots 9\}$, tais que um número $x \in [0,1]$ é representado na forma

$$x = \sum_{i=1}^{N} a_i 10^{-i} = a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \ldots = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots \tag{3.19}$$

onde N pode ser finito ou infinito. Já no sistema binário (base 2) há apenas dois dígitos, $a_i = \{0,1\}$, de sorte que $x \in [0,1]$ tem a seguinte representação

$$x = \sum_{i=1}^{N} a_i 2^{-i} = a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \ldots = [a_1, a_2, a_3, \ldots]_2. \tag{3.20}$$

Para converter um número $x \in [0,1]$ do sistema decimal para binario, nós multiplicamos x sucessivamente por 2 até chegar a um resultado final exatamente igual a 1. Coletamos as partes inteiras dos valores obtidos (isto é, desprezando-se as mantissas) e justapomos os valores de cima para baixo. Por exemplo, $x = 0,78125$ terá a representação binária finita $[11001]_2$, pois

$$0,78125 \times 2 = \mathbf{1},5625 \qquad 0,5625 \times 2 = \mathbf{1},125 \qquad 0,125 \times 2 = \mathbf{0},25$$

$$0,25 \times 2 = \mathbf{0},5 \qquad 0,5 \times 2 = \mathbf{1}$$

Números racionais no intervalo $[0,1]$ são representados por sequências finitas de 0's e 1's, como neste exemplo apenas se eles tiverem a forma $a/2^n$, onde n é um inteiro positivo. Caso contrário, os racionais serão representados no sistema binário por sequências infinitas de 0's e 1's. Por exemplo, $x = 1/3$ tem a representação $[010101\ldots]_2 = [\overline{01}]_2$, pois

$$0,333\ldots \times 2 = \mathbf{0},666\ldots \qquad 0,666\ldots \times 2 = \mathbf{1},332\ldots \qquad 0,332\ldots \times 2 = \mathbf{0},664\ldots$$

$$0,664\ldots \times 2 = \mathbf{1},328\ldots \qquad 0,328\ldots \times 2 = \mathbf{0},656\ldots$$

onde as barras superiores denotam repetição infinita da sequência. Já os números irracionais são representados por sequências infinitas de 0's e 1's sem repetições de padrões periódicos. Um exemplo é

$$\sqrt{2} - 1 = 0,414\ldots = [01101010000001001111001\ldots]_2.$$

3.4.2 Mapa do deslocamento

Seja um número $x \in [0,1]$. O mapa de Bernoulli, na representação decimal, é definido como

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} 2x_n & \text{se} \quad 0 \leq x_n \leq 1/2, \\ 2x_n - 1 & \text{se} \quad 1/2 < x_n \leq 1. \end{cases} \tag{3.21}$$

Consideramos, agora, a representação binária de x, na forma $[a_1a_2a_3\ldots]_2$, onde $a_i = 0$ ou 1. O primeiro dígito é

$$a_1 = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq x_n \leq 1/2, \\ 1 & \text{se} \quad 1/2 < x_n \leq 1. \end{cases} \tag{3.22}$$

Logo, a ação do mapa de Bernoulli em cada iteração é eliminar o primeiro dígito e deslocar o segundo dígito para a esquerda:

$$f([a_1a_2a_3a_4\ldots]_2) = [a_2a_3a_4\ldots]_2 \tag{3.23}$$

Por esse motivo, o mapa de Bernoulli também é chamado mapa do deslocamento.

Duas iterações do mapa do deslocamento produzem

$$f^{[2]}([a_1a_2a_3\ldots]_2) = [a_3a_4a_5\ldots]_2. \tag{3.24}$$

Após n iterações teremos a sequência

$$f^{[n]}([a_1a_2a_3\ldots]_2) = [a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\ldots]_2, \tag{3.25}$$

de modo que a dinâmica gerada pelo mapa do deslocamento pode ser estudada analisando as sequências dos dígitos 0 e 1 na representação binária de x.

Se x é um racional da forma $a/2^n$, vimos que sua representação binária tem um número finito de dígitos. As iteradas sucessivas do mapa do deslocamento sobre x resultam em $x = 0$. Por exemplo

$$f([0100110]_2) = [100110]_2, \qquad f([100110]_2) = [00110]_2,$$

$$f([00110]_2) = [0110]_2, \qquad f([0110]_2) = [110]_2,$$

$$f([110]_2) = [10]_2, \qquad f([10]_2) = [0]_2, \qquad f([0]_2) = [0]_2, \ldots$$

de modo que $x^* = [0]_2$ é o ponto fixo do mapa do deslocamento.

De modo análogo, um ponto periódico de período 2 consiste na repetição de dois dígitos binários. Por exemplo

$$f([\overline{01}]_2) = [1\overline{01}]_2, \qquad f([1\overline{01}]_2) = [\overline{01}]_2,$$

tal que

$$f^{[2]}([\overline{01}]_2) = [\overline{01}]_2.$$

Portanto, uma órbita periódica de período 2 consiste dos pontos

$$x_0^* = ([\overline{01}]_2), \qquad x_1^* = ([\overline{10}]_2),$$

já que um mapeia no outro. Uma sequência de três dígitos repetidos forma uma órbita de período 3, como

$$([\overline{010}]_2, [\overline{101}]_2, [\overline{011}]_2,$$

e assim por diante.

Em geral, sequências infinitas repetidas de 0's e 1's formam órbitas periódicas, que correspondem a valores racionais de $x \in [0,1]$. Por outro lado, sequências infinitas sem repetições de padrões, representando números irracionais em $[0,1]$, correspondem a órbitas aperiódicas.

3.4.3 Propriedades do mapa do deslocamento

Para determinar a estabilidade dos pontos fixos e órbitas periódicas do mapa de Bernoulli usamos a distância Euclidiana convencional: $d(x,y) = |x-y|$. No espaço das sequências infinitas de 0's e 1's, para podermos ter este tipo de informação, precisamos definir uma distância (ou métrica) $d(x,y)$ adequada, ou seja, que satisfaz as seguintes propriedades:

$$d(x,y) \geq 0, \tag{3.26}$$

$$d(x,y) = d(y,x), \tag{3.27}$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,x), \tag{3.28}$$

para todos os valores de x, y e z. Temos que $d(x,y) = 0$ somente se $x = y$. A relação (3.28) é também conhecida como desigualdade triangular.

Considere as sequências infinitas $x = [a_1 a_2 a_3 \ldots]_2$ e $y = [b_1 b_2 b_3 \ldots]_2$. Uma definição de distância entre elas que satisfaz (3.26)-(3.28) é

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i}. \tag{3.29}$$

Como a diferença $|a_i - b_i|$ só pode ser igual a 0 ou 1, então

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1, \tag{3.30}$$

ou seja, a distância entre duas sequências infinitas no intervalo $[0,1]$ é limitada.

Com o auxílio de (8.8), podemos definir o que sejam duas sequências próximas uma da outra. Se os n primeiros dígitos das sequências x e y forem idênticos, então

$$a_i = b_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i - b_i|}{2^i} = 0$$

donde a distância é limitada, pois

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i - b_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n} \tag{3.31}$$

resultado este conhecido como teorema da proximidade. A recíproca também é verdadeira: se $d(x,y) \leq 1/2^n$, então os n primeiros dígitos das sequências x e y são iguais. Portanto, x e y são *próximos* entre si na medida em que os seus primeiros dígitos coincidirem: quanto mais coincidências, mais próximos eles serão.

O ponto fixo x é estável se a distância entre x e a n-ésima iterada de x pelo mapa de Bernoulli, tende assintoticamente a zero, ou seja, $d(x, f^{[n]}(x)) \to 0$ se $n \to \infty$, e instável caso contrário. Usando a definição (8.8) pode-se mostrar que todas as órbitas periódicas do mapa de Bernoulli são instáveis (assim como o mapa da tenda, seu correspondente para números reais no intervalo $[0,1]$).

3.4.4 Caos forte

Uma peculiaridade dos mapas lineares por partes - os mapas da tenda e de Bernoulli - é que eles apresentam o chamado *caos forte*, ou *caos transitivo*. Podemos considerá-lo uma categoria especial de comportamento caótico, visto que as condições matemáticas para a sua existência são bem definidas, de maneira que pode-se demonstrar rigorosamente a existência de caos em tais sistemas. Na maioria dos mapas unidimensionais, entretanto, tais condições não podem ser verificadas, e a definição de caos está ligada à verificação numérica da positividade dos expoentes de Lyapunov.

Um mapa unidimensional $f : [0,1] \to [0,1]$ é fortemente caótico se as seguintes condições forem verificadas:

1. o conjunto de pontos periódicos de f é denso no intervalo $[0,1]$;
2. o mapa f apresenta sensibilidade às condições iniciais
3. o mapa f é transitivo no intervalo $[0,1]$.

A possibilidade de tratar o mapa de Bernoulli como uma operação de deslocamento em sequências infinitas de dígitos 0's e 1's permite-nos verificar essas três condições de forma precisa. Para isso empregaremos o conceito de distância introduzido em (8.8).

Conjunto denso de órbitas periódicas

Seja X um conjunto, e Y um sub-conjunto de X. Dizemos que o sub-conjunto Y é *denso* em X se, para todo elemento $x \in X$ e qualquer $\varepsilon > 0$ existe um ponto $y \in Y$ a uma distância menor que ε do ponto $x \in X$. O exemplo clássico é o

conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, que é denso no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Isso significa que, para todo $x \in \mathbb{R}$ e qualquer $\varepsilon > 0$ existe um racional $m/n \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\left| x - \frac{m}{n} \right| < \varepsilon.$$

É devido a essa propriedade que podemos aproximar qualquer número real por um número racional, com qualquer grau de precisão. Outra consequência de $\mathbb{Q}$ ser denso em $\mathbb{R}$ é que entre dois números reais há sempre um número racional. Um contra-exemplo é o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$: ele não é denso em $\mathbb{R}$ pois podemos encontrar dois números reais tais que não haja um inteiro entre eles.

Usando as sequências infinitas de dígitos 0's e 1's é possível mostrar que o mapa do deslocamento tem um conjunto de órbitas periódicas que é denso no intervalo $[0,1]$. Como vimos anteriormente, pontos periódicos de período $n \geq 1$ são representados por sequências infinitas repetidas de n dígitos. Assim, um ponto periódico de período n é representado pela sequência $x = [\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}]_2$. Agora consideremos outro ponto no intervalo $[0,1]$ representado por uma sequência infinita arbitrária $y = [a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots]_2$. Como os n primeiros dígitos de ambas são iguais, pelo teorema da proximidade (3.31) a sua distância é

$$d(x,y) \leq \frac{1}{2^n} \tag{3.32}$$

Para que o conjunto de sequências periódicas seja denso em $[0,1]$, precisamos encontrar um ponto periódico a uma distância menor que um dado ε do ponto x. Fazendo $\varepsilon = 1/2^n$ o resultado (3.32) implica que $d(x,y) \leq \varepsilon$, de modo que existe sempre uma sequência arbitrária y a uma distância menor ou igual a ε da sequência x correspondente a um ponto periódico. Logo o conjunto de sequências periódicas é denso no conjunto de todas as sequências possíveis para pontos em $[0,1]$.

Sensibilidade às condições iniciais

Vamos recordar que o mapa $f(x)$ apresenta sensibilidade às condições iniciais se existe um $\delta > 0$ tal que, para qualquer x e qualquer vizinhança centrada em x, existe um y e um inteiro n tais que

$$|f^{[n]}(x) - f^{[n]}(y)| \geq \delta. \tag{3.33}$$

Em termos da representação binária de x, o mapa de Bernoulli n vezes iterado corresponde à sequência deslocada n dígitos à esquerda

$$f^{[n]}(x) = f^{[n]}([a_1 a_2 a_3 \ldots]_2) = [a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \ldots]_2, \tag{3.34}$$

Supondo que os pontos x e y, inicialmente muito próximos, sejam representados pelas sequências

$$x = [a_1 a_2 a_3 \ldots]_2, \qquad y = [b_1 b_2 b_3 \ldots]_2,$$

então a proximidade entre as sequências implica em que existe um inteiro n para o qual $a_i \neq b_i$, uma vez que os dígitos anteriores devem coincidir. Portanto, a $(n-1)$-ésima iterada do mapa do deslocamento deslocará $n-1$ dígitos à esquerda, resultando em

$$f^{[n-1]}(x) = f^{[n-1]}([a_1 a_2 a_3 \ldots]_2) = [a_n a_{n+1} a_{n+2} \ldots]_2, \tag{3.35}$$

e uma expressão similar para y. A distância entre estas iteradas será

$$d(f^{[n-1]}(x), f^{[n-1]}(y)) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i} \geq \frac{|a_n - b_n|}{2} = \frac{1}{2} \tag{3.36}$$

Tomando $\delta = 1/2$, isso significa que existe um inteiro n tal que a distância entre as n-ésimas iteradas do mapa do deslocamento cresça até um valor da ordem do tamanho do intervalo, o que demonstra a existência de sensibilidade às condições iniciais. Fato este, aliás, que ilustramos na Fig. 3.4.

Transitividade

Um mapa f é dito *transitivo* se, para qualquer par de pontos x e y pertencentes ao intervalo $[0,1]$, e um $\varepsilon > 0$, existe um outro ponto $z \in [0,1]$ tal que a órbita gerada, tendo z como condição inicial, tem pontos $f^{[n]}(z)$ que aproximam-se tanto de x como de y a distâncias menores ou iguais a ε. Em outras palavras, uma órbita típica do mapa f, composta pelos pontos $f^{[n]}(x)$, irá se aproximar arbitrariamente a qualquer ponto deste intervalo. Aproximar-se arbitrariamente, aqui, significa que a distância entre x e $f^{[n]}(x)$ pode ser tão pequena quanto se queira. Obviamente se essa distância for da ordem de ε, e se ε for um número muito pequeno, pode ser que tenhamos que esperar um número absurdamente grande de iterações, como $n \sim 10^7$, para aproximar-se de um dado ponto. No entanto, a vantagem propriedade de transitividade é que nós sabemos que isto é possível para qualquer valor de ε, não importa quão pequeno ele seja.

Uma outra forma de expressar a transitividade do mapa f é dizer que a órbita gerada por uma condição inicial x típica é densa no intervalo $[0,1]$. Isso significa que esta órbita é caótica, e visita a vizinhança de todos pontos pontos de $[0,1]$, não importanto quão pequena seja esta vizinhança. Fazendo um grande número de iterações de um mapa transitivo, os pontos de uma órbita assim preencherão densamente o intervalo $[0,1]$. Quando nos referimos a uma condição inicial *típica*, estamos descartando aqueles pontos que pertencem a órbitas periódicas, por exemplo. Tais pontos existem em número infinito, é verdade, mas a medida de Lebesgue do conjunto

destes pontos é nula. Uma forma intuitiva de interpretar este conceito matemático é pensar que estamos escolhendo ao acaso um número x pertencente ao intervalo $[0,1]$. A probabilidade deste número ser um racional (associado a órbitas periódicas) é igual a zero, ou seja, um x racional será atípico. Por conseguinte, o conjunto de valores irracionais de x tem medida de Lebesgue igual à do conjunto, ou seja, a probabilidade obter este valor é 1. Esta é, portanto, uma condição inicial típica.

Para demonstrar a transitividade do mapa de Bernoulli, consideramos novamente a representação binária de x, na forma de uma sequência infinita de 0's e 1's. Sejam x e y representados por duas sequências deste tipo. Podemos construir uma sequência z, cujas iteradas sucessivas pelo mapa do deslocamento aproximam-se de x e y a uma distância menor igual a um dado ε. Escolhemos um inteiro n tal que $\varepsilon > 1/2^n$. Pelo teorema de proximidade, se uma dada sequência tiver os n primeiros dígitos iguais aos da sequência x, então ele está a uma distância menor ou igual a ε da sequência x. Mesmo raciocínio para a sequência y.

Falta ainda construir esta terceira sequência z: isto pode ser feito reunindo e concatenando todas as sequências de 2 dígitos, de 3 dígitos, de 4 dígitos, e assim por diante, na forma

$$z = [\underbrace{01}_{blocode1}|\underbrace{00\,01\,10\,11}_{blocosde2}|\underbrace{000\,001\,010\,011\,100\,101\,110\,111}_{blocosde3}|\ldots]_2 \tag{3.37}$$

Construída desta maneira, qualquer sub-sequência de n dígitos estará presente *em algum lugar* da sequência z. Para encontrar esta sub-sequência, basta iterar z pelo mapa do deslocamento um número suficiente de vezes.

Mais precisamente, considerando uma sequência x qualquer, haverá sempre um inteiro k tal que os primeiros n dígitos de $f^{[k]}(z)$ coincidem com os dígitos de x. Se $\varepsilon = 1/2^n$, então $f^{[k]}(z)$ estará próximo de x por uma distância menor ou igual a ε. Em outras palavras, a órbita gerada a partir da sequência z, cujos pontos são dados por $f^{[n]}(z)$, irá se aproximar de qualquer sequências x e y por uma distância arbitrariamente pequena: a órbita gerada por z é, portanto, densa no intervalo $[0,1]$. Por conseguinte, o mapa do deslocamento é transitivo.

O grau de imprevisibilidade da órbita caótica densa do mapa do deslocamento é o máximo possível: em cada iteração do mapa, a probabilidade do primeiro dígito à esquerda a_n ser igual a 0 ou 1 é de 50% cada. Esse é o mesmo resultado para a probabilidade de obter cara ou coroa no lançamento de uma moeda. Portanto, a sequência de 0 e 1 numa órbita caótica do mapa de Bernoulli é tão aleatória quanto o resultado de cara ou coroa de uma moeda! De fato, vimos que o expoente de Lyapunov para este mapa é $\lambda = \ln 2 \approx 0,69$, ilustrando sua caoticidade.

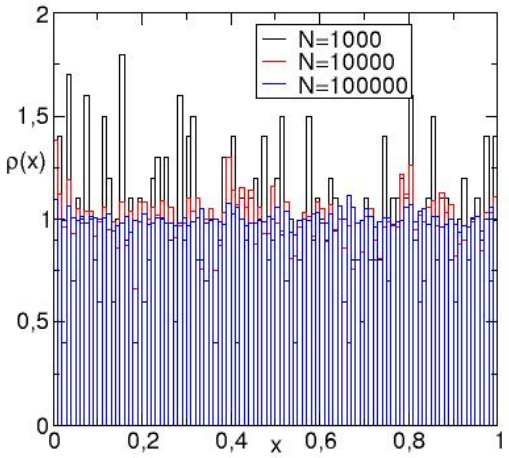

Figura 3.6: Histograma das iterações de uma órbita do mapa da tenda para três valores do número de pontos da órbita.

3.5 Densidade invariante

O caráter aperiódico das órbitas caóticas para os mapas lineares por partes sugere uma descrição de natureza estatística, e que pode ser estendida para mapas unidimensionais de forma geral. Os mapas de Bernoulli e da tenda são fortemente caóticos, tendo assim uma órbita que preenche densamente o intervalo $[0,1]$. Podemos caracterizar esta distribuição das iteradas $\{x_n\}_{n=0}^{N}$ construindo um histograma de frequências para os valores de x_n no intervalo $[0,1]$. Na Fig. 3.6 mostramos um histograma das iteradas do mapa da tenda para alguns valores de N. Na medida em que o número N de pontos aumenta, observamos que as iterações do mapa tendem a se distribuir uniformemente no intervalo $[0,1]$.

No limite de $N \to \infty$ o histograma representa uma distribuição que chamaremos densidade de probabilidade $\rho(x)$. Assim $\rho(x)dx$ é a probabilidade de se encontrar uma iteração do mapa no intervalo que vai de x a $x+dx$. Como a soma das probabilidades é igual a um, então a normalização da distribuição é

$$\int_0^1 \rho(x)dx = 1. \tag{3.38}$$

Considerando os pontos $\{x_n\}_{n=0}^{N}$ obtidos iterando um mapa unidimensional

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{3.39}$$

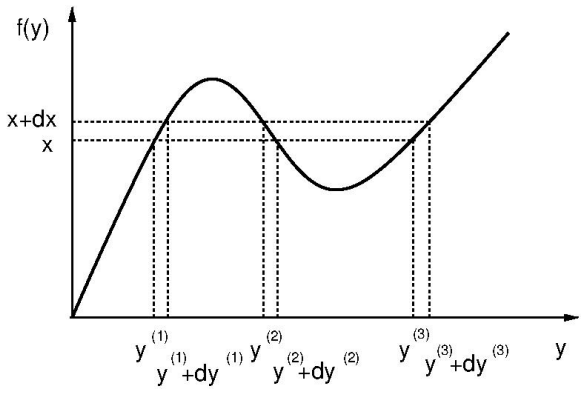

Figura 3.7: Figura esquemática usada na demonstração da equação de Frobenius-Perron.

a densidade de pontos é um soma de funções delta aplicadas em cada ponto da órbita

$$\rho_n(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \delta(x - x_n) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \delta[x - f^{[n]}(x_0)], \tag{3.40}$$

e que dependerá, em geral, de x_0. No Apêndice B fazemos uma breve revisão da função delta de Dirac e de algumas de suas propriedades. Devido à normalização da função delta [vide Eq. A.4 do Apêndice B] decorre que a própria densidade (3.38) é normalizada, pois

$$\int_0^1 dx\, \rho_n(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \underbrace{\int_0^1 dx\, \delta[x - f^{[n]}(x_0)]}_{=1} = \frac{N}{N} = 1. \tag{3.41}$$

3.5.1 Equação de Frobenius-Perron

A densidade de pontos numa órbita do mapa $f(x)$, dada por (3.40), depende, em geral, do tempo discreto n. Para obter a equação que governa a evolução temporal da densidade vamos considerar a equação $x = f(y)$, cujas raízes serão denotadas $y^{(i)}$, onde $i = 1, 2, \ldots$.

Na Fig. 3.7 mostramos, esquematicamente, três dessas raízes. Os pontos da órbita no intervalo $[x, x+dx]$ no tempo $n+1$ são obtidos pela iteração dos pontos que pertencem aos seguintes intervalos do eixo y, no tempo n:

$$[y^{(1)}, y^{(1)} + dy^{(1)}], \qquad [y^{(2)}, y^{(2)} + dy^{(2)}], \qquad [y^{(3)}, y^{(3)} + dy^{(3)}].$$

Portanto, o número de pontos da órbita no intervalo $[x, x+dx]$ no tempo $n+1$ é igual à soma dos números de pontos da órbita nos três intervalos

acima no tempo n. Em geral,

$$\rho_{n+1}(x)\,|dx| = \sum_i \rho_n(y^{(i)})\,|dy^{(i)}|, \tag{3.42}$$

que podemos reescrever como

$$\rho_{n+1}(x) = \sum_i \rho_n(y^{(i)}) \left|\frac{dx}{dy^{(i)}}\right|^{-1} = \sum_i \rho_n(y^{(i)}) \left|f'(y^{(i)}\right|^{-1}. \tag{3.43}$$

Usando a identidade (A.11) das funções delta de Dirac temos que

$$\delta[x - f(y)] = \sum_i \delta\left(y - y^{(i)}\right) \left|f'(y^{(i)}\right|^{-1}, \tag{3.44}$$

uma vez que $y^{(i)}$ são as raízes da equação $x = f(y)$. Multiplicando ambos os lados por $\rho_n(y)$ e integrando no intervalo $[0,1]$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 dy\,\delta[x - f(y)]\,\rho_n(y) &= \sum_i \int_0^1 dy\,\delta\left(y - y^{(i)}\right) \left|f'(y^{(i)}\right|^{-1} \rho_n(y) \\ &= \sum_i \left|f'(y^{(i)}\right|^{-1} \rho_n(y^{(i)}),\end{aligned} \tag{3.45}$$

onde usamos a propriedade de filtragem [Eq. (**??**)]. Finalmente, usando (3.43) chegamos à chamada equação de Frobenius-Perron

$$\rho_{n+1}(x) = \int_0^1 dy\,\delta[x - f(y)]\,\rho_n(y). \tag{3.46}$$

Se a densidade for invariante ela não se altera com o passar do tempo, de modo que (3.46) implica em

$$\rho(x) = \int_0^1 dy\,\delta[x - f(y)]\,\rho(y). \tag{3.47}$$

Como ilustração da solução da equação de Frobenius-Perron, consideramos o mapa da tenda (3.17) que, aplicado a (3.47), nos dá

$$\rho(x) = \int_0^{1/2} dy\,\delta(x - 2y)\,\rho(y) + \int_{1/2}^1 dy\,\delta[x - 2(1-y)]\,\rho(y). \tag{3.48}$$

Pela definição da função delta de Dirac [cf. Eq. (A.3)], ela é não-nula apenas quando o seu argumento for igual a zero, donde a equação de Frobenius-Perron é

$$\rho(x) = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\rho\left(1 - \frac{x}{2}\right). \tag{3.49}$$

Uma solução é $\rho(x) = 1$. Pode-se mostrar [vide [35], seção 3.2.2] que esta solução é única. Portanto, para o mapa da tenda, a sequência caótica das iteradas $\{x_n\}$ é distribuida de maneira uniforme ao longo do intervalo $[0,1]$.

Os histogramas da Fig. 3.6(a) sugerem, de fato, que a distribuição de probabilidade seja uniforme ao longo do intervalo $[0,1]$. A rigor deveríamos dizer que $\rho(x) = 1$ para "quase todo" ponto x pertencente ao intervalo $[0,1]$, ou seja, com exceção daqueles pontos periódicos como os números racionais. A medida de Lebesgue destes pontos atípicos é nula, como vimos anteriormente.

3.6 Densidade invariante para o mapa logístico

O mapa logístico no caso $r = 4$, também chamado mapa de Ulam,

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n), \tag{3.50}$$

merece uma atenção especial pois, como veremos, ele possui uma correspondência muito particular com o mapa da tenda, herdando dele várias propriedades importantes, como a existência de órbitas fortemente caóticas. Historicamente o mapa (3.50) foi usado por S. Ulam como um gerador de números aleatórios nos primórdios da computação digital.

Na verdade, uma mudança de variável transforma o mapa logístico no mapa da tenda [1]. Se $x \in [0,1]$ definimos $y \in [0,1]$ implicitamente pela relação

$$x = \sin^2\left(\frac{\pi y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(\pi y)\right], \tag{3.51}$$

que, inserida no mapa de Ulam (3.50), leva-nos à equação trigonométrica

$$\sin\left(\frac{\pi y_{n+1}}{2}\right) = \pm \sin(\pi y_n), \tag{3.52}$$

cuja solução é

$$y_{n+1} = \pm 2y_n + 2k, \tag{3.53}$$

onde k é um inteiro positivo.

Embora haja infinitas soluções da forma (3.53), como y deve estar limitado ao intervalo $[0,1]$, apenas duas soluções são admissíveis: (i) tomando $k = 0$ e o sinal positivo em (3.53) obtemos

$$y_{n+1} = 2y_n, \qquad \left(0 \leq y_n \leq \frac{1}{2}\right), \tag{3.54}$$

(ii) tomando $k = 1$ e o sinal negativo

$$y_{n+1} = 2(1 - y_n), \qquad \left(\frac{1}{2} < y_n \leq 1\right), \tag{3.55}$$

tal que $y_{n+1} = f(y_n)$ é o mapa da tenda em $[0,1]$.

[1] Dizemos que os dois mapas são topologicamente conjugados.

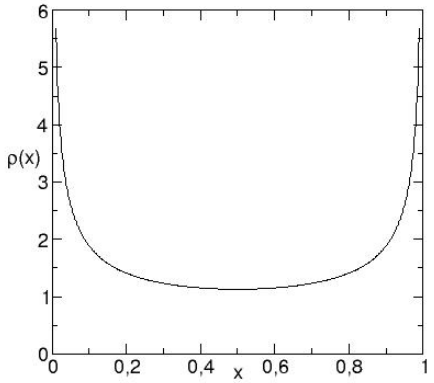

Figura 3.8: Densidade invariante do mapa logístico em $r = 4$.

Estando relacionados pela transformação de variável (3.51), os mapas de Ulam e da tenda (assim como o de Bernoulli) compartilham diversas propriedades. Por exemplo, na seção anterior mostramos que os mapas lineares por partes exibem comportamento fortemente caótico, o que também ocorre para o mapa de Ulam. Além disso, ambos os mapas têm o mesmo número de órbitas periódicas instáveis em $[0,1]$, e são densas nesse intervalo.

Como as órbitas do mapa da tenda preenchem densamente o intervalo $[0,1]$ com densidade invariante

$$\tilde{\rho}(y) = 1, \qquad (0 \leq y \leq 1), \tag{3.56}$$

assim também as órbitas do mapa de Ulam estarão associadas a uma densidade invariante $\rho(x)$ sobre o intervalo $0 \leq x \leq 1$. Os intervalos $[y, y+dy]$ e $[x, x+dx]$, obtidos por meio da transformação de variável (3.51), são visitados por pontos das respectivas órbitas caóticas com as mesmas frequências. Assim podemos escrever

$$\rho(x)\,|dx| = \tilde{\rho}(y)\,|dy|, \tag{3.57}$$

ou ainda

$$\rho(x) = \left|\frac{dy(x)}{dx}\right| \tilde{\rho}(y(x)). \tag{3.58}$$

Isolando o valor de y em (3.51) temos

$$y = \frac{1}{\pi} \arccos(1-2x), \tag{3.59}$$

cuja derivada é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}. \tag{3.60}$$

Substituindo em (3.58) obtemos a densidade invariante do mapa de Ulam [Fig. 3.61]

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \tag{3.61}$$

A densidade invariante vai a infinito em $x = 0$ e $x = 1$, ou seja, é mais provável encontrar um ponto de uma órbita caótica perto de $x = 0$ e 1 do que, por exemplo, perto de $x = 1/2$.

3.7 Medida natural e ergodicidade

Vamos considerar uma órbita caótica para o mapa logístico em $r = 4$, cuja densidade invariante no intervalo $[0,1]$ é dada por (3.61). Seja um sub-intervalo de largura 2ε centrado num ponto qualquer $\bar{x} \in [0,1]$:

$$I_\varepsilon(\bar{x}) = [\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon].$$

Os pontos da órbita caótica visitam toda a extensão do intervalo $[0,1]$, e parte destes pontos pertence ao sub-intervalo I_ε. Esta parte pode ser encarada como a fração de tempo que a órbita caótica passa no interior de I_ε, e é chamada a sua *medida natural*,

$$\mu(I_\varepsilon(\bar{x})) = \int_{\bar{x}-\varepsilon}^{\bar{x}+\varepsilon} \rho(x)\, dx. \tag{3.62}$$

Se a densidade invariante for uma função suave e limitada, como (3.61) fora das singularidades em $x = 0$ e 1, se ε é pequeno podemos escrever

$$\mu(I_\varepsilon(\bar{x})) \approx 2\varepsilon\rho(\bar{x}) \tag{3.63}$$

No ponto crítico do mapa logístico, $\bar{x} = 1/2$, teremos assim que

$$\mu(I_\varepsilon(1/2)) \sim \varepsilon. \tag{3.64}$$

Podemos verificar facilmente que a imagem do intervalo $I_\varepsilon(1/2)$ pela ação do mapa logístico é o intervalo $[1-4\varepsilon^2, 1]$. Como $\rho(x) = 0$ para $x > 1$ podemos adicionar a ele o intervalo $[1, 1+4\varepsilon^2]$, de modo que a imagem de $I_\varepsilon(1/2)$ é o intervalo

$$I_{4\varepsilon^2}(1) = [1-4\varepsilon^2, 1+4\varepsilon^2].$$

Se a densidade $\rho(x)$ for invariante, então a medida natural (3.62) também o será. Portanto,

$$\mu(I_\varepsilon(1/2)) = \mu(I_{4\varepsilon^2}(1)), \tag{3.65}$$

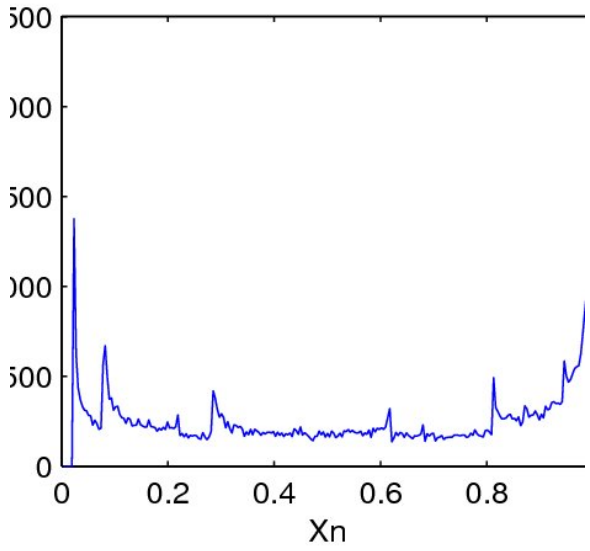

Figura 3.9: Histograma mostrando a densidade das iterações de uma órbita caótica do mapa logístico para $r = 3,9$.

que, em vista de (3.64), implica em que $\mu(I_{4\varepsilon^2}(1)) \sim \varepsilon$. Fazendo $\varepsilon' = 4\varepsilon^2$ resulta que $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon'/4} \sim (\varepsilon')^{1/2}$, ou seja, que $\mu(I_{\varepsilon'}(1) \sim (\varepsilon')^{1/2}$. Trocando ε' por ε é

$$\mu(I_\varepsilon(1)) \sim \varepsilon^{1/2}. \tag{3.66}$$

Por outro lado, se $\rho(x)$ fosse suave e limitada no ponto $x = 1$ teríamos, de (3.64), que $\mu(I_\varepsilon(1)) \sim \varepsilon$, em flagrante contradição com (3.67)! Assim $\rho(x)$ deve ter um comportamento singular em $x = 1$. Na verdade $\rho(x)$ deve ter uma singularidade do tipo $x^{-1/2}$ no ponto $x = 1$, pois

$$\int_{1-\varepsilon}^{1} \rho(x)dx \sim \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^{1/2}} = 2(\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{1-\varepsilon}) \sim \varepsilon^{1/2},$$

em conformidade com (3.67).

Aplicando, agora, o mapa logístico $4x(1-x)$ aos pontos do intervalo $I_\varepsilon(1)$, vemos que ele será mapeado no intervalo $[0,\varepsilon]$. Como $\rho(x) = 0$ para $x < 0$ podemos adicionar o intervalo $[-\varepsilon, 0]$, de sorte que a imagem de $I_\varepsilon(1)$ será o intervalo $I_\varepsilon(0)$. Pelo mesmo raciocínio desenvolvido anteriormente, concluimos também que a densidade invariante deve ter uma singularidade do tipo $x^{1/2}$ no ponto $x = 0$, tal que

$$\mu(I_\varepsilon(0)) \sim \varepsilon^{1/2}. \tag{3.67}$$

Resumindo, no caso $r = 4$ a densidade invariante do mapa logístico tem singularidades em $x = 0$ e $x = 1$, um fato que poderia ser facilmente observado pela inspeção de (3.61). Nossa preocupação, aqui, foi a de mostrar

que $\rho(x)$ tem singularidades nas imagens do ponto crítico. Este fato persiste para valores de r menores que 4 onde a órbita é caótica. Nestes casos o conjunto das imagens do ponto crítico $x = 1/2$ é denso no intervalo $[0,1]$, de modo que a densidade terá um número infinitamente grande de singularidades, sendo pois descontínua em todos os pontos de $[0,1]$. A presença destas singularidades explica o formato peculiar da densidade correspondente ao histograma das iterações do mapa logístico para $r = 3,80$ mostrado na Fig. 3.9.

Uma importante propriedade da medida natural do mapa logístico em $r = 4$ é a ergodicidade: os pontos da órbita caótica originada da condição inicial x_0 visitam quaisquer vizinhanças, por menores que sejam, de todos os pontos do intervalo $[0,1]$. Nestas circunstâncias, a média temporal de uma função arbitrária $F(x)$ ao longo da órbita caótica do mapa

$$\overline{F}(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} F(x_n) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} F(f^{[n]}(x_0)), \tag{3.68}$$

será igual à média de $F(x)$ em relação à medida natural $d\mu(x) = \rho(x)dx$, dada por

$$\frac{\int_0^1 F(x)\rho(x)dx}{\int_0^1 \rho(x)dx}. \tag{3.69}$$

Se $\rho(x)$ for normalizada no intervalo $[0,1]$, então a propriedade ergódica implica na igualdade

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} F(f^{[n]}(x_0)) = \int_0^1 F(x)\,\rho(x)\,dx, \tag{3.70}$$

para quase todas as condições iniciais x_0, ou seja, com exceção de um conjunto de medida nula formado pelas infinitas condições iniciais que geram órbitas periódicas.

Uma aplicação da propriedade ergódica é o cálculo do expoente de Lyapunov. Por definição [Eq. (3.13)] o expoente de Lyapunov é uma média temporal donde, usando (3.68) temos que

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln|f'(x_n)| = \int_0^1 \ln|f'(x)|\rho(x)dx \tag{3.71}$$

Como para o mapa da tenda $\rho(x) = 1$, o expoente de Lyapunov será

$$\lambda = \int_0^1 \ln|\pm 2|dx = \ln 2. \tag{3.72}$$

Analogamente, para o mapa de Ulam, de (3.61) teremos

$$\lambda = \int_0^1 \frac{\ln|4(1-2x)|\,dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}} = \ln 2. \tag{3.73}$$

3.8 Função de auto-correlação

Sendo $\rho(x)$ uma distribuição de probabilidades, podemos usá-la para determinar valores médios de funções das iteradas $F(x)$ numa órbita caótica.

$$\langle F(x)\rangle = \int_0^1 F(x)\,\rho(x)\,dx. \tag{3.74}$$

Para o mapa da tenda vimos que a densidade invariante é $\rho(x) = 1$, de modo que

$$\langle x\rangle = \int_0^1 \rho(x)\,x\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}. \tag{3.75}$$

A dispersão (variância) em relação à média é

$$\begin{aligned} \delta x^2 &= \langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 \\ &= \int_0^1 x^2 dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Como a densidade invariante do mapa da tenda não depende da condição inicial x_0, o sistema é ergódico, e os resultados acima valem, também, para as respectivas médias temporais, $\overline{x}$ e $\overline{x^2}$.

Para uma série temporal qualquer, tal qual a sequência de pontos da órbita caótica $x_n = f^{[n]}(x_0)$, é interessante computar a chamada função de auto-correlação. Partindo da média temporal $\overline{x}$ computamos os respectivos desvios

$$\hat{x}_n = x_n - \overline{x}, \tag{3.77}$$

de modo que a função de auto-correlação após um tempo m é definida como

$$C(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}_{n+m}\hat{x}_n. \tag{3.78}$$

Substituindo (3.77) em (3.78) e usando a propriedade

$$x_{n+m} = f^{[n+m]}(x_0) = f^{[n]}\left(f^{[m]}(x_0)\right) = f^{[m]}\left(f^{[n]}(x_0)\right) \tag{3.79}$$

das iteradas sucessivas, obtemos após algumas manipulações algébricas

$$C(m) = \overline{x\,f^{[m]}(x_0)} - (\overline{x})^2 \tag{3.80}$$

Supondo que vale a propriedade ergódica substituimos as médias temporais por médias sobre o ensemble a partir da densidade invariante do mapa:

$$C(m) = \int_0^1 dx\,\rho(x)\,x\,f^{[m]}(x_0) - \left\{\int_0^1 dx x\,\rho(x)\right\}^2, \tag{3.81}$$

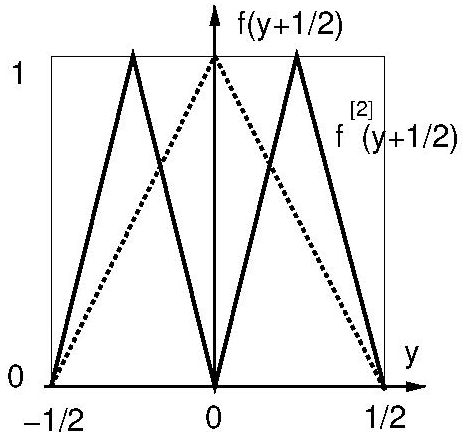

Figura 3.10: Primeira e segunda iterações do mapa da tenda com a mudança de variável $y = x - 1/2$

onde $\rho(x) = 1$ para o mapa da tenda. Usando (3.75) temos

$$C(m) = \int_0^1 dx x f^{[m]}(x_0) - \frac{1}{4}. \tag{3.82}$$

Fazendo a mudança de variável $y = x - 1/2$ na integral acima

$$C(m) = \int_{-1/2}^{1/2} dy y f^{[m]}\left(y + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} dy f^{[m]}\left(y + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}. \tag{3.83}$$

Para efetuar as integrais acima vamos levar em conta a Fig. 3.10, onde estão representadas a primeira e a segunda iteradas do mapa da tenda na variável y. Observamos que tanto $f^{[1]}(y+1/2)$ como $f^{[2]}(y+1/2)$ são simétricas em relação a $y = 0$, o que podemos generalizar para a m-ésima iterada $f^{[m]}(y+1/2)$.

Como $f^{[m]}(y+1/2)$ é uma função par de y, a integral

$$\int_{-1/2}^{1/2} dy y f^{[m]}\left(y + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

se anula pois o integrando é uma função ímpar. Outro resultado importante da Fig. 3.10 é que a área sob os triângulos é a mesma tanto para $f^{[1]}$ como para $f^{[2]}$. Generalizamos essa afirmação dizendo que a integral

$$\int_{-1/2}^{1/2} dy f^{[m]}\left(y + \frac{1}{2}\right)$$

é independente do valor de m. Por exemplo, para $m = 1$ teremos

$$C(m) = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} dy f^{[1]}\left(y + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0, \tag{3.84}$$

de modo que $C(m) = 0$ para todo $m = 1, 2, \ldots$.

Falta, pois, considerar o caso $m = 0$, para o qual (3.82) fica

$$C(0) = \int_0^1 dx x f^{[0]}(x_0) - \frac{1}{4} = \int_0^1 dx x^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \tag{3.85}$$

Reunimos (3.84) e (3.85) no seguinte resultado

$$C(m) = \frac{1}{12}\delta_{m0}, \tag{3.86}$$

onde usamos o delta de Krönecker

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = n, \\ 0, & \text{se } m \neq n. \end{cases} \tag{3.87}$$

Pela definição, $C(m)$ quantifica o grau de "memória" que as iterações do mapa têm, após m iterações do mapa. Uma série periódica (como uma órbita de período p) apresentará um valor relativamente alto de $C(m)$, ao passo que esperamos de uma órbita caótica que a correlação diminua com o valor de m, indicando a perda de "memória" de uma iterada em relação às anteriores.

No mapa da tenda (assim como no de Bernoulli) a órbita caótica é delta-correlacionada, ou seja, cada iterada não tem memória alguma da iterada anterior. Num certo sentido esse resultado provém da análise que fizemos do deslocamento de Bernoulli: em cada iteração do mapa o resultado é tão incerto (na representação binária de x) como o lançamento de cara-coroa de uma moeda. Este é, portanto, o grau mais alto de caoticidade que um fenômeno pode apresentar, o que o torna estatisticamente similar a um processo estocástico (Markoviano).

3.9 Janelas periódicas

No diagrama de bifurcações do mapa logístico, a região predominantemente caótica inicia-se no valor de acumulação das bifurcações de duplicação de período ($r_\infty \approx 3,57$), e termina abruptamente em $r = 4.0$. Dentro dessa região, no entanto, pode-se ver um grande número de janelas periódicas, destacando-se na Fig. 3.11 as de período 6, 5 e 3. Como iremos ver, na sequência, há um número infinitamente grande destas janelas, ainda que a maioria seja muito pequena.

Uma vez que há infinitas janelas periódicas na região predominantemente caótica $(r_\infty, 4]$, pode-se indagar se os intervalos em r correspondentes ao caos tem medida de Lebesgue positiva (comprimento diferente de zero). Essa pergunta foi respondida afirmativamente por Jakobson em 1981, que demonstrou rigorosamente a existência destes intervalos caóticos com medida não-nula [30]. Em outras palavras, se escolhermos ao acaso um valor

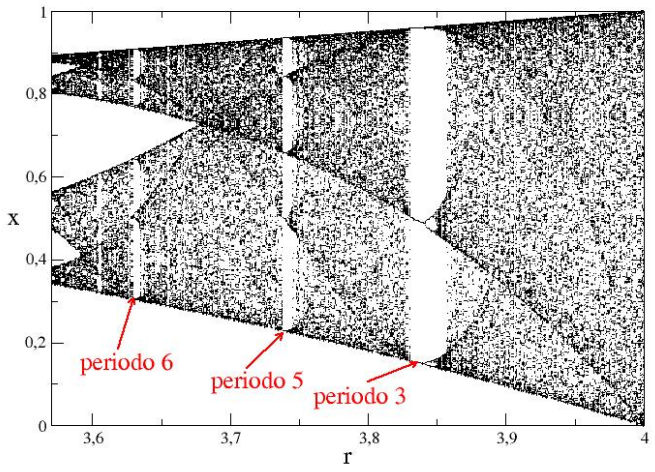

Figura 3.11: Diagrama de bifurcações do mapa logístico na região predominantemente caótica, destacando algumas janelas periódicas.

de $r \in (r_\infty, 4]$ então a probabilidade de encontrar um valor caótico é diferente de zero.

Um cálculo mais preciso, realizado por Farmer em 1985, mostrou que (i) a probabilidade de encontrar um valor de $r \in (r_\infty, 4]$ que leve a uma órbita caótica é da ordem de $89,79\%$; (ii) a probabilidade que uma pequena variação no parâmetro r altere o comportamento qualitativo da órbita é da ordem de 45% [31]. Estes resultados concordam com a existência de intervalos relativamente grandes de r com expoentes de Lyapunov positivos, como mostrado na Fig. 3.5. Voltaremos a esse assunto no Capítulo sobre fractais.

3.9.1 Sequência-U

Um mapa unimodal $f_p(x)$ tem um único ponto crítico x_c com um máximo quadrático. Uma órbita superestável de período m contém o ponto crítico, já que

$$f^{[m]}(x_c; p) = x_c, \qquad \left(f^{[m]}\right)'(x_c; p) = 0. \tag{3.88}$$

Já em 1973, Metropolis, Stein e Stein [29] estudaram o ordenamento para o qual ocorrem órbitas periódicas super-estáveis em mapas unimodais, à medida em que o parâmetro p varia.

No caso particular do mapa logístico, $x_c = 1/2$ é sempre um ponto de qualquer m-ciclo super-estável. Os demais pontos do ciclo são representa-

período m	sequência	valor de r	valor de p
2	R	3,2360680	0,7777338
4	RLR	3,4985617	0,8463822
6	RLRRR	3,6275575	0,8811406
7	RLRRRR	3,7017692	0,9004906
5	RLRR	3,7389149	0,9109230
7	RLRRLR	3,7742142	0,9213346
3	RL	3,8318741	0,9390431
6	RLLRL	3,8445688	0,9435875
7	RLLRLR	3,8860459	0,9568445
5	RLLR	3,9057065	0,9633656
7	RLLRRR	3,9221934	0,9687826
6	RLLRR	3,9375364	0,9735656
7	RLLRRL	3,9510322	0,9782512
4	RLL	3,9602701	0,9820353
7	RLLLRL	3,9689769	0,9857811
6	RLLLR	3,9777664	0,9892022
7	RLLLRR	3,9847476	0,9919145
5	RLLL	3,9902670	0,9944717
7	RLLLLR	3,9945378	0,9966609
6	RLLLL	3,9975831	0,9982647
7	RLLLLL	3,9993971	0,9994507

Tabela 3.2: Sequência-U de m-ciclos super-estáveis no mapa logístico $f(x) = rx(1-x)$ e senoidal $f(x) = p\sin(\pi x)$.

dos, ao invés de números, pelas letras R e L conforme estejam à direita ou à esquerda, respectivamente, do ponto crítico:

$$x_n \to R, \text{ se } x_n > 1/2; \qquad x_n \to L, \text{ se } x_n < 1/2. \tag{3.89}$$

Por exemplo, para $r = 3,2361$ temos um 2-ciclo superestável $\{x_0^* = 1/2, x_1^* = 0,809025\}$. Então, como $x_1^* > 0,5$, portanto será representado pela letra R. Metropolis, Stein e Stein obtiveram a seguinte sequência de ciclos superestáveis à medida em que o parâmetro r é variado [Tabela 3.2].

A sequência de m-ciclos superestáveis é também chamada sequência-U, por ser universal, já que aplica-se a qualquer mapa unimodal. Como exemplo, na Tabela 3.2 mostramos que a mesma sequência-U é observada no mapa

$$x_{n+1} = p\sin(\pi x_n), \tag{3.90}$$

onde p é o parâmetro de bifurcação. Como o ponto crítico, neste caso, é $x = 0$, então nós indicamos por R e L os pontos da órbita superestável com x positivo e negativo, respectivamente.

Observe que a tabela 3.2 não registra os ciclos superestáveis resultantes de bifurcações de duplicação de período. Por exemplo, para $r = 3,4986$ temos um 4-ciclo superestável, mas não estão registrados os ciclos de periódo 8, 16, 32, etc. que aparecem quando $r < r_\infty$.

Já os ciclos superestáveis de períodos 6, 5, 3, etc. já estão na região predominantemente caótica $r > r_\infty$ e portanto correspondem a janelas periódicas. Portanto, a sequência-U nos dá a sequência do aparecimento das janelas periódicas na região predominantemente caótica que termina em $r = 4$. Na Fig. 3.11 apenas as janelas de períodos 6, 5 e 3, mas as demais são estreitas demais para serem visualizadas.

Ainda sobre as janelas periódicas, vemos que há cascatas de bifurcação de período dentro delas. Por exemplo, a janela de período 3 apresenta ciclos superestáveis de períodos 6, 12, 24, etc., e que também não estão registrados na Tabela 3.2.

3.9.2 Derivada Schwarziana

A sequência-U não fornece informações sobre a unicidade ou não das órbitas periódicas superestáveis. Em geral, podem existir muitas órbitas periódicas para um dado valor do parâmetro do mapa. A resposta a essa questão depende da chamada *derivada Schwarziana*.

Seja $f(x)$ definida num certo intervalo, tal que sua terceira derivada, $f'''(x)$ seja contínua. A derivada Schwarziana de f no ponto x é dada por

$$(Sf)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 \tag{3.91}$$

O mapa logístico, por exemplo, tem derivada Schwarziana negativa em todo o intervalo $[0,1]$, pois

$$f'(x) = r(1-2x), \quad f''(x) = -2r, \quad f'''(x) = 0, \tag{3.92}$$

$$(Sf)(x) = -\frac{3}{2}\left(\frac{-2r}{r(1-2x)}\right)^2 = -\frac{6}{(1-2x)^2} < 0 \tag{3.93}$$

Singer demonstrou que se o mapa $f(x)$ tiver n pontos críticos e $(Sf)(x) < 0$ para todo x, então $f(x)$ tem no máximo $n+2$ órbitas periódicas atrativas [19]. O mapa logístico tem apenas um ponto crítico em $x_c = 1/2$. Como sua derivada Schwarziana é negativa em $[0,1]$, o teorema de Singer garante que ele pode ter, no máximo, $1+2 = 3$ órbitas periódicas atrativas para um dado valor de r. Em princípio poderíamos ter 0, 1, 2 ou 3 órbitas estáveis com um certo período, que não é fornecido pelo teorema de Singer

No entanto um corolário do teorema de Singer, e que vale para o mapa logístico, afirma que o mapa terá, no máximo, uma órbita periódica estável. Logo, no mapa logístico podemos ter, na verdade, apenas uma órbita periódica atrativa para um dado r. Portanto, na janela de período 3 temos uma órbita

estável de período 3, e não três pontos fixos atrativos; ou então um ponto fixo e um 2-ciclo, ambos estáveis. De forma geral, um mapa unidimensional $f(x)$ exibirá uma cascata infinita de bifurcações de duplicação de período se sua derivada Schwarziana for negativa para todos os valores de x.

3.9.3 Ordenamento de Sharkowsky

Pode-se organizar o conjunto dos números inteiros positivos da seguinte forma: primeiro listamos os inteiros ímpares começando por 3 em ordem crescente

$$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

Na sequência listamos os inteiros da forma $2\times$ inteiro ímpar:

$$2.3, 2.5, 2.7, 2.9, 2.11, \ldots$$

Depois os inteiros da forma $4\times$ inteiro ímpar, e assim por diante:

$$2^n.3, 2^n.5, 2^n.7, 2^n.9, 2^n.11, \ldots$$

Finalmente listamos em ordem decrescente os inteiros que restaram, que são as potências de 2:

$$2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0.$$

Em 1964 Sharkowski usou este sequenciamento dos inteiros positivos para demonstrar o seguinte resultado para ordenar os pontos periódicos de um mapa unimodal $f(x)$: se para algum valor do parâmetro r, f tem um ponto periódico de período m primo, então f terá, para o mesmo valor do parâmetro, um ponto periódico de período n, onde n precede m [32].

Usando o símbolo $n \prec m$ para indicar que n precede m, o ordenamento de Sharkowski é o seguinte:

$$\begin{aligned} &3 \prec 5 \prec 7 \prec \cdots 2.3 \prec 2.5 \prec 2.7 \prec \cdots \\ &2^2.3 \prec 2^2.5 \prec 2^2.7 \prec \cdots \prec \cdots 2^3.3 \prec 2^3.5 \prec 2^3.7 \prec \cdots \prec \\ &2^4 \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2^1 \prec 2^0. \end{aligned} \tag{3.94}$$

Portanto, se um mapa unimodal (como o logístico) tiver uma órbita de período m para um dado valor do parâmetro, então existirão órbitas com todos os períodos n, tais que $m \prec n$. Por exemplo, como o ordenamento de Sharkowsky termina em $m = 1$, então num mapa unimodal não existem pontos periódicos de período superior a 1, mesmo que instáveis, na região do diagrama $r \in [0, 3]$ onde só há pontos fixos. Sabemos disso por cálculo direto feito no mapa logístico, mas o teorema de Sharkowsky o afirma para qualquer mapa unimodal.

Já se fizermos $m = 3$, que é o primeiro ponto do ordenamento de Sharkowsky, então haverá órbitas de todos os períodos possíveis n. Li e Yorke em 1975 descobriram independentemente este último resultado, e também mostraram que além de um número infinito de órbitas periódicas de todos os períodos possíveis, o mapa também terá um número infinito de órbitas *aperiódicas*. Estas últimas levaram Li e Yorke a usar, pela primeira vez na literatura, a palavra *caos*. De fato, o trabalho de Li e Yorke é intitulado *Period-3 implies chaos* [14].

Um exemplo importante do teorema de Li-Yorke é a janela de período 3 do mapa logístico, onde há um 3-ciclo atrativo a partir de $r = 1 + \sqrt{8}$ [5]. Pelo teorema de Li-Yorke, para esse valor de r, haverá infinitos pontos periódicos com todos os períodos possíveis e também infinitas órbitas aperiódicas. No entanto, todos estes pontos periódicos e órbitas aperiódicas devem ser instáveis, e portanto não aparecem no diagrama de bifurcação.

O caos preconizado pelo Teorema de Li-Yorke refere-se à existência de um número infinito e não-enumerável de pontos no intervalo $[0, 1]$ que não convergem para a órbita estável de período 3. Estes pontos formam um conjunto de medida de Lebesgue nula, ou seja, se tomarmos um ponto no intervalo $[0, 1]$ ao acaso, a probabilidade de obtermos um ponto deste conjunto é nula. Às vezes este tipo de comportamento é denominado de *caos topológico* ou *caos fraco*, pois está associado apenas ao comportamento aperiódico, e não implica automaticamente num expoente de Lyapunov positivo [35]. Não obstante, o caos fraco é importante pois ele influencia o comportamento transiente das iteradas antes delas convergirem para o ciclo atrativo.

3.10 Janela de período 3 e intermitência

A janela de período 3 do mapa logístico surge subitamente em $r_a = 1 + \sqrt{8} \approx 3,8284$ após uma banda de comportamento caótico, na forma de uma órbita estável de período 3 [Fig. 3.12]. Este 3-ciclo, por sua vez, também sofre, a partir de $r_b \approx 3,842$, uma cascata de bifurcações com duplicação de período $3 \to 6 \to 12 \to \cdots 3 \times 2^n \cdots$ e que acumulam-se no valor $r_c \approx 3,849$, dando origem a três bandas caóticas, que fundem-se em $r_d \approx 3,857$, terminando a janela.

O 3-ciclo estável origina-se de uma bifurcação tangente em r_a, na qual são criados um 3-ciclo estável e um 3-ciclo instável, cujos pontos são os pontos fixos da terceira iterada do mapa, $f_r^{[3]}(x)$. A figura 3.13 mostra o comportamento da terceira iterada do mapa logístico na vizinhança do ponto de bifurcação r_a.

Para valores de $r < r_a$ o gráfico de $f_r^{[3]}(x)$ intercepta a primeira bissetriz apenas nos dois pontos instáveis $x_a^* = 0$ e $x_b^* = 1 - 1/r$. Na verdade, para este valor de $r < r_a$ o mapa exibe comportamento caótico. Exatamente no

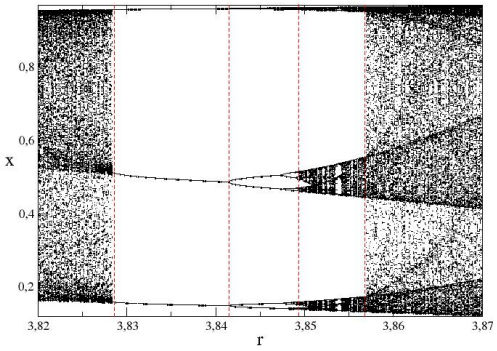

Figura 3.12: Diagrama de bifurcações do mapa logístico na região da janela de período 3.

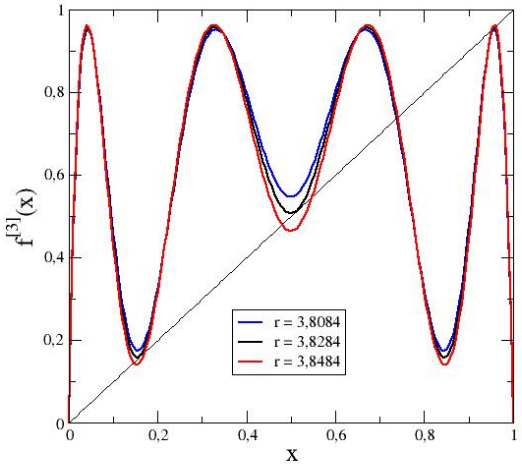

Figura 3.13: Terceira iterada do mapa logístico para valores de r na vizinhança de r_{J3}.

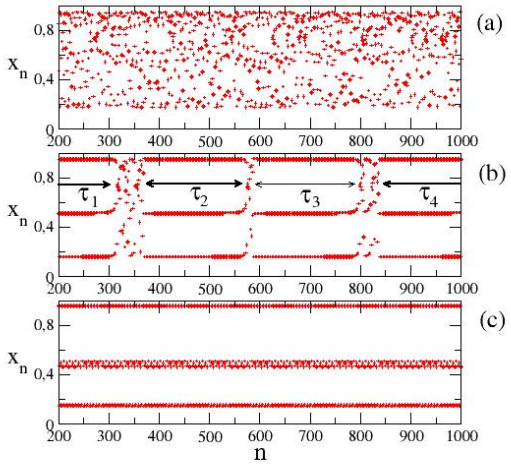

Figura 3.14: Séries temporais para o mapa logístico quando (a) $r = 3,8084$; (b) $r = 3,8284$; (c) $r = 3,8484$.

ponto de bifurcação r_a o gráfico da terceira iterada tangencia a primeira bissetriz nos pontos do 3-ciclo, tais que $f'_{r_a}(x^*) = 1$. Para $r > r_a$ há seis novas interseções, correspondentes às duas órbitas de período 3, uma estável e outra instável.

O súbito aparecimento da janela de período-3, logo após uma região caótica, é explicada pela chamada rota de intermitência para o caos. A intermitência é a alternância, observada em vários modelos dinâmicos, entre dois tipos de comportamento: regular (ou laminar) e caótico [33]. O sistema permanece por um tempo mais ou menos longo num estado regular quiescente, que é interrompido de tempos em tempos por "erupções" caóticas.

A figura 3.14 ilustra este tipo de comportamento, a partir da série temporal do mapa logístico na vizinhança do início da janela de período 3, que ocorre para $r_a = 1 + \sqrt{8} = 3,88427$. Quando $r < r_a$ o comportamento caótico é típico [Fig. 3.14(a)] mas, à medida em que nos aproximamos de r_a a série temporal alterna explosões caóticas com oscilações bem-comportadas, o cenário típico de intermitência [Fig. 3.14(b)]. Além disso, as oscilações são similares à de um 3-ciclo, com durações diferentes τ_1, τ_2, τ_3, etc. Quanto mais perto estivermos de r_a, maiores serão os intervalos até que, em r_a, só restarão as oscilações regulares e teremos apenas o 3-ciclo estável[Fig. 3.14(c)].

3.11 Mecanismo da intermitência

Para descrever quantitativamente essa transição nós computamos a duração média dos intervalos laminares,

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \tau_i \tag{3.95}$$

onde N_p é o número regiões laminares na série temporal. Pomeau e Manneville determinaram a duração média dos intervalos laminares quando r é ligeiramente inferior a r_a e obtiveram a seguinte relação

$$\langle \tau \rangle = K(r - r_a)^{-\gamma} \qquad (r \to r_a^-) \tag{3.96}$$

onde K e $\gamma = 0,5$ são constantes.

Para explicar teoricamente esta relação vamos considerar a Figura 3.13(a), que mostra a terceira iterada do mapa logístico para $r < r_a$. Como não há interseção do gráfico de $f_r^{[3]}$ com a primeira bissetriz, não existirá o ponto fixo. No entanto, se r difere muito pouco de r_a , o gráfico da terceira iterada aproxima-se da primeira bissetriz formando um canal estreito.

Este estreitamento ocorre próximo ao ponto fixo. Os degraus da escada ficam cada vez menores e mais numerosos à medida em que entramos no canal estreito, mas irão sair dali após algum tempo, eventualmente muito alto (e que depende da "largura" do canal). Dentro do canal, as iterações mudam tão pouco de valor que lembram um ponto fixo de $f^{[3]}$, ou seja, um 3-ciclo do mapa.

As iterações x_n na região do canal estreito são similares às de um 3-ciclo e correspondem às regiões laminares. Como as iterações acabam saindo do canal após um certo número τ de iterações, a região laminar tem uma duração finita. Quando as iterações saem do canal elas são reinjetadas nele de forma aleatória, produzindo as erupções de comportamento caótico que intercalam as regiões laminares. Quanto mais nos aproximamos da bifurcação tangente, mas estreito torna-se o canal e maior é a duração da região laminar.

Para demonstrarmos a lei de escala (3.96) utilizaremos o mapa unidimensional [34]:

$$x_{n+1} = f_\varepsilon(x_n) = x_n + \varepsilon + x_n^2, \tag{3.97}$$

Os pontos fixos são $x^*_{a,b} = \pm\sqrt{-\varepsilon}$ que não existem para $\varepsilon < 0$. Já para $\varepsilon > 0$ os pontos fixos x_a^* e x_b^* são, respectivamente, instável e estável, já que

$$f'(x^*_{a,b}) = 1 \pm 2\sqrt{|\varepsilon|}.$$

Há, portanto, uma bifurcação tangente em $\varepsilon = 0$ e $x^* = 0$.

Podemos encarar o mapa (3.97) como uma aproximação para o comportamento do mapa logístico na vizinhança do início da janela de período 3, identificando $\varepsilon = r - r_a$.

Se ε é apenas ligeiramente superior a zero a função $f_\varepsilon(x)$ quase tangencia a primeira bissetriz, formando o canal estreito pelo qual as iterações são "enganadas" pelo fantasma do ponto fixo, antes de serem reinjetadas aleatoriamente. Justamente dentro do canal os degraus da escada são tão pequenos que o tempo pode ser aproximado por uma variável contínua, e podemos aproximar o mapa por uma equação diferencial ordinária [33]

$$\frac{dx}{dt} \approx x_{n+1} - x_n = \varepsilon + x^2, \tag{3.98}$$

que pode ser integrada

$$\int_0^x \frac{dx}{\varepsilon + x^2} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0$$

fornecendo, como resultado

$$x(t) = \varepsilon^{1/2} \tan\left(\sqrt{\varepsilon}(t - t_0)\right). \tag{3.99}$$

Como $\tan x \to \infty$ se $x \to \pi/2$, então $x(t)$ diverge quando $\sqrt{\varepsilon}(t - t_0) \approx \pi/2$, donde podemos estimar a duração média dos intervalos laminares como

$$\langle \tau \rangle = t - t_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon}} \sim \varepsilon^{-1/2} \tag{3.100}$$

No caso do mapa logístico um pouco antes do início da janela de período 3, podemos associar $\varepsilon = r - r_a$, de modo que a duração dos intervalos laminares é dada por (3.100) como

$$\langle \tau \rangle \sim (r - r_a)^{-1/2} \tag{3.101}$$

que concorda com a lei de escala (3.96), com expoente $\gamma = 1/2$.

O mapa (3.97) é tal que as trajetórias que escapam do canal estreito vão para infinito. Ele, portanto, não prevê a reinjeção dos pontos da órbita para que a região laminar se repita. Já o mapa logístico mapeia pontos do intervalo $[0, 1]$ em pontos desse mesmo intervalo. Logo as iterações que saem do canal acabam voltando às vizinhanças dele após algum tempo. Como o valor de r correspondente está no regime caótico, essas reinjeções ocorrem de forma também caótica, provocando as erupções que interrompem de maneira intermitente as regiões laminares.

Pomeau e Manneville descreveram três tipos de intermitência, dos quais a que estudamos nessa seção é classificada como do tipo I, para o qual o expoente da lei de escala é $\gamma = 1/2$. Existem outros dois tipos de intermitência para os quais o expoente característico é $\gamma = 1$ [35].

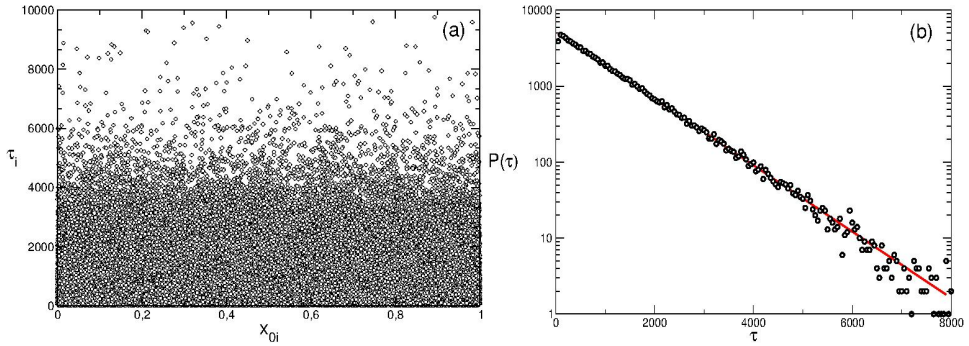

Figura 3.15: (a) Duração dos transientes caóticos para o mapa logístico com $r-4=10^5$ para 10^5 condições iniciais distribuidas aleatoriamente no intervalo $[0,1]$. (b) Histograma das durações. A linha cheia representa um ajuste por regressão linear.

3.12 Crise

Uma crise é um fenômeno bastante comum em sistemas dinâmicos não-lineares, e caracteriza-se por uma súbida mudança no caráter e nas propriedades de uma órbita caótica, à medida em que um parâmetro do sistema passa por um valor crítico. Vamos exemplificar alguns exemplos de crise no mapa logístico, deixando o estudo mais aprofundado deste assunto para o Capítulo 5, onde abordaremos caos em mapas bidimensionais.

3.12.1 Transientes caóticos no mapa logístico

O diagrama de bifurcações do mapa logístico termina no ponto $r=4$, onde a órbita caótica preenche densamente o intervao $[0,1]$, e para a qual nós mostramos que existe o chamado "caos forte". Para $r>4$ as órbitas são mapeadas em menos infinito, por isso o diagrama termina em $r=4$. No entanto a órbita para $r>4$ não tende imediatamente para menos infinito. Ela tem inicialmente um comportamento similar ao da órbita caótica, mas após um certo tempo τ ela diverge. Este comportamento é chamado de *transiente caótico*, por lembrar uma órbita caótica porém com duração finita.

A duração do transiente caótico τ depende da condição inicial x_0 escolhida para a órbita. Por exemplo, tomando um valor $r=4.0+10^{-5}$ determinamos o valor de τ para uma dada condição inicial. Escolhendo um grande número $N_0=10^5$ de condições iniciais escolhidas aleatoriamente entre 0 e 1 obtemos diferentes valores de τ, como mostrado na Fig. 3.15(a).

Uma descrição estatística dessa dependência com a condição inicial pode ser feita usando uma distribuição de probabilidade $P(\tau)$. Uma aproximação numérica dessa distribuição pode ser obtida a partir do histograma da Fig.

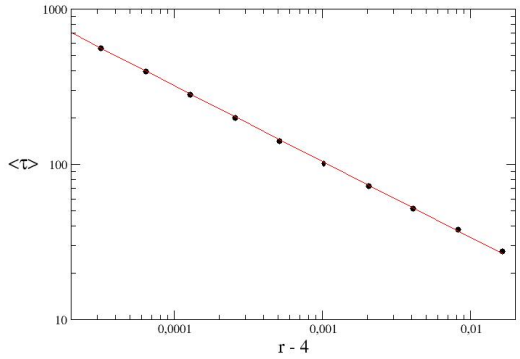

Figura 3.16: Duração média do transiente caótico no mapa logístico como função da diferença $r-4$. A linha cheia representa uma o resultado de uma regressão linear.

3.15(b), onde os dados numéricos podem ser ajustados por uma função exponencial do tipo

$$P(\tau) = P_0\, e^{-\kappa\tau} \tag{3.102}$$

onde $P_0 = 5091,7$ e $\kappa = 1,0059 \times 10^{-3}$.

A partir da distribuição de probabilidade $P(\tau)$ a duração média do transiente caótico é dada por

$$\langle\tau\rangle = \frac{\int_0^\infty \tau P(\tau)\, d\tau}{\int_0^\infty P(\tau)\, d\tau} = \frac{1}{\kappa} = 994,13, \tag{3.103}$$

de forma que (3.102) pode ser reescrita como

$$P(\tau) = P_0 \exp\left(-\frac{\tau}{\langle\tau\rangle}\right). \tag{3.104}$$

Para investigar a dependência da duração média do transiente caótico com a diferença $r-4$, nós variamos esta última desde 10^{-2} até 10^{-7}. O resultado é mostrado na Fig. 3.16, onde um ajuste dos dados fornece uma lei de potência

$$\langle\tau\rangle = K(r-4)^{\beta} \qquad (r \to 4^+) \tag{3.105}$$

onde $K = 3,5502$ e $\beta = 0,489 \pm 0,002$.

3.12.2 Mecanismo da crise

A substituição da órbita caótica por um transiente caótico no mapa logístico, a partir de $r = 4$, é um exemplo do que Grebogi, Ott e Yorke definiram por

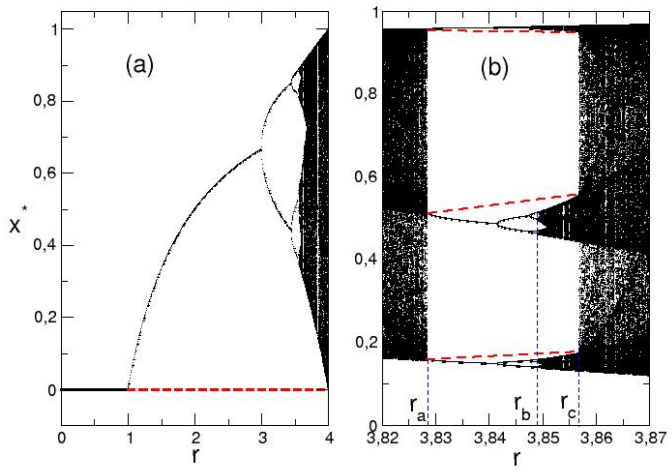

Figura 3.17: (a) Colisão da órbita caótica com o ponto fixo instável do mapa logístico em $r = 4$. (b) Colisão da órbita caótica com o 3-ciclo instável numa janela periódica do mapa logístico

crise. De forma geral, uma crise é uma mudança súbita numa órbita caótica causada pela mudança de um parâmetro. Na crise do mapa logístico em $r = 4$, a mudança súbita é a transformação da órbita caótica num transiente caótico de duração finita.

Como podemos ver na Fig. 3.17(a), a crise no mapa logístico em $r = 4$ é a colisão da órbita caótica, que preenche densamente o intervalo $[0, 1]$, com o ponto fixo instável $x_a^* = 0$ [36]. Para $r > 4$ as iterações do mapa logístico são direcionadas para $x = -\infty$ após terem um comportamento de transiente caótico.

A bacia de atração de uma órbita atrativa (periódica ou caótica) é definida como o conjunto de condições iniciais que convergem assintoticamente para a órbita. No caso do mapa logístico com $0 \leq r \leq 4$, a bacia de qualquer atrator com x finito é o intervalo $[0, 1]$. Considerando $x = -\infty$ como sendo outro atrator existente para $r > 4$, a respectiva bacia de atração é o complemento do intervalo $[0, 1]$ na reta real.

A crise no mapa logístico em $r = 4$ pode ser encarada como a colisão do ponto fixo instável $x^* = 0$ com a fronteira da bacia de atração da órbita caótica em $r = 4$. Por isso ela é classificada como *crise de fronteira*.

Outro exemplo de crise no diagrama de bifurcações do mapa logístico encontra-se no final da janela de período 3, que marca o retorno à banda caótica [Fig. 3.17(b)]. A janela inicia-se em $r_a = 1 + \sqrt{8} \approx 3,8284$ devido a

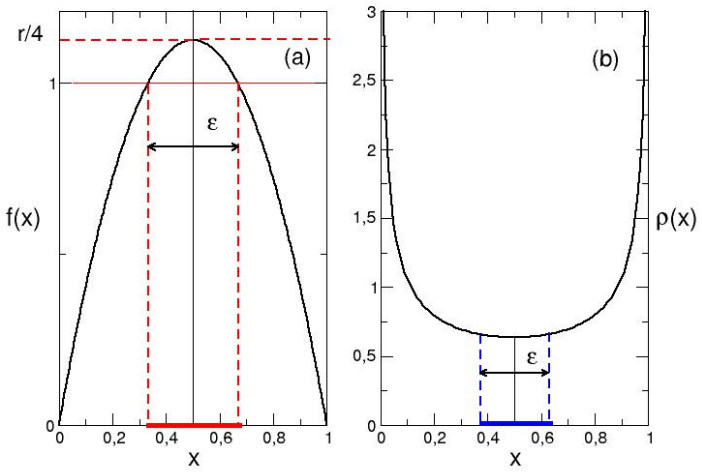

Figura 3.18: (a) Gráfico da primeira iterada do mapa logístico para $r > 4$; (b) Densidade de probabilidade do mapa logístico em $r = 4$.

uma bifurcação tangente que cria duas órbitas de período 3, uma estável e outra instável.

O 3-ciclo estável sofre uma cascata de bifurcações de duplicação do período que acumulam-se em r_b formando uma órbita com três bandas caóticas. Essas bandas caóticas são relativamente estreitas, e alargam-se subitamente em $r_c \approx 3,850$, devido à sua colisão com a órbita instável de período 3. Após a colisão há um alargamento súbito das bandas caóticas, que efetivamente encerra a janela de período 3. Esse é um exemplo de *crise de fusão de atratores*, pois causa um aumento súbito num atrator caótico devido à sua colisão com uma órbita periódica instável.

3.12.3 Teoria para a duração do transiente caótico

Do gráfico do mapa logístico para $r > 4$ vemos que $f(x) > 1$ para um intervalo de valores de x de largura ε centrado no ponto $x = 1/2$ [Fig. 3.18(a)]. Para $r > 4$ a altura da região parabólica acima de $f(x) = 1$ é $\sim r - 4$, donde sua largura deve ser $\varepsilon \sim (r-4)^{1/2}$. Um ponto da órbita que recaia no intervalo $[(1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2]$ será mapeado na região $x > 1$, depois em $x < 0$, e finalmente irá para $x = -\infty$. Assim podemos encarar o intervalo $[(1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2]$ como uma espécie de "região de perda", uma vez que as órbitas de pontos nesse intervalo vão para menos infinito.

Sabemos que, para $r = 4$, a densidade de probabilidade dos pontos da

órbita caótica é dada por (3.61):

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \tag{3.106}$$

que é uma função suave em $x = 1/2$ [Fig. 3.18(b)]. A probabilidade de encontrar um ponto da órbita no intervalo $[(1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2]$ será

$$P(\varepsilon) = \int_{(1-\varepsilon)/2}^{(1+\varepsilon)/2} \rho(x)\,dx = \frac{2\varepsilon}{\pi} \sim \varepsilon. \tag{3.107}$$

Quanto maior a probabilidade de encontrar um ponto da órbita nesse intervalo, menor será o transiente caótico e *vice-versa*. Podemos, assim, associar a duração média do transiente caótico com o inverso da probabilidade

$$\langle\tau\rangle \sim \frac{1}{P(\varepsilon)} \sim \varepsilon^{-1/2} \tag{3.108}$$

de modo que, como $\varepsilon \sim (r-4)^{1/2}$, estimamos a

$$\langle\tau\rangle \sim (r-4)^{-1/2}, \tag{3.109}$$

em conformidade com o resultado (3.105), que obtivemos numericamente. Essa teoria para a crise só depende do mapa ter um comportamento parabólico nas vizinhanças do ponto crítico e também da densidade de probabilidade ser suave nessa vizinhança, portanto é um resultado bastante geral.

3.13 Problemas

1. Faça um programa computacional na linguagem que desejar (ou use algum software matemático) para obter o expoente de Lyapunov para o mapa logístico em $r = 4$ como função do tempo. Verifique que o valor teórico $\lambda = \ln 2$ só é atingido após um tempo suficientemente alto.

2. Faça um programa computacional na linguagem que desejar (ou use algum software matemático) para obter o diagrama de bifurcação de Lyapunov para o mapa logístico, ou seja, o gráfico de λ em função do parâmetro r, desde $r = 0$ até $r = 4$ como função do tempo.

3. (a) Supondo que $Sf < 0$ e $Sg < 0$, mostre que $S(f \circ g) < 0$. (b) Mostre que, se $Sf < 0$, então $Sf^{[n]} < 0$ para todo n inteiro positivo.

4. Mostre que as funções

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{4}, \qquad \left(-\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2}\right)$$

$$g(x) = 3x(1-x), \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

são conjugadas pelo homeomorfismo $h(x) = -x/3 + 1/2$.

5. (a) Suponha que os mapas f e g sejam conjugados pelo homeomorfismo h. Mostre que: (a) $f^{[n]}$ é conjugado a $g^{[n]}$ pelo mesmo homeomorfismo h; (b) se x^* é um ponto periódico de período n de f, então $h(x^*)$ é um ponto de período n de g; (c) mostre que $\{2/7, 4/7, 6/7\}$ é uma órbita de período 3 para o mapa da tenda $T(x)$. Usando o resultado do ítem (b) determine uma órbita de periódo r para o mapa logístico com $r = 4$.

6. Considere as funções $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = rx^2 + sx + t$. (a) Mostre que f e g são conjugadas por um homeomorfismo linear da forma $h(x) = dx + e$. (b) Usando o resultado do ítem (a), ache o homeomorfismo linear que conjuga os mapas $f(x) = x^2 + c$ e $g(x) = \mu x(1-x)$ com $0 < \mu \leq 4$.

7. Hao e Zhang propuseram um método para a determinação dos valores de parâmetros para os quais os mapas unimodais têm órbitas periódicas superestáveis. Para o mapa quadrático $x_{n+1} = a - x_n^2$, onde $0 \leq a \leq 2$, com um ponto crítico em $x_c = 0$, definimos as seguintes funções

$$R(y) = \sqrt{a-y}, \qquad L(y) = -\sqrt{a-y}$$

que são as duas imagens inversas do mapa. Considere a órbita superestável de período 5 RLLR. O valor do parâmetro correspondente a satisfaz a relação $a = RLLR(0)$, já que o ponto crítico pertence à órbita, e os pontos do ciclo são as pré-imagens dele. Então teremos

$$R(0) = \sqrt{a}, \qquad L(R(0)) = -\sqrt{a - R(0)} = -\sqrt{a - \sqrt{a}},$$

$$L(L(R(0))) = -\sqrt{a - L(R(0))} = -\sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a}}}$$

$$a = R(O(O(R(0)))) = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a}}}}$$

Resolva essa equação numericamente transformando-a num mapa

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + \sqrt{a_n + \sqrt{a_n - \sqrt{a_n}}}}$$

Arbitrando uma condição inicial, como $a_0 = 2$, os valores de a_n vão dando aproximações para o valor de a que gera esta órbita superestável. O valor desejado de a é o ponto fixo atrativo, obtido após muitas iterações do mapa. Mostre que este valor é $a = 1,860782522$.

Capítulo 4

Mapas bidimensionais

Na sequência do nosso estudo de sistemas dinâmicos a tempo discreto, vamos considerar agora duas variáveis dinâmicas no tempo discreto n, designando-as por x_n e y_n. Um mapa bidimensional é uma relação entre estas variáveis num certo tempo em função das mesmas variáveis num tempo anterior.

4.1 Mapas bidimensionais lineares

Um mapa bidimensional linear tem a forma geral

$$x_{n+1} = ax_n + by_n + j, \tag{4.1}$$
$$y_{n+1} = cx_n + dy_n + k, \tag{4.2}$$

onde $a, b, \ldots k$ são constantes.

Definindo o vetor das variáveis dinâmicas num tempo n:

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

podemos escrever as equações (4.1)-(4.2) na forma matricial

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_n + \mathbf{B}, \tag{4.4}$$

onde introduzimos as matrizes dos coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

Partindo da condição inicial

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

iteramos (4.4) sucessivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_0+\mathbf{B} \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_1+\mathbf{B}=\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{v}_0+(\mathbf{I}+\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

onde a matriz identidade é

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Generalizando temos, para um tempo n qualquer,

$$\mathbf{v}_n=\mathbf{A}^n\cdot\mathbf{v}_0+(\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots\mathbf{A}^{n-1})\cdot\mathbf{B},$$

onde o termo entre parênteses é uma série geométrica, dada por

$$\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\ldots+\mathbf{A}^{n-1}=(\mathbf{I}-\mathbf{A}^n)\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}, \tag{4.9}$$

onde a inversa da matriz $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ é dada por

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{\det(\mathbf{I}-\mathbf{A})}\begin{pmatrix} 1-d & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

sendo

$$\det(\mathbf{I}-\mathbf{A})=(1-a)(1-d)-bc\neq 0. \tag{4.11}$$

Substituindo (4.9) em (4.9), a solução geral do mapa bidimensional linear é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_n &= \mathbf{A}^n\cdot\mathbf{v}_0+[(\mathbf{I}-\mathbf{A}^n)\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]\cdot\mathbf{B}, \\ &= \mathbf{A}^n\cdot[\mathbf{v}_0-(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}]+(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Mapas bidimensionais estão associados a um vetor de pontos fixos

$$\mathbf{v}^*=\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

que mapeia a si próprio, resultando em

$$\mathbf{v}^*=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B}, \tag{4.14}$$

Com auxílio do ponto fixo acima, reescrevemos a solução geral (4.12) como

$$\mathbf{v}_n=\mathbf{A}^n\cdot(\mathbf{v}_0-\mathbf{v}^*)+\mathbf{v}^*. \tag{4.15}$$

Dada uma condição inicial $\mathbf{v}_0$ a evolução das iteradas do mapa linear pode ser descrita pelo vetor-diferença

$$\mathbf{w}_n=\mathbf{v}_n-\mathbf{v}^*. \tag{4.16}$$

Substituindo (4.16) e (4.14) em (4.4) obtemos

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{w}_n. \tag{4.17}$$

Portanto, sem perda de generalidade, podemos fazer $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ e trabalhar com a forma simplificada do mapa linear:

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_n, \tag{4.18}$$

cujo ponto fixo é a origem ($\mathbf{v}^* = \mathbf{0}$), e com a solução geral

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{v}_0, \tag{4.19}$$

o que equivale, portanto, a transladar a origem do sistema de coordenadas para o ponto fixo.

4.2 Estabilidade do ponto fixo em mapas lineares

Para estudar a estabilidade da origem no mapa linear

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_n, \tag{4.20}$$

será conveniente usar o módulo do vetor $\mathbf{v}_n$

$$|\mathbf{v}_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}. \tag{4.21}$$

O ponto fixo na origem será atrativo, ou assintoticamente estável, se, dada uma condição inicial $\mathbf{v}_0$, as iterações subsequentes $\mathbf{v}_n$ são tais que os respectivos módulos tendem a zero quando o tempo n tende a infinito

$$|\mathbf{v}_n| \to 0 \qquad se \quad n \to \infty. \tag{4.22}$$

Analogamente, a origem será repulsiva, ou instável, se o módulo tender para infinito com o passar do tempo:

$$|\mathbf{v}_n| \to \infty \qquad se \quad n \to \infty. \tag{4.23}$$

Para obter um critério para a determinação da estabilidade nós procuramos soluções na seguinte forma

$$\mathbf{v}_n = \xi^n \mathbf{u}, \tag{4.24}$$

onde ξ é um escalar e $\mathbf{u}$ e um vetor a serem determinados. Substituindo em (4.20) e dividindo por ξ^n (supondo que $\xi \neq 0$) obtemos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \xi \mathbf{u}, \tag{4.25}$$

onde **u** é o autovetor da matriz **A** correspondente ao autovalor ξ.

Os autovalores da matriz **A** são as raízes da equação secular

$$\det(\mathbf{A}-\xi\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a-\xi & b \\ c & d-\xi \end{vmatrix} = \xi^2 - (a+d)\xi + (ad-bc) = 0, \tag{4.26}$$

ou seja

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\tau \pm \sqrt{D}\right), \tag{4.27}$$

onde

$$\tau \equiv \operatorname{tr}\mathbf{A} = a+d, \tag{4.28}$$
$$\Delta \equiv \det\mathbf{A} = ad-bc, \tag{4.29}$$
$$D \equiv \tau^2 - 4\Delta. \tag{4.30}$$

As raízes de (4.26) podem ser reais ou complexos dependendo do discriminante D, de modo que há três situações possíveis:

1. $D > 0$: raízes reais ($\xi_1 \neq \xi_2$);
2. $D = 0$: raízes reais e iguais ($\xi_1 = \xi_2$);
3. $D < 0$: raízes complexas ($\xi_2 = \xi_1^*$).

Para encontrar os autovetores $\mathbf{u}_{1,2}$ correspondentes aos autovalores $\xi_{1,2}$ nós exprimimos a Eq. (4.25) como

$$(\mathbf{A}-\xi\mathbf{I})\cdot\mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{4.31}$$

A solução geral do mapa linear será a combinação linear de duas soluções da forma 4.25, ou seja

$$\mathbf{v}_n = c_1\,\xi_1^n\mathbf{u}_1 + c_2\,\xi_2^n\mathbf{u}_2, \tag{4.32}$$

onde c_1 e c_2 são coeficientes arbitrários, mas que podem ser determinados a partir da condição inicial

$$\mathbf{v}_0 = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2. \tag{4.33}$$

4.2.1 Autovalores reais e distintos

Se os autovalores $\xi_{1,2}$ forem reais e distintos então, a partir da solução geral (4.32), teremos três casos possíveis:

Nó estável: se $|\xi_1| < 1$ e $|\xi_2| < 1$, então $\xi_1^n \to 0$ e $\xi_2^n \to 0$ quando $n \to \infty$. De (4.32) resulta que, dada uma condição inicial $\mathbf{v}_0$ temos que $|\mathbf{v}_n| \to 0$ para $n \to \infty$, de modo que o ponto fixo na origem será atrativo (assintoticamente estável) em ambas as direções [Fig. 4.1(a)];

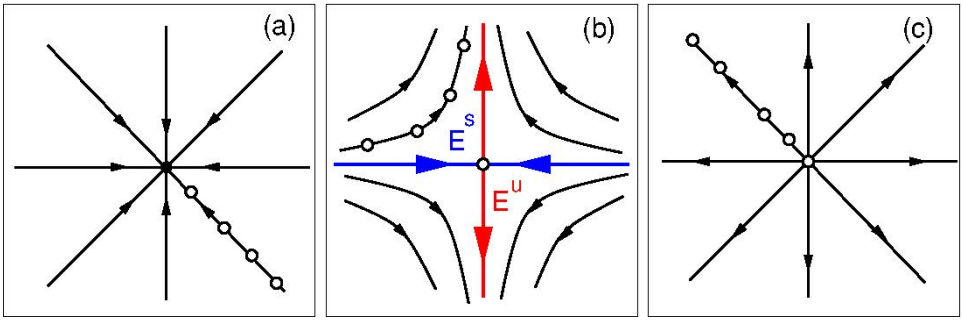

Figura 4.1: Tipos de pontos fixos com autovalores reais e distintos: (a) nó estável, (b) ponto de sela, (c) nó instável. As órbitas mostradas são esquemáticas.

Ponto de sela: para $|\xi_1| < 1$ e $|\xi_2| > 1$ temos $\xi_1^n \to 0$ se $n \to \infty$, ao longo da direção definida pelo autovetor $\mathbf{u}_1$ (chamada *direção estável*, e denotada E^s); e $\xi_2^n \to \infty$ com $n \to \infty$ ao longo da direção definida pelo autovetor $\mathbf{u}_1$ (chamada *direção instável*, e denotada E^u)[Fig. 4.1(b)]. Para uma condição inicial $\mathbf{v}_0$ fora destas direções, os pontos da respectiva órbita tendem a se aproximar do ponto fixo na origem pela direção estável, mas afastam-se dela pela direção instável, em trajetórias hiperbólicas, onde as direções E^s e E^u são assíntotas. Portanto, na prática, o ponto de sela $\mathbf{v}^* = \mathbf{0}$ é instável, pois apenas as condições iniciais que fossem colocadas exatamente sobre a direção estável E^s convergiriam a ele. O mesmo raciocínio é válido, com as devidas alterações, se $|\xi_1| > 1$ e $|\xi_2| < 1$;

Nó instável: se $|\xi_1| > 1$ e $|\xi_2| > 1$, tal que $\xi_1^n \to \infty$ e $\xi_2^n \to \infty$ se $n \to \infty$, então $|\mathbf{v}_n| \to \infty$ para $n \to \infty$, e a origem é repulsiva (instável) nas duas direções [Fig. 4.1(c)];

4.2.2 Autovalores complexos

Como a equação secular (4.26) é do segundo grau, ela poderá ter raízes complexas conjugadas, de forma que os autovalores serão complexos na forma

$$\xi_1 = \mu + i\omega, \tag{4.34}$$
$$\xi_2 = \xi_1^* = \mu - i\omega, \tag{4.35}$$

onde μ e ω são reais. Os autovetores correspondentes serão também complexos, e vamos escrevê-los na seguinte forma

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a} + i\mathbf{b}, \tag{4.36}$$
$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^* = \mathbf{a} - i\mathbf{b}, \tag{4.37}$$

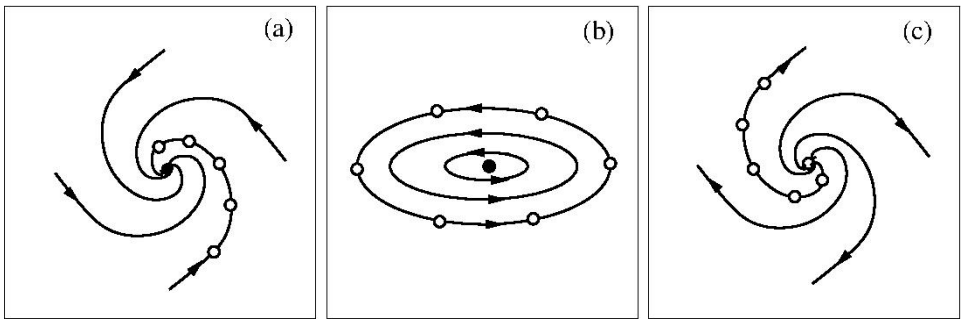

Figura 4.2: Tipos de pontos fixos com autovalores complexos: (a) foco estável, (b) centro, (c) foco instável. As órbitas mostradas são esquemáticas.

onde **a** e **b** são vetores reais.

Assim como no caso anterior, vamos procurar soluções para o mapa linear $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_n$ na forma $\mathbf{v}_n = \xi^n \mathbf{u}$. Para isso, é conveniente expressar os autovalores complexos (4.34)-(4.35) na forma polar

$$\mu \pm i\omega = re^{\pm i\theta} = r(\cos\theta \pm i \sin\theta), \tag{4.38}$$

onde r e θ são coordenadas polares no plano complexo, dadas por

$$r = \sqrt{\mu^2 + \omega^2}, \tag{4.39}$$

$$\tan\theta = \frac{\omega}{\mu}. \tag{4.40}$$

Usando a relação de de Moivre obtemos

$$\xi^n = r^n e^{\pm in\theta} = r^n(\cos n\theta \pm i \sin n\theta), \tag{4.41}$$

de forma que

$$\xi^n \mathbf{u} = r^n \left\{ (\mathbf{a}\cos n\theta - \mathbf{b}\sin n\theta) + i(\mathbf{a}\sin n\theta + \mathbf{b}\cos n\theta) \right\}, \tag{4.42}$$

cujas partes real e imaginária são

$$r^n(\mathbf{a}\cos n\theta - \mathbf{b}\sin n\theta) \qquad r^n(\mathbf{a}\sin n\theta + \mathbf{b}\cos n\theta). \tag{4.43}$$

Cada uma delas é uma solução linearmente independente do mapa linear, tal que a solução geral será uma combinação linear delas:

$$\mathbf{v}_n = c_1\, r^n(\mathbf{a}\cos n\theta - \mathbf{b}\sin n\theta) + c_2\, r^n(\mathbf{a}\sin n\theta + \mathbf{b}\cos n\theta). \tag{4.44}$$

Os termos da forma r^n em (4.44) produzem um aumento ou diminuição do módulo de $\mathbf{v}_n$ com o passar do tempo. O papel dos termos em seno e cosseno, por sua vez, consiste o de girar o vetor $\mathbf{v}_n$. A classificação do ponto fixo na origem será, no caso de autovalores complexos, a seguinte:

Foco estável: se $r < 1$ então $r^n \to 0$ se $n \to \infty$, de modo que $\mathbf{v}_n$ se aproxima da origem numa espiral, e esta é atrativa (assintoticamente estável) [Fig. 4.2(a)];

Centro: se $r = 1$ então $r^n = 1$ para todo n, e as iterações $\mathbf{v}_n$ giram em torno do ponto fixo na origem, o qual é marginalmente estável [Fig. 4.2(b)];

Foco instável: se $r > 1$ então $r^n \to \infty$ para $n \to \infty$, tal que $\mathbf{v}_n$ se afasta da origem, também numa espiral. A origem é repulsiva (instável) [Fig. 4.2(c)].

4.3 Autovalores reais e iguais

Se $\tau^2 = 4\Delta$ então o discriminante é nulo e os autovalores são reais e iguais

$$\xi_1 = \xi_2 = \frac{\tau}{2} \equiv \xi.$$

Nesse caso só haverá um autovetor determinado pelo autovalor ξ, de modo que não podemos mais utilizar a solução geral na forma (4.32). Usando argumentos da álgebra linear , é possível encontrar duas soluções linearmente independentes para substituir (4.32). Pode-se mostrar que, no caso de um único autovalor ξ a matriz $\mathbf{A}^n$ pode ser colocada na seguinte forma (de Jordan)

$$\mathbf{A}^n = \xi^{n-1} \begin{pmatrix} \xi & n \\ 0 & \xi \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

Substituindo esta expressão na solução geral (4.19) teremos

$$x_n = \xi^n x_0 + \xi^{n-1} n y_0, \tag{4.46}$$

$$y_n = \xi^n y_0. \tag{4.47}$$

Se $|\xi| < 1$ então

$$\lim_{n\to\infty} \xi^{n-1} n = 0,$$

donde $x_n \to 0$ e $y_n \to 0$ se $n \to \infty$, tal que $|\mathbf{v}_n| \to 0$. Logo, o ponto fixo na origem é atrativo: podemos chamá-lo de nó estável degenerado. Caso $|\xi| > 1$ então o ponto fixo será repulsivo (nó instável degenerado). O caso $\xi = 1$ fornece uma linha de pontos, dados por $x_n = x_0 + n y_0$ e $y_n = y_0$.

4.4 Exemplos

4.4.1 Nó estável

Consideramos o mapa linear $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_n$, com a seguinte matriz dos coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}, \tag{4.48}$$

cujos autovalores são $\xi_1 = 1/2$ e $\xi_2 = -1/4$. Como $|\xi_1| < 1$ e $|\xi_2| < 1$ o ponto fixo na origem é um nó estável.

Os autovetores da matriz dos coeficientes são as soluções da equação 4.25:

$$\begin{pmatrix} 1/2-\xi & 2 \\ 0 & -1/4-\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.49}$$

As componentes do autovetor correspondendo ao autovalor $\xi_1 = 1/2$ são as soluções do sistema $2u_y = 0$, $-(3/4)u_y = 0$, cuja única solução é $u_y = 0$, ficando a outra componente indeterminada. Temos, então, a liberdade de escolher o valor de u_x. Outro procedimento possível é impor que o autovetor seja normalizado

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 1. \tag{4.50}$$

Ambas as escolhas dão origem a autovetores que são paralelos ou antiparalelos, mas sempre dando a mesma direção no plano.

Se arbitramos $u_x = 1$, por exemplo, o autovetor correspondente é

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.51}$$

que, por acaso, é normalizado. Analogamente, o autovetor (não-normalizado) correspondente ao autovalor $\xi_2 = -1/4$ é

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}. \tag{4.52}$$

A solução geral (4.32) para o mapa linear é

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1\, 2^{-n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\, (-4)^{-n} \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \tag{4.53}$$

Como $x_n \to 0$ e $y_n \to 0$ se $n \to \infty$, o ponto fixo na origem é assintoticamente estável em ambas as direções. Os coeficientes c_1 e c_2 em (4.53) são determinados pelas condições iniciais (x_0, y_0). Fazendo $t = 0$ em (4.53) resulta o sistema

$$x_0 = c_1 + 8\,c_2, \tag{4.54}$$

$$y_0 = -3c_2, \tag{4.55}$$

cuja solução fornece os coeficientes

$$c_1 = x_0 + \frac{8}{3} y_0, \tag{4.56}$$

$$c_2 = -\frac{1}{3} y_0, \tag{4.57}$$

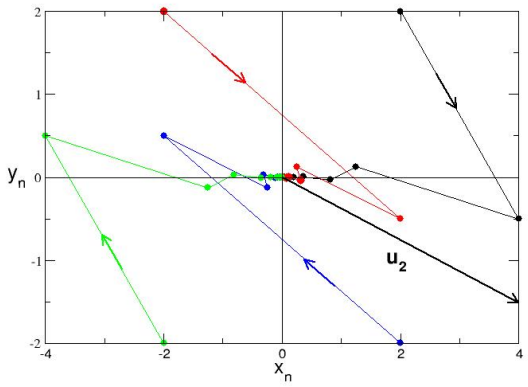

Figura 4.3: Órbitas do mapa (4.48) na vizinhança de um nó estável na origem, para diferentes condições iniciais.

de modo que a solução geral (4.32) pode ser reescrita em termos das condições iniciais

$$x_n = x_0\,2^{-n} + \frac{8}{3}\,y_0\,[2^{-n} - (-4)^{-n}], \tag{4.58}$$

$$y_n = y_0\,(-4)^{-n}. \tag{4.59}$$

Representamos graficamente na Fig. 4.3 algumas das soluções, para quatro valores das condições iniciais, representadas por diferentes cores. Observamos que, ao longo da direção $\mathbf{u}_2$ (correspondente ao autovalor negativo) o comportamento das iterações é oscilatório na sua convergência à origem, ao passo que ao longo do eixo $\mathbf{u}_1$, que é a auto-direção relativa ao autovalor positivo, as iterações próximas ao nó tendem a zero de forma monotônica.

4.4.2 Nó instável

Seja, agora, a matriz de coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \tag{4.60}$$

cujos autovalores são $\xi_1 = 2$ e $\xi_2 = -3$, correspondendo aos seguintes autovetores (não-normalizados)

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}. \tag{4.61}$$

Aplicando a combinação linear destes dois autovetores, em vista da equação (4.32), temos

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1\, 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, (-3)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \tag{4.62}$$

Como $x_n \to \infty$ e $y_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ o ponto fixo na origem é instável em ambas as direções. Reescrevendo (4.62) em termos das condições iniciais, os seus coeficientes são

$$c_1 = \frac{4x_0 + y_0}{5}, \tag{4.63}$$

$$c_2 = \frac{x_0 - y_0}{5}, \tag{4.64}$$

Substituindo (4.63)-(4.64) em (4.62) chegamos à solução geral

$$x_n = \left(\frac{4x_0 + y_0}{5}\right) 2^n + \left(\frac{x_0 - y_0}{5}\right) (-3)^n, \tag{4.65}$$

$$y_n = \left(\frac{4x_0 + y_0}{5}\right) 2^n - 4\left(\frac{x_0 - y_0}{5}\right) (-3)^n. \tag{4.66}$$

Na Fig. 4.4 traçamos órbitas originadas de alguns valores de (x_0, y_0), representadas por diferentes cores. Quando a condição inicial é colocada exatamente sobre a direção do autovetor $\mathbf{u}_1$ (correspondente ao autovalor positivo) as iterações sucessivas do modelo permanecem sobre essa autodireção, como esperado, e divergem de forma monotônica. Já ao longo da direção definida por $\mathbf{u}_2$, cujo autovalor é negativo, essa divergência ocorre de forma oscilatória.

4.4.3 Ponto de sela

Neste exemplo os coeficientes formam a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \tag{4.67}$$

com autovalores $\xi_1 = -1/2$ e $\xi_2 = 2$, correspondendo respectivamente aos autovetores (não-normalizados)

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.68}$$

A solução geral é a combinação linear

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1\, (-2)^{-n} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} + c_2\, 2^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.69}$$

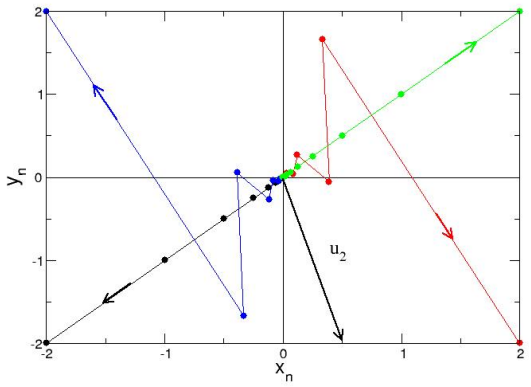

Figura 4.4: Órbitas do mapa (4.60) na vizinhança de um nó instável na origem, para diferentes condições iniciais.

onde os coeficientes, expressos em termos das condições iniciais, são:

$$c_1 = \frac{1}{5}x_0, \tag{4.70}$$

$$c_2 = \frac{6}{5}x_0 + y_0. \tag{4.71}$$

O ponto fixo na origem é um ponto de sela. Se colocarmos a condição inicial exatamente sobre a direção definida pelo autovetor $\mathbf{u}_1$, que corresponde ao autovalor $|\xi_1| < 1$, então $c_2 = 0$ e a solução geral fornece

$$x_n = 5c_1(-2)^{-n}, \tag{4.72}$$

$$y_n = -6c_1(-2)^{-n}. \tag{4.73}$$

de modo que, ao longo da direção $\mathbf{u}_1$, temos que x_n e y_n tendem para zero quando $n \to \infty$. Por isso $\mathbf{u}_1$ define a direção estável. Como $\xi_1 < 0$ essa convergência ao ponto fixo é oscilatória [Fig. 4.5].

Se, por outro lado, posicionamos a condição inicial exatamente sobre a direção $\mathbf{u}_2$, então $c_1 = 0$ e a solução será $x_n = 0$ e $y_n = c_2 2^n$, tal que $y_n \to \infty$ se $n \to \infty$. Por isso $\mathbf{u}_2$ define a direção instável. Como $\xi_2 > 0$ a divergência é monotônica. Podemos ver na Fig. 4.5, que as órbitas tendem a aproximar-se da origem por direções paralelas a E^s mas acabam afastando-se ao longo de E^u. Assim, a direção estável é um *fio de navalha*, fora do qual todas as demais trajetórias afastam-se do ponto de sela, que é instável para todos os efeitos práticos.

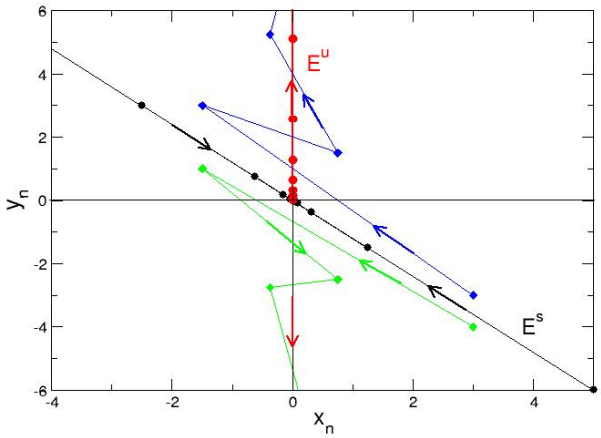

Figura 4.5: Órbitas do mapa linear (4.67) na vizinhança de um ponto de sela na origem.

4.4.4 Centro

Esse tipo de ponto fixo pode ser exemplificado pela seguinte matriz dos coeficientes,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.74}$$

que tem autovalores complexos conjugados $\xi_{1,2} = \pm i$. Na notação usada nas equações (4.34)-(4.35) temos que $\mu = 0$ e $\omega = 1$. De (4.39) e (4.40), as coordenadas polares são $r = 1$ e $\theta = \pi/2$.

Os autovetores complexos associados a $\xi_{1,2}$ são

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \tag{4.75}$$

que, em vista da notação (4.36)-(4.37), nos fornece os vetores reais

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.76}$$

Com eles, a solução geral (4.44) fica

$$\mathbf{v}_n = c_1 \left(\mathbf{a}\cos n\theta - \mathbf{b}\sin n\theta\right) + c_2 \left(\mathbf{a}\sin n\theta + \mathbf{b}\cos n\theta\right), \tag{4.77}$$

cujas componentes são

$$x_n = c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \tag{4.78}$$

$$y_n = -c_1 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right). \tag{4.79}$$

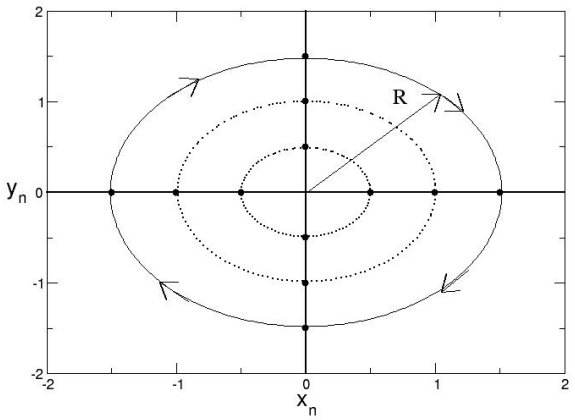

Figura 4.6: Órbitas do mapa (4.74) na vizinhança de um centro na origem.

Fazendo $n = 0$ os coeficientes são $c_1 = x_0$ e $c_2 = y_0$.

Na Fig. 4.6 mostramos algumas órbitas nas vizinhanças do ponto fixo para diferentes condições iniciais. Observamos que os pontos orbitam em torno do centro na origem, no sentido horário, em trajetórias circulares. Para mostrar este fato, elevamos ao quadrado e posteriormente somamos membro-a-membro as relações (4.78)-(4.79), o que resulta em

$$x_n^2 + y_n^2 = x_0^2 + y_0^2 \equiv R^2, \tag{4.80}$$

que é a equação de um círculo no plano de fase (x, y) com centro na origem e raio R. O centro, a rigor, não pode ser classificado como atrativo ou repulsivo, pois as órbitas permanecem indefinidamente sobre esse círculo. Não por acaso, como $|\xi_{1,2}| = 1$, o centro é um caso de estabilidade marginal.

4.4.5 Focos estável e instável

Consideremos a matriz de coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.81}$$

que é a generalização de (4.74), para $\alpha > 0$. Os seus autovalores são imaginários puros $\xi_{1,2} \pm i\alpha$, de modo que $r = \alpha$ e $\theta = \pi/2$.

Os autovetores complexos associados a $\xi_{1,2}$ são os mesmos do caso anterior (4.75), assim como os vetores reais **a** e **b**. A solução geral (4.44) terá

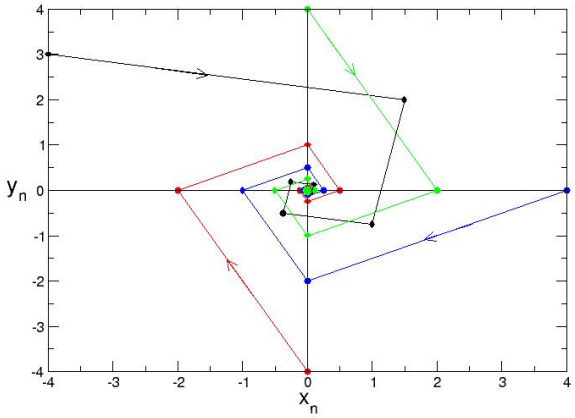

Figura 4.7: Órbitas do mapa (4.81) na vizinhança de um foco estável na origem.

as seguintes componentes

$$x_n = x_0\,\alpha^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + y_0\,\alpha^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \tag{4.82}$$

$$y_n = -x_0\,\alpha^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + y_0\,\alpha^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right). \tag{4.83}$$

Temos, portanto, dois casos possíveis: se $|\alpha| < 1$ então $x_n \to 0$ e $y_n \to 0$ se $n \to \infty$, portanto a origem é atrativa. Os termos em seno e cosseno fazem com que as trajetórias sejam semelhantes a espirais que convergem à origem, que é portanto um foco estável. Na Fig. 4.7 mostramos algumas dessas trajetórias, partindo de diferentes condições iniciais. Por outro lado, se $|\alpha| > 1$, então $x_n \to \infty$ e $y_n \to \infty$ se $n \to \infty$, portanto a origem é repulsiva, ou um foco instável. As órbitas são semelhantes às mostradas na Fig. (4.7), mas afastam-se do ponto fixo.

4.5 Critério geral de estabilidade

Combinando os casos vistos na seção anterior, de autovalores reais e complexos, podemos agrupar as situações onde o ponto fixo na origem é estável. O critério geral de estabilidade é que ambos os autovalores tenham módulos menores do que um: $|\xi_1| < 1$ e $|\xi_2| < 1$. Se os autovalores forem reais, o módulo é simplesmente o valor absoluto; caso complexos, é o módulo no plano complexo (os autovalores devem estar no interior do círculo unitário).

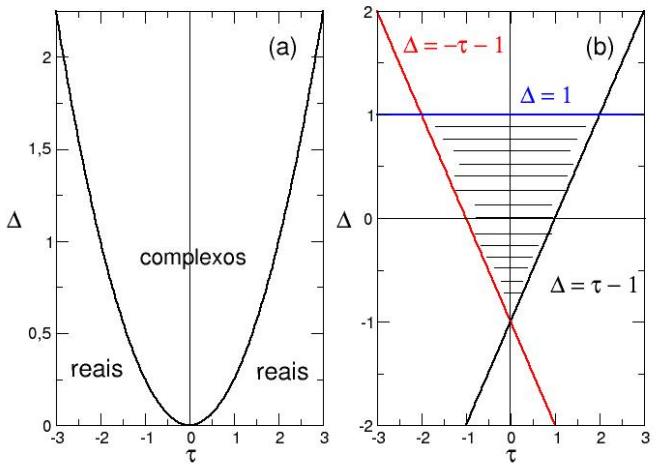

Figura 4.8: (a) Região de autovalores reais e complexos; (b) Região de estabilidade do ponto fixo no diagrama determinante *versus* traço.

Podemos traduzir a condição geral de estabilidade acima em termos dos autovalores

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\tau \pm \sqrt{D}\right), \tag{4.84}$$

onde τ, Δ e D são dados por (4.28), (4.29) e (4.30), respectivamente. Para que os autovalores sejam reais e distintos $D > 0$, de forma que

$$\Delta < \frac{1}{4}\tau^2. \tag{4.85}$$

No diagrama Δ versus τ os pontos correspondentes a autovalores complexos são aqueles na parte interna da parábola de equação $\Delta = \tau^2/4$ [Fig. 4.8(a)]

Os autovalores (4.84) são as soluções da equação secular 4.26:

$$\xi^2 - \tau\xi + \Delta = 0. \tag{4.86}$$

A condição geral de estabilidade do ponto fixo corresponde, em termos dos parâmetros Δ e τ, a uma região delimitada pela equação $|\xi| = 1$, com três possibilidades:

1. $\xi = 1$: substituindo em (4.86) temos

$$1 - \tau + \Delta = 0, \tag{4.87}$$

2. $\xi = -1$: substituindo em (4.86)

$$1 + \tau + \Delta = 1, \tag{4.88}$$

3. $\xi = e^{i\theta}$, onde θ é uma ângulo no círculo unitário. Substituindo em (4.86) teremos

$$\begin{aligned} e^{2i\theta} - \tau e^{i\theta} + \Delta = 0, \\ (\cos 2\theta - \tau \cos\theta + \Delta) + i(\sin 2\theta - \tau \sin\theta) = 0; \end{aligned}$$

Igualando a zero as partes real e imaginária obtemos as condições

$$\Delta = 1, \qquad -2 < \tau < 2. \tag{4.89}$$

As condições para que o ponto fixo na origem seja estável serão

$$\Delta > \tau - 1, \tag{4.90}$$
$$\Delta > -\tau - 1, \tag{4.91}$$
$$\Delta < 1. \tag{4.92}$$

Em termos geométricos, a origem será estável se os valores de Δ e τ estejam no interior do triângulo delimitado pelas retas fixadas pelas condições (4.87)-(4.89): $\Delta = \tau - 1$, $\Delta = -\tau - 1$, e $\Delta = 1$ [Fig. 4.8(b)].

Combinando essa informação com a condição (4.85) podemos identificar no diagrama Δ versus τ as regiões correspondentes aos vários tipos de estabilidade descritos nessa seção [Fig. 4.9]. No caso de um ponto de sela, para o qual $|\xi_1| < 1$ e $|\xi_2| > 1$ ou vice-versa, temos que $|\xi_1 \xi_2| < 1$, donde $|\Delta| < 1$ ou ainda $-1 < \Delta < 1$. Como os pontos de sela são instáveis, então eles correspondem à faixa $-1 < \Delta < 1$ mas fora do triângulo de estabilidade. Já os nós instáveis estão: (i) fora da parábola e acima de $\Delta = 1$, ou (ii) fora da parábola e abaixo de $\Delta = -1$.

4.6 Mapas bidimensionais não-lineares

A forma mais geral de um mapa bidimensional não-linear geral é

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n), \tag{4.93}$$
$$y_{n+1} = g(x_n, y_n), \tag{4.94}$$

onde $f(x,y)$ e $g(x,y)$ sejam funções arbitrárias dos seus argumentos, que podemos escrever na forma matricial

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{v}_n), \tag{4.95}$$

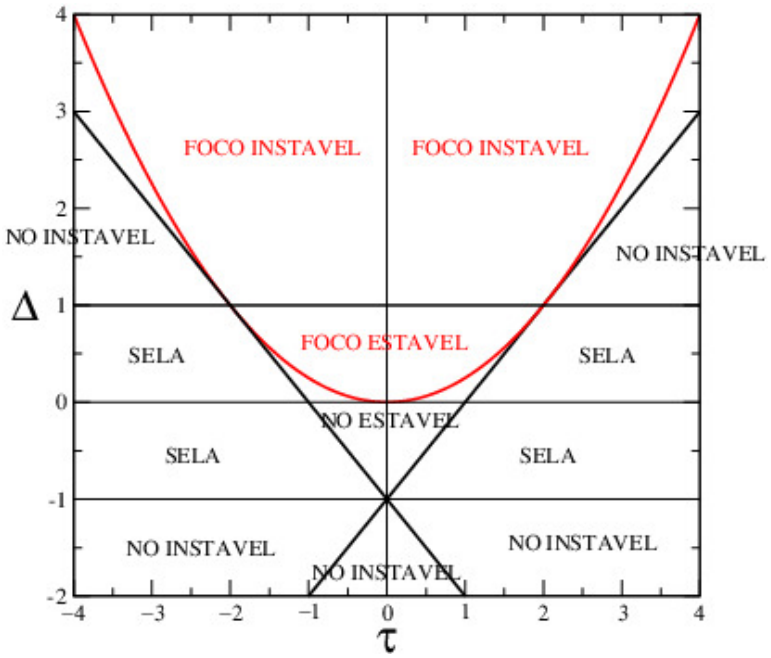

Figura 4.9: Estabilidade do ponto fixo no diagrama determinante *versus* traço da matriz **A**.

onde definimos o campo vetorial

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}. \tag{4.96}$$

Um ponto fixo do mapa bidimensional como (4.95) é o vetor que satisfaz a relação

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{F}(\mathbf{v}^*). \tag{4.97}$$

ou seja

$$x^* = f(x^*,y^*), \tag{4.98}$$
$$y^* = g(x^*,y^*). \tag{4.99}$$

4.6.1 O mapa de Hénon

Como um exemplo, vamos considerar o mapa de Hénon na seguinte forma

$$x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n, \tag{4.100}$$
$$y_{n+1} = x_n \tag{4.101}$$

onde a e b são parâmetros. O ponto fixo será dado pela solução do sistema de equações

$$x^* = a - (x^*)^2 + by^*, \tag{4.102}$$
$$y^* = x^*. \tag{4.103}$$

resultando na equação do segundo grau

$$(x^*)^2 + (1-b)x^* - a = 0, \tag{4.104}$$

cuja solução é

$$x^*_\pm = y^*_\pm = \frac{b-1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2}, \tag{4.105}$$

que existe desde que o radicando seja não-negativo

$$a \geq -\frac{1}{4}(1-b)^2. \tag{4.106}$$

Os vetores correspondentes aos pontos fixos serão, portanto,

$$\mathbf{v}^*_+ = x^*_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}^*_- = x^*_- \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.107}$$

Em seu artigo original de 1976 [38] M. Hénon propôs, na verdade, o seguinte mapa bidimensional

$$X_{n+1} = 1 - aX_n^2 + bY_n, \tag{4.108}$$
$$Y_{n+1} = bX_n. \tag{4.109}$$

Devaney e Nitecki [39] proposeram uma forma alternativa para este mapa

$$x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n, \tag{4.110}$$
$$y_{n+1} = x_n, \tag{4.111}$$

que é (4.100)-(4.101). As duas formas do mapa estão relacionadas por uma transformação linear das variáveis

$$X = \frac{x}{a}, \qquad Y = \frac{by}{a}. \tag{4.112}$$

A forma original do mapa de Hénon (4.108)-(4.109), por sua vez, pode ser obtida como um caso particular do mapa do rotor pulsado [vide Apêndice B].

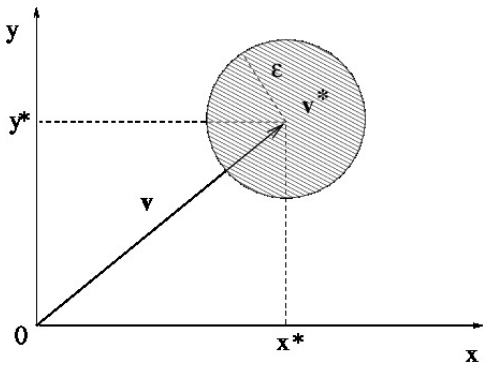

Figura 4.10: Vizinhança de um ponto fixo de um mapa bidimensional.

4.7 Estabilidade dos pontos fixos

Podemos obter a estabilidade do ponto fixo, como fizemos no caso unidimensional, pela linearização do mapa não-linear $\mathbf{F}(x,y)$ na vizinhança do ponto $\mathbf{v}^*$; o que gera um mapa linear, cujas propriedades foram estudadas na seção precedente. Para indicar o tamanho desta vizinhança nós consideramos um círculo de raio ε, onde [Fig. 4.10]

$$\varepsilon \ll |\mathbf{v}^*| = \sqrt{(x^*)^2 + (y^*)^2}.$$

Consideramos pequenos desvios do ponto fixo (x^*, y^*) na forma

$$x_n = x^* + (\delta x)_n, \tag{4.113}$$
$$y_n = y^* + (\delta y)_n, \tag{4.114}$$

onde os incrementos δx_n e δy_n sejam da ordem de ε. Expandindo as funções em séries de Taylor em torno do ponto fixo temos que (4.113) e (4.114), até primeira ordem nos desvios, tornam-se

$$\begin{aligned} x^* + (\delta x)_{n+1} &= f(x^* + (\delta x)_n, y^* + (\delta y)_n), && (4.115)\\ &= f(x^*, y^*) + (\delta x)_n \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x^*,y^*)} + (\delta y)_n \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x^*,y^*)} + \cdots, \\ y^* + (\delta y)_{n+1} &= g(x^* + (\delta x)_n, y^* + (\delta y)_n), && (4.116)\\ &= g(x^*, y^*) + (\delta x)_n \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{(x^*,y^*)} + (\delta y)_n \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{(x^*,y^*)} + \cdots. \end{aligned}$$

e, em vista de (4.98)-(4.99) temos o mapa linearizado

$$(\delta x)_{n+1} = (\delta x)_n \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x^*,y^*)} + (\delta y)_n \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x^*,y^*)}, \tag{4.117}$$
$$(\delta y)_{n+1} = (\delta x)_n \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{(x^*,y^*)} + (\delta y)_n \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{(x^*,y^*)}. \tag{4.118}$$

Definindo o vetor-diferença

$$(\delta\mathbf{v})_n = \begin{pmatrix} (\delta x)_n \\ (\delta y)_n \end{pmatrix}, \tag{4.119}$$

podemos reescrever as equações linearizadas (4.117)-(4.118) na forma

$$(\delta\mathbf{v})_{n+1} = \mathbf{J}(\mathbf{v}^*) \cdot (\delta\mathbf{v})_n, \tag{4.120}$$

onde

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}^*) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{(x^*,y^*)} & \left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)_{(x^*,y^*)} \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x_n}\right)_{(x^*,y^*)} & \left(\frac{\partial g}{\partial y_n}\right)_{(x^*,y^*)} \end{pmatrix} \tag{4.121}$$

é a matriz Jacobiana, cujos elementos são as derivadas calculadas no ponto fixo (x^*, y^*).

4.7.1 Pontos fixos hiperbólicos

O ponto fixo do mapa linearizado (4.120) é a origem $\delta\mathbf{v}^* = \mathbf{0}$, correspondendo ao ponto fixo $\mathbf{v}^*$ do mapa não-linear. A pergunta que se faz necessária neste momento é: será possível determinar a estabilidade local de $\mathbf{v}^*$ a partir da análise do mapa linearizado correspondente, ou seja, a partir dos autovalores da matriz constante $\mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{v}^*)$, denotados por ξ_1 e ξ_2? Tal pergunta pode ser recolocada na seguinte forma: será a estabilidade linear de um ponto fixo alterada pela presença dos termos não-lineares, desde que estes tenham "pequenos" o suficiente? Se a resposta for positiva, o ponto fixo $\mathbf{v}^*$ pode ser considerado *robusto* em relação a perturbações não-lineares pequenas. Caso contrário, $\mathbf{v}^*$ será frágil, ou seja, sua estabilidade pode ser alterada conforme adicionamos os termos não-lineares.

Um ponto fixo $\mathbf{v}^*$ do mapa $\mathbf{F}$ é dito *hiperbólico* se todos os autovalores da matriz Jacobiana do sistema, calculada nesse ponto, $\mathbf{J}(\mathbf{v}^*)$ tiverem módulos diferentes de um:

$$|\xi_1| \neq 1, \qquad |\xi_2| \neq 1, \tag{4.122}$$

caso contrário $\mathbf{v}^*$ é não-hiperbólico. De forma análoga, uma órbita de período m é dita hiperbólica se todos os autovalores da matriz Jacobiana da m-ésima iterada do sistema, dada por (4.172), tenham autovalores com módulo diferente de um.

A importância dos pontos hiperbólicos é expressa pelo teorema de Hartman e Grobman [40, 41]: a dinâmica do mapa não-linear $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ numa pequena vizinhança em torno de um ponto fixo hiperbólico $\mathbf{v}^*$ é *topologicamente equivalente* à dinâmica do mapa linearizado $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ nessa vizinhança. O termo *topologicamente equivalente* significa que existe um homeomorfismo $\mathbf{H}$ [6] que mapeia os pontos numa vizinhança U do ponto fixo do mapa não-linear naqueles do mapa linearizado [Fig. 4.11]. Uma maneira intuitiva

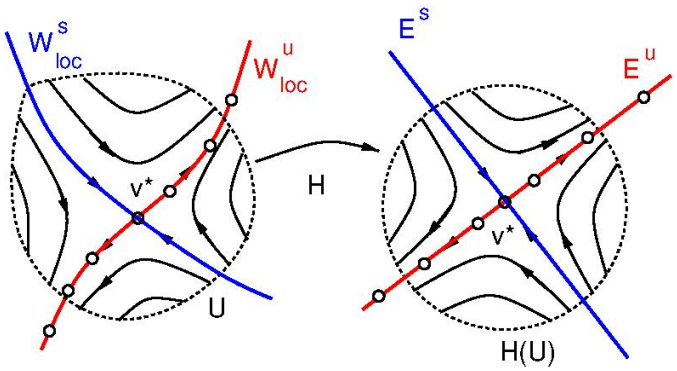

Figura 4.11: Teorema de Hartman-Grobman.

de interpretar o teorema de Hartman-Grobman é considerar a vizinhança U no mapa não-linear como uma versão distorcida da mesma vizinhança no mapa linearizado. O fato de **H** ser um homeomorfismo garante que as orientações das órbitas são as mesmas em ambas as vizinhanças.

Uma consequência imediata do teorema de Hartman-Grobman é que um ponto fixo hiperbólico de um mapa não-linear tem sua estabilidade localmente determinada pela estabilidade do mapa linearizado correspondente. Assim, pontos hiperbólicos são robustos, pois sua estabilidade não é afetada pelos termos não-lineares, enquanto pontos não-hiperbólicos são frágeis, pois sua estabilidade não é necessariamente ditada pela aproximação linear. Em termos da classificação de estabilidade vista na seção anterior, podemos assim classificar os pontos fixos quanto à sua hiperbolicidade como:

- pontos fixos robustos (hiperbólicos)
    1. nós estáveis: $|\xi_1| < 1$ e $|\xi_2| < 1$, com autovalores reais;
    2. focos estáveis: $|\xi_1| < 1$ e $|\xi_2| < 1$, com autovalores complexos;
    3. nós instáveis: $|\xi_1| > 1$ e $|\xi_2| > 1$, com autovalores reais;
    4. focos instáveis: $|\xi_1| > 1$ e $|\xi_2| > 1$, com autovalores complexos;
    5. pontos de sela: $|\xi_1| > 1$ e $|\xi_2| < 1$ ou *vice-versa*, com autovalores reais;
- pontos fixos frágeis (não-hiperbólicos)
    1. centros: $|\xi_1| = 1$, $|\xi_2| = 1$, com autovalores imaginários puros;
    2. nós degenerados: $|\xi_1| = 1$ e/ou $|\xi_2| = 1$, com autovalores reais.

4.8 Estabilidade dos pontos fixos do mapa de Hénon

A matriz Jacobiana do mapa de Hénon (4.100)-(4.101) é

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.123}$$

Calculando os elementos da matriz Jacobiana nos pontos fixos (4.105)

$$x^*_\pm = y^*_\pm = \frac{1}{2}\left\{ b - 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a} \right\}, \tag{4.124}$$

com

$$a \geq -\frac{1}{4}(1-b)^2. \tag{4.125}$$

que

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}^*_\pm) = \begin{pmatrix} -2x^*_\pm & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.126}$$

tal que o seu traço e determinante sejam

$$\tau(\mathbf{v}^*_\pm) = -2x^*_\pm = 1 - b \mp \sqrt{(1-b)^2 + 4a} \tag{4.127}$$

$$\Delta(\mathbf{v}^*_\pm) = -b. \tag{4.128}$$

As condições (4.90)-(4.92) para que os pontos fixos $\mathbf{v}^*_\pm$ sejam estáveis levam-nos às seguintes inequações

$$\Delta > \tau - 1, \quad \Rightarrow \quad \pm\sqrt{(b-1)^2 + 4a} > 0, \tag{4.129}$$

$$\Delta > -\tau - 1, \quad \Rightarrow \quad \pm\sqrt{(b-1)^2 + 4a} < 2(1-b), \tag{4.130}$$

$$\Delta < 1, \quad \Rightarrow \quad b > -1. \tag{4.131}$$

A condição (4.129) só é satisfeita pelo ponto fixo $\mathbf{v}^*_+$, nunca sendo satisfeita por $\mathbf{v}^*_-$ que, por esse motivo, será sempre instável para quaisquer valores dos parâmetros a e b. Já a condição (4.130) implica na seguinte restrição aos valores possíveis do parâmetro a:

$$a < \frac{3}{4}[1 + b(b-2)]. \tag{4.132}$$

Além disso, para que o ponto fixo seja real é necessário também que (4.125) seja satisfeita, de modo que a condição de estabilidade de $\mathbf{v}^*_+$ implica que os parâmetros a e b devam estar nos seguintes intervalos

$$-\frac{1}{4}(1-b)^2 \leq a < \frac{3}{4}(1-b)^2, \qquad b > -1, \tag{4.133}$$

que podem ser visualizadas no plano de parâmetros *a versus b*. Há duas regiões correspondente às condições (4.133): uma à esquerda do ponto $(a = 0, b = 1)$, delimitada pela reta vertical em $b = -1$, e outra à direita, ilimitada.

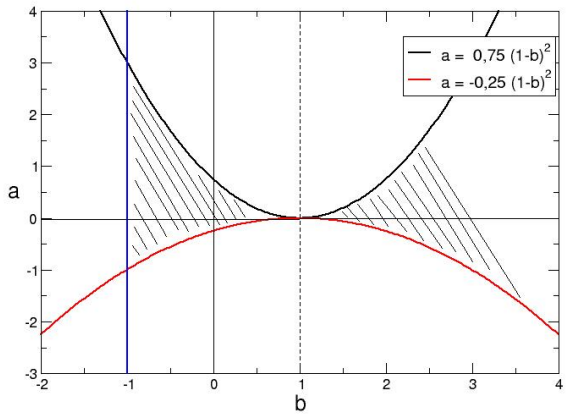

Figura 4.12: Regiões de estabilidade para o ponto fixo $\mathbf{v}_+^*$ do mapa de Hénon.

4.8.1 Autovalores e autovetores da matriz Jacobiana

A matriz Jacobiana do mapa de Hénon, calculada nos seus pontos fixos $\mathbf{v}_\pm^*$, é

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}_\pm^*) = \begin{pmatrix} -2x_\pm^* & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.134}$$

onde, de (4.105),

$$x_\pm^* = \frac{1}{2}\left\{ b - 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a} \right\} \tag{4.135}$$

Os autovalores são dados por (4.27) como funções do traço e do determinante da matriz Jacobiana, e podem ser expressos como funções do ponto fixo:

$$\xi_{1,2} = -x_\pm^* \pm \sqrt{x_\pm^{*2} + b}. \tag{4.136}$$

Para encontrar os autovetores correspondentes nós expressamos a equação (4.25) na forma

$$\left(\mathbf{J}(\mathbf{v}_\pm^*) - \xi\mathbf{I}\right) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{4.137}$$

que fornece um sistema de duas equações homogêneas

$$(-2x_\pm^* - \xi)u_x + bu_y = 0, \tag{4.138}$$

$$u_x - \xi u_y = 0. \tag{4.139}$$

Impondo que os autovetores sejam normalizados temos a condição adicional

$$|\mathbf{u}|^2 = u_x^2 + u_y^2 = 1, \tag{4.140}$$

de modo os autovetores correspondentes aos autovalores ξ_1 e ξ_2 são, respectivamente,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_1^2}} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_2^2}} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.141}$$

O produto escalar destes autovetores é

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{\xi_1\xi_2 + 1}{\sqrt{(\xi_1^2+1)(\xi_2^2+1)}}, \tag{4.142}$$

o qual só é nulo se $\xi_1\xi_2 = -1$. Porém, como $\xi_1\xi_2 = \Delta = -b$, resulta que os dois autovetores não são ortogonais, em geral, desde que $b \neq 1$.

Como um exemplo, tomando $a = 1,29$ e $b = 0,3$, os pontos fixos, dados por (4.135), são

$$x_+^* = y_+^* = 0,838436, \qquad x_-^* = y_-^* = -1,538456. \tag{4.143}$$

Os autovalores da matriz Jacobiana, no ponto fixo $\mathbf{v}_+^*$, são dados por (**??**)

$$\xi_1 = -x_+^* + \sqrt{x_+^2 + b} = 0,1630, \tag{4.144}$$

$$\xi_2 = -x_+^* - \sqrt{x_+^2 + b} = -1,840. \tag{4.145}$$

Como $|\xi_1| < 1$ e $|\xi_2| < 1$, $\mathbf{v}_+^*$ é um ponto de sela. As direções estável e instável são dadas pelos respectivos autovetores, aplicando-se (4.141)

$$E^s : \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0,1609 \\ 0,9869 \end{pmatrix}, \qquad E^u : \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -0,8786 \\ 0,4775 \end{pmatrix}. \tag{4.146}$$

Como o produto escalar dos autovetores acima é $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0,3298$ e os mesmos são normalizados (por construção), o ângulo entre eles será $\theta = \arccos(0,3298) = 70,74^o$. Portanto, como já havíamos adiantado, os autovetores não são, em geral, ortogonais.

Para o ponto fixo $\mathbf{v}_-^*$ autovalores são

$$\xi_1 = -x_-^* + \sqrt{x_-^2 + b} = 3,1715, \tag{4.147}$$

$$\xi_2 = -x_-^* - \sqrt{x_-^2 + b} = -9,453 \times 10^{-3} \tag{4.148}$$

e é, também, um ponto de sela, cujas direções estável e instável são

$$E^u : \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0,9537 \\ 0,3007 \end{pmatrix}, \qquad E^s : \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -9,417 \times 10^{-2} \\ 0,9955 \end{pmatrix}. \tag{4.149}$$

e ângulo entre eles será $\arccos(0,2095) = 77,94^o$.

4.9 Órbitas periódicas

Num mapa bidimensional uma órbita periódica de período 2 é um conjunto de dois vetores $\{\mathbf{v}_0^*, \mathbf{v}_1^*\}$ tais que um mapeia no outro, e vice-versa

$$\mathbf{v}_1^* = \mathbf{F}(\mathbf{v}_0^*), \qquad \mathbf{v}_0^* = \mathbf{F}(\mathbf{v}_1^*), \tag{4.150}$$

Como

$$\mathbf{v}_{0,1}^* = \mathbf{F}^{[2]}(\mathbf{v}_{0,1}^*) \tag{4.151}$$

os pontos da órbita são pontos fixo da segunda iterada.

De modo geral, diz-se que $\mathbf{v}^*$ é um ponto de período m do mapa $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ se ele for um ponto fixo da sua m-ésima iterada

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{F}^{[m]}(\mathbf{v}^*), \tag{4.152}$$

Uma órbita periódica de período m (ou m-ciclo) é um conjunto de m pontos periódicos $\{\mathbf{v}_0^*, \mathbf{v}_1^*, \ldots \mathbf{v}_{m-1}^*\}$ que satisfazem

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{i+1}^* &= \mathbf{F}(\mathbf{v}_i^*), \qquad (i = 0, 1, \ldots m-2), \\ \mathbf{v}_0^* &= \mathbf{F}(\mathbf{v}_{m-1}^*). \end{aligned} \tag{4.153}$$

Assim como vimos para mapas unidimensionais, nem todos os pontos de período m pertencem a um m-ciclo, já que alguns dos pontos de período m são também pontos de períodos $k < m$, onde k divide m.

4.9.1 Órbitas periódicas do mapa de Hénon

O mapa de Hénon (4.100)-(4.101) corresponde ao seguinte campo vetorial

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - x^2 + by \\ x \end{pmatrix}. \tag{4.154}$$

Os pontos de uma órbita de período 2 serão representados pelos vetores

$$\mathbf{v}_0^* = \begin{pmatrix} x_0^* \\ y_0^* \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_1^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ y_1^* \end{pmatrix}, \tag{4.155}$$

que são pontos fixos da segunda iterada do mapa, que é

$$\mathbf{F}^{[2]}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} a - [f(x,y)]^2 + bg(x,y) \\ f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - (a - x^2 + by)^2 + bx \\ a - x^2 + by \end{pmatrix}. \tag{4.156}$$

Aplicando a condição (4.151) chega-se ao seguinte sistema de equações

$$0 = (b-1)x^* + a - (x^{*2} - a)^2 - 2b(a - x^{*2})y - b^2 y^{*2}, \tag{4.157}$$

$$0 = a - x^{*2} + (b-1)y^* \tag{4.158}$$

Isolando y^* em (4.158)

$$y^* = \frac{a - x^{*2}}{1-b}, \tag{4.159}$$

e substituindo em (4.157) obtemos

$$0 = (x^{*2} - a)^2 + (1-b)^3 x^* - (1-b)^2 a. \tag{4.160}$$

que é uma equação do quarto grau com, portanto, quatro raízes. Sabemos que duas delas já são os pontos fixos anteriormente determinados, (4.105), os quais são raízes da equação do segundo grau

$$x^{*2} + (1-b)x^* - a = 0. \tag{4.161}$$

Podemos fatorar estas duas raízes escrevendo (4.160) como o produto de dois trinômios quadráticos

$$[x^{*2} + (1-b)x^* - a][\alpha x^{*2} + \beta x^* + \gamma] = 0, \tag{4.162}$$

onde os coeficientes α, β e γ devem ser determinados comparando (4.160) com (4.162). Igualando potências semelhantes de x^* obtemos, após alguma álgebra,

$$\alpha = 1, \tag{4.163}$$
$$\beta = -\alpha(1-b) = -1 + b, \tag{4.164}$$
$$\gamma = -2a + a\alpha - \beta(1-b) = -a + (1-b)^2. \tag{4.165}$$

Assim, os pontos da órbita de período 2 serão as raízes da equação do segundo grau

$$x^{*2} - (1-b)x^* - a + (1-b)^2 = 0, \tag{4.166}$$

que são

$$x^*_{0,1} = \frac{1 - b \pm \sqrt{4a - 3(1-b)^2}}{2}, \tag{4.167}$$

e, usando (4.159),

$$y^*_{0,1} = \frac{a - (x^*_{0,1})^2}{1-b}, \tag{4.168}$$

que serão números reais desde que

$$a \geq \frac{3}{4}(1-b)^2. \tag{4.169}$$

4.10 Estabilidade de órbitas periódicas

Os pontos de uma órbita de período m,

$$\left\{\mathbf{v}_0^*, \mathbf{v}_1^*, \ldots \mathbf{v}_{m-1}^*\right\}$$

são pontos fixos da m-ésima iterada do mapa

$$\mathbf{v}_i^* = \mathbf{F}^{[m]}(\mathbf{v}_i^*), \qquad (i = 0, 1, \ldots m-1). \tag{4.170}$$

Assim, devemos calcular os autovalores da matriz Jacobiana da m-ésima iterada do mapa, com os elementos calculados num ponto da órbita, como por exemplo $\mathbf{J}^{[m]}(\mathbf{v}_0^*)$.

No caso de mapas unidimensionais, usamos a regra da cadeia para determinar a derivada da m-ésima iterada de uma função $f(x)$ no ponto x_0^* [Eq. (2.37)]:

$$\left.\frac{df^{[m]}(x)}{dx}\right|_{x=x_0^*} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_{m-1}^*} \cdots \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_1^*} \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0^*}. \tag{4.171}$$

Analogamente, a matriz Jacobiana da m-esima iterada do mapa bidimensional $\mathbf{F}$ no ponto $\mathbf{v}_0^*$ será o produto das matrizes Jacobianas em cada ponto da órbita de período m:

$$\mathbf{J}^{[m]}(\mathbf{v}_0^*) = \mathbf{J}(\mathbf{v}_{m-1}^*) \cdot \ldots \mathbf{J}(\mathbf{v}_1^*) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{v}_0^*), \tag{4.172}$$

de forma que a estabilidade do ponto $\mathbf{v}_0^*$ será determinada pelos autovalores da matriz acima.

Ao contrário do produto das derivadas em (4.171), o produto matricial não é comutativo, em geral, então a ordem em que os produtos das matrizes Jacobianas são feitos deveria ser relevante. Por exemplo, para uma órbita de período 2 teremos, de (4.172)

$$\mathbf{J}^{[2]}(\mathbf{v}_0^*) = \mathbf{J}(\mathbf{v}_1^*) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{v}_0^*), \tag{4.173}$$

ao passo que

$$\mathbf{J}^{[2]}(\mathbf{v}_1^*) = \mathbf{J}(\mathbf{v}_0^*) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{v}_1^*). \tag{4.174}$$

No entanto, um teorema da álgebra linear nos garante que os autovalores do produto de matrizes não são alterados quando fazemos uma permutação cíclica das mesmas, portanto os autovalores de $\mathbf{J}^{[2]}(\mathbf{v}_0^*)$ e $\mathbf{J}^{[2]}(\mathbf{v}_1^*)$ são os mesmos. Assim, se $\mathbf{v}_0^*$ for estável (instável), assim também $\mathbf{v}_1^*$ será estável (instável). Concluimos, então, para o caso de órbitas de período m, que o produto ordenado das m matrizes Jacobianas (4.172) pode ser feito a partir de qualquer um dos pontos da órbita.

A partir dos autovalores da Jacobiana $\mathbf{J}^{[m]}(\mathbf{v}_0^*)$, a estabilidade dos pontos da órbita de período m será dada pelo traço e determinante (triângulo da estabilidade)

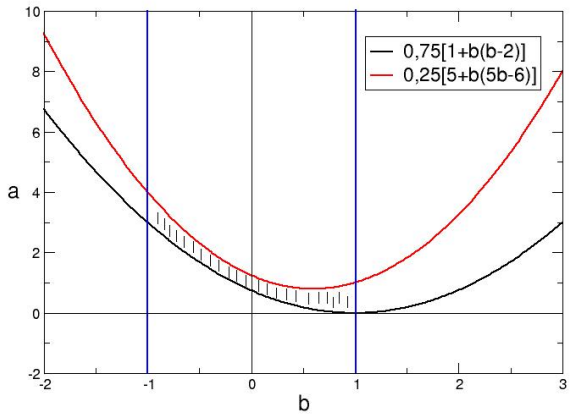

Figura 4.13: Região de estabilidade do 2-ciclo no plano de parâmetros para o mapa de Hénon.

4.10.1 Estabilidade do 2-ciclo do mapa de Hénon

A órbita de período 2 para o mapa de Hénon tem pontos $\{x_0^*, x_1^*\}$ dados por (4.167)-(4.168). A matriz Jacobiana da segunda iterada, no ponto $\mathbf{v}_0^*$, é dada por (4.173):

$$\mathbf{J}^{[2]}(\mathbf{v}_0^*) = \begin{pmatrix} -2x_0^* & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_1^* & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_0^* x_1^* + b & -2x_1^* b \\ -2x_0^* & b \end{pmatrix}. \quad (4.175)$$

Calculando o traço e o determinante obtemos

$$\begin{aligned} \tau &= \mathrm{tr}\,\mathbf{J}^{[2]} = 4x_0^* x_1^* + 2b, \\ &= \left\{1 - b + \sqrt{4a - 3(1-b)^2}\right\}\left\{1 - b - \sqrt{4a - 3(1-b)^2}\right\} + 2b, \\ &= 4 - 4a + 4b^2 - 6b, \quad (4.176) \\ \Delta &= \det \mathbf{J}^{[2]} = (4x_1^* x_2^* + b)b - 4x_1^* x_2^* b = b^2. \quad (4.177) \end{aligned}$$

As condições (4.90)-(4.92) para que os pontos do 2-ciclo $\mathbf{v}_{0,1}^*$ sejam estáveis levam-nos às seguintes inequações

$$\begin{aligned} \Delta > \tau - 1, &\quad \Rightarrow \quad 4a + 6b - 3b^2 > 3, \quad (4.178) \\ \Delta > -\tau - 1, &\quad \Rightarrow \quad 4a + 6b - 5b^2 < 5 \quad (4.179) \\ \Delta < 1, &\quad \Rightarrow \quad b^2 < 1. \quad (4.180) \end{aligned}$$

que nos levam às seguintes condições sobre os parâmetros do mapa de Hénon

$$\frac{3}{4}[1+b(b-2)] < \quad a \quad < \frac{1}{4}[5+b(5b-6)], \tag{4.181}$$

$$-1 < \quad b \quad < 1, \tag{4.182}$$

representados no plano de parâmetros *a versus b*. A região de estabilidade é a área hachureada no diagrama.

Como um exemplo, se $a = 0,43$ e $b = 0,4$ os pontos do 2-ciclo, dados por (4.167)-(4.168), são

$$x_0^* = 0,7, \qquad y_0^* = -0,1; \qquad x_1^* = -0,1, \qquad y_1^* = 0,7. \tag{4.183}$$

As matrizes Jacobianas calculadas nestes pontos são

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}_0^*) = \begin{pmatrix} -1,4 & 0,4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J}(\mathbf{v}_1^*) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.184}$$

e a matriz Jacobiana da segunda iterada do mapa de Hénon é

$$\mathbf{J}^{[2]}(\mathbf{v}_1^*) = \mathbf{J}(\mathbf{v}_1^*) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{v}_0^*) = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,08 \\ -1,4 & 0,4 \end{pmatrix}. \tag{4.185}$$

O traço e o determinante desta matriz são $\tau = 0,52$ e $\Delta = 0,16$, respectivamente, e os seus autovalores, de acordo com (4.27), são $\xi_{1,2} = 0,26 \pm 0,30i$, que estão no interior do círculo unitário no plano complexo, já que $|\xi_{1,2}| = 0,4 < 1$. Logo, os pontos do 2-ciclo são focos estáveis.

4.11 Iterações diretas e inversas

Um mapa $\mathbf{F}$ é inversível se $\mathbf{F}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{F}(\mathbf{v}_2)$ implica em $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, ou seja, o mapa é uma aplicação injetora e sobrejetora. Assim, se $\mathbf{w} = \mathbf{F}(\mathbf{v})$, então $\mathbf{v} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{w})$, onde $\mathbf{F}^{-1}$ é o mapa inverso. Se designarmos por $\mathbf{I}$ o mapa identidade

$$\mathbf{I}(\mathbf{v}) = \mathbf{I} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}, \tag{4.186}$$

então o mapa inverso satisfaz as relações

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F} = \mathbf{I} \tag{4.187}$$

As iterações diretas (ou imagens) do mapa, $\mathbf{F}^{[n]}(\mathbf{v})$ são tais que o tempo flui no sentido positivo: $n = 0,1,2,\ldots$. Se o mapa for inversível, existe o mapa inverso $\mathbf{F}^{-1}$ e as iterações inversas (ou pré-imagens) são $\mathbf{F}^{[-n]}$. Como vimos no capítulo 2, se o mapa não for inversível, haverá mais do que uma pré-imagem de cada ponto.

Por exemplo, o mapa bidimensional linear

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{B} \tag{4.188}$$

tem inversa

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}^{-1}\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{B}), \tag{4.189}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}^{-1}\circ\mathbf{F})(\mathbf{v}) &= \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}(\mathbf{v})) = \mathbf{A}^{-1}\cdot(\mathbf{F}(\mathbf{v})-\mathbf{B}) \\ &= \mathbf{A}^{-1}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{B}-\mathbf{B}) = \mathbf{I}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\end{aligned}$$

Se a matriz dos coeficientes é

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{4.190}$$

então sua inversa será

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{4.191}$$

de modo que a inversa existirá se

$$\det\mathbf{A} = ad-bc \neq 0 \tag{4.192}$$

Outro exemplo é o mapa de Hénon

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} a-x^2+by \\ x \end{pmatrix}. \tag{4.193}$$

Definindo

$$\begin{aligned}x' &= a-x^2+by, \\ y' &= x,\end{aligned}$$

nós isolamos x e y como função de x' e y'

$$\begin{aligned}x &= y', \\ y &= (x'-a+x^2)/b = (x'-a+y'^2)/b\end{aligned}$$

e trocamos $y' \to y$ e $x' \to x$, para obter o mapa inverso

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} y \\ (x-a+y^2)/b \end{pmatrix}. \tag{4.194}$$

Para verificar o resultado computamos

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}(\mathbf{v})) = \begin{pmatrix} x \\ (a-x^2+by-a+x^2)/b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{v}$$

4.12 Direções e curvas invariantes

Um elemento essencial na compreensão da dinâmica de mapas não-linear é o estudo das direções e curvas invariantes de um ponto fixo hiperbólico. As curvas invariantes fornecem diversas informações importantes sobre a evolução do sistema, incluindo a própria existência de caos, como veremos no próximo Capítulo.

4.12.1 Direções invariantes

Pelo teorema de Hartman-Grobman, o comportamento do mapa não-linear na vizinhança de um ponto fixo hiperbólico $\mathbf{v}^*$ é similar ao do mapa linearizado $\mathbf{J}(\mathbf{v}^*)\cdot\mathbf{v}$. Assim os autovalores da matriz Jacobiana foram usados para determinar a estabilidade do ponto fixo $\mathbf{v}^*$. Outra informação vem da solução geral do mapa linearizado, que escrevemos na forma (4.32):

$$\mathbf{v}_n = c_1\xi_1^n\mathbf{u}_1 + c_2\xi_2^n\mathbf{u}_2, \tag{4.195}$$

onde $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são os autovetores de $\mathbf{J}(\mathbf{v}^*)$ correspondentes aos autovalores ξ_1 e ξ_2, respectivamente, e c_1 e c_2 são constantes fixadas pelas condições iniciais.

Se colocarmos a condição inicial exatamente na direção determinada pelo autovetor $\mathbf{u}_1$, então

$$\mathbf{v}_0 = c_1\mathbf{u}_1. \tag{4.196}$$

Por outro lado, fazendo $n = 0$ em (4.195) obtemos

$$\mathbf{v}_0 = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2. \tag{4.197}$$

Comparando (4.196) e (4.197) obtemos $c_2 = 0$ e a solução para qualquer tempo n se escreve

$$\mathbf{v}_n = c_1\xi_1^n\mathbf{u}_1. \tag{4.198}$$

Portanto, todas as iteradas diretas $n = 1, 2, 3, \ldots$ e inversas $n = -1, -2, -3, \ldots$ permanecerão rigorosamente na direção $\mathbf{u}_1$. Por esse motivo ela é uma *direção invariante* em relação ao mapa linearizado nas vizinhanças do ponto fixo.

Vamos supor que $\mathbf{v}^*$ seja um ponto de sela, com autovalores da matriz Jacobiana $|\xi_1| < 1$ e $|\xi_2| > 1$. Os autovetores correspondentes $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são chamados direções estável e instável. Como vimos, ambas são direções invariantes em relação à dinâmica do mapa linearizado $\mathbf{J}\cdot\mathbf{v}$ e de sua inversa $\mathbf{J}^{-1}\cdot\mathbf{v}$:

direção estável: as iterações diretas do mapa linearizado se aproximam do ponto fixo $\mathbf{v}^*$ quando o tempo tende a infinito

$$E^s : \mathbf{J}^{[n]}(\mathbf{v}^*)\cdot\mathbf{v}_0 \to \mathbf{v}^*, \qquad (n \to \infty). \tag{4.199}$$

direção instável: as iterações inversas do mapa linearizado se aproximam assintoticamente do ponto fixo,

$$E^u : \mathbf{J}^{[-n]}(\mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{v}_0 \to \mathbf{v}^*, \qquad (n \to \infty). \tag{4.200}$$

Como um exemplo, vamos considerar um mapa linearizado onde a matriz dos coeficientes seja

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \tag{4.201}$$

com autovalores $\xi_1 = 2$ e $\xi_2 = 1/2$, correspondendo respectivamente aos autovetores normalizados

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.202}$$

Como $|\xi_1| > 1$ e $|\xi_2| < 1$ então $\mathbf{u}_1$ define a direção invariante instável E^u e $\mathbf{u}_2$ a direção invariante estável E^s para o ponto de sela na origem.

4.13 Curvas invariantes

As direções invariantes estável (E^s) e instável (E^u) referem-se ao mapa linearizado no ponto fixo: $\mathbf{J}(\mathbf{v}^*)$. Sendo este ponto hiperbólico, vimos que a dinâmica na sua vizinhanças sob a ação tanto do mapa não-linear $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ como do mapa linearizado $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ são topologicamente equivalentes. Portanto, para mapas não-lineares há análogos das direções invariantes que chamamos de curvas invariantes locais (pois estão definidas na vizinhança do ponto fixo).

Definimos a curva invariante estável local que emana do ponto de sela $\mathbf{v}^*$, denotada por $W^s_{loc}(\mathbf{v}^)$, como o conjunto de condições iniciais $\mathbf{v}_0$ tais que as iterações diretas do mapa não-linear $\mathbf{F}$ aproximam-se do ponto fixo quando o tempo tende a infinito. Além disso, a curva é invariante no sentido de que todos os pontos $\mathbf{v}_n$ pertencem à curva, ou seja, se $\mathbf{v}_0 \in W^s_{loc}(\mathbf{v}^)$, então $\mathbf{v}_n \in W^s_{loc}(\mathbf{v}^)$ para todo n, tal que

$$\mathbf{F}^{[n]}(\mathbf{v}_0) \to \mathbf{v}^*, \qquad (n \to \infty). \tag{4.203}$$

Analogamente, a curva invariante instável local $W^u_{loc}(\mathbf{v}^)$ é o conjunto de condições iniciais $\mathbf{v}_0 \in W^s_{loc}(\mathbf{v}^)$ tais que as iterações sucessivas $\mathbf{v}_n$ do mapa inverso $\mathbf{F}^{-1}$ pertencem à curva e aproximam-se assintoticamente do ponto fixo quando o tempo tende a infinito.

$$\mathbf{F}^{[-n]}(\mathbf{v}_0) \to \mathbf{v}^*, \qquad (n \to \infty), \tag{4.204}$$

O Teorema das Variedades Invariantes nos garante que, para um mapa $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ com ponto fixo hiperbólico $\mathbf{v}^*$, existem curvas invariantes estável e

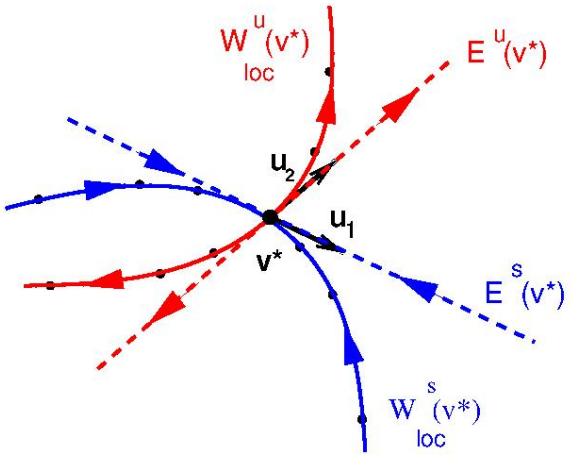

Figura 4.14: Curvas e direções invariantes locais para um ponto de sela do mapa.

instável locais tangentes às direções invariantes estável e instável no ponto fixo, e com as mesmas dimensões destas direções. Portanto, num ponto de sela as curvas invariantes estável e instável locais interceptam-se transversalmente e são tangentes às respectivas direções [Fig. 4.14].

As curvas invariantes locais $W^s_{loc}(\mathbf{v}^*)$ (estável) e $W^u_{loc}(\mathbf{v}^*)$ (instável) são definidas na vizinhança do ponto fixo $\mathbf{v}^*$. Mas elas têm análogos globais (em todo o plano de fase) obtidos a partir da união das imagens diretas e inversas das respectivas curvas locais. Definimos, assim, as curvas invariantes instável e estável globais como

$$W^u(\mathbf{v}^*) = \bigcup_{n\geq 0} \mathbf{F}^{[n]}(W^u_{loc}(\mathbf{v}^*)) \tag{4.205}$$

$$W^s(\mathbf{v}^*) = \bigcup_{n\geq 0} \mathbf{F}^{[-n]}(W^s_{loc}(\mathbf{v}^*)) \tag{4.206}$$

Na maioria dos casos a determinação das curvas invariantes locais e globais é feita numericamente. Em alguns casos, porém, é possível fazê-lo analiticamente. Como um exemplo, seja o mapa não-linear

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} x/2 \\ 2y - 7x^2 \end{pmatrix}, \tag{4.207}$$

que tem um ponto fixo na origem. A matriz Jacobiana correspondente é

$$\mathbf{J}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{4.208}$$

que está na forma diagonal. A origem é um ponto de sela com autovalores $\xi_1 = 1/2$ e $\xi_2 = 2$, com autovetores $\mathbf{u_1} = (1,0)^T$ (direção estável E^s) e $\mathbf{u_2} = (0,1)^T$ (direção instável E^u) [Fig. 4.15].

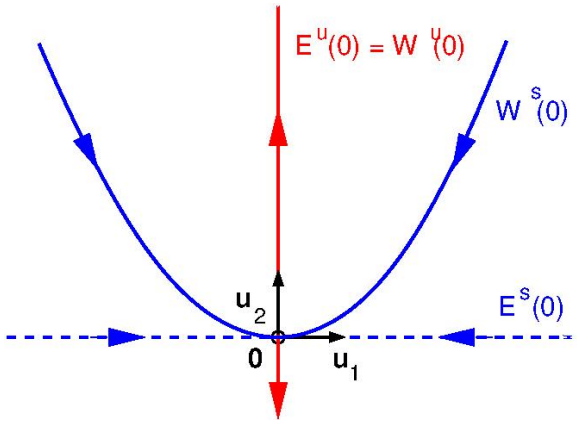

Figura 4.15: Curvas e direções invariantes para um ponto de sela do mapa $\mathbf{F}(x,y) = (x/2, 2y - 7x^2)$.

Sabemos que W^s é tangente a E^s, e W^u é tangente a E^u na origem. Vamos posicionar uma condição inicial exatamente na direção instável E^u, ou seja, com $x_0 = 0$ e $y_0 \neq 0$. De (4.207) temos

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y_0 \end{pmatrix},$$

de modo que $x_n = 0$ e $y_n = 2^n y_0$, ou seja, as iteradas subsequentes permanecerão sobre o eixo vertical E^u. Logo a curva invariante instável coincide com a direção instável ($W^s(\mathbf{0}) \equiv E^s$).

Já a curva invariante estável $W^s(\mathbf{0})$ é a parábola $y = 4x^2$: se colocarmos uma condição inicial exatamente sobre ela, $\mathbf{v}_0 = (x_0, y_0 = 4x_0^2)$, a sua imagem será

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{F}\begin{pmatrix} x_0 \\ 4x_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0/2 \\ 2y_0 - 7x_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0/2 \\ 8x_0^2 - 7x_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0/2 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

e que continua sobre a parábola, uma vez que $y_1 = x_0^2 = 4(x_0/2)^2 = 4x_1^2$. A curva invariante estável é, pois, tangente à direção estável na origem, como previsto pelo teorema das variedades invariantes. Ambas as curvas invariantes aqui obtidas são globais, pois sua determinação não se restringe à vizinhança local do ponto fixo.

4.14 Curvas invariantes instáveis para o mapa de Hénon

Recordamos que os pontos fixos do mapa de Hénon $\mathbf{v}_\pm^*$, são dados por (4.105),

$$x_\pm^* = y_\pm^* = \frac{1}{2}\left\{ b - 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a} \right\}, \tag{4.209}$$

de maneira que os autovalores da matriz Jacobiana, calculada nos pontos fixos, são dados por (4.136)

$$\xi_{1,2} = -x_{\pm}^{*} \pm \sqrt{x_{\pm}^{2} + b}. \tag{4.210}$$

Supondo que os autovalores sejam reais e distintos, e também que os seus módulos sejam diferentes de um, os autovetores normalizados correspondentes aos autovalores ξ_1 e ξ_2 são dados por (4.141)

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_1^2}} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_2^2}} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.211}$$

Como um exemplo, consideramos $a = 0,5$ e $b = 0,3$, para os quais os pontos fixos (4.124) são

$$x_{+}^{*} = y_{+}^{*} = 0,43898, \qquad x_{-}^{*} = y_{-}^{*} = -1,13898. \tag{4.212}$$

Considerando o ponto fixo $\mathbf{v}_{-}^{*}$, os autovalores da matriz Jacobiana são

$$\xi_1 = 2,40282, \qquad \xi_2 = -0,12485,$$

Como $|\xi_1| > 1$ e $|\xi_2| < 1$, trata-se de um ponto de sela. As direções invariantes são determinadas pelos respectivos autovetores

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0,92323 \\ 0,38423 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -0,12389 \\ 0,99229 \end{pmatrix}, \tag{4.213}$$

de modo que $\mathbf{u}_1$ é a direção instável E^u e $\mathbf{u}_2$ a direção estável para o ponto fixo $\mathbf{v}_{-}^{*}$. O ângulo entre elas é de cerca de 59°, portanto eles se interceptam transversalmente.

Para determinar as curvas invariantes locais que emanam do ponto fixo $\mathbf{v}_{-}^{*}$ podemos empregar o teorema das variedades invariantes, que afirma serem as curvas invariantes estável e instável tangentes às direções estável e instável, respectivamente, no ponto fixo (um ponto de sela é sempre hiperbólico). As curvas invariantes globais serão, de acordo com (4.205)-(4.206), as uniões das imagens diretas e inversas das curvas locais.

Primeiro escolhemos um intervalo nas vizinhança do ponto fixo em ambos os ramos da sua direção instável E^u, e determinamos um grande número N de pontos dentro deste intervalo. Devido à imprecisão numérica, a maioria destes pontos não estará exatamente sobre a direção instável, mas muito próximo dela. Assim, as iterações diretas destes pontos pelo mapa não-linear $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ estarão muito próximas da curva instável local que emana do ponto de sela $\mathbf{v}^*$: $W_{loc}^{u}(\mathbf{v}^*)$. Uma aproximação numérica para W_{loc}^{u} consistirá, portanto, na união destas imagens diretas $\mathbf{F}^{[n]}(\mathbf{v}_0)$.

Para determinar a curva estável local W_{loc}^{s} nós repetimos o procedimento anterior, escolhendo um intervalo ao longo da direção estável E^s

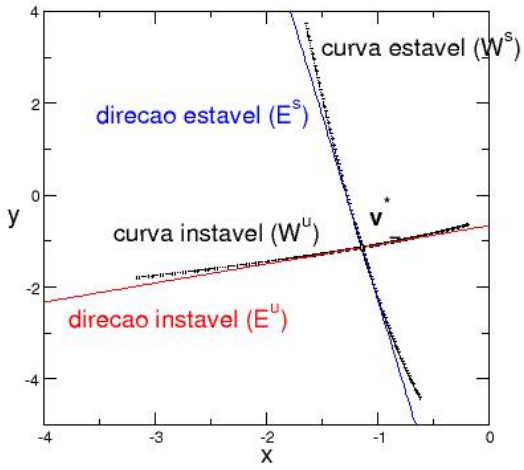

Figura 4.16: Direções e curvas invariantes locais para um ponto de sela do mapa de Hénon para $a = 0,5$ e $b = 0,3$.

do ponto fixo. Tomando um grande número de pontos nesse intervalo, as imagens inversas desses pontos $\mathbf{F}^{[-n]}(\mathbf{v}_0)$ estarão muito próximas da curva estável W^s_{loc}. Observe que esse método só fornece resultados bons se n não for muito alto, o que já permite a determinação das curvas invariantes locais nas vizinhanças do ponto fixo.

No caso do mapa de Hénon, as imagens diretas e inversa são dadas por (4.193) e (4.194), respectivamente:

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} a - x^2 + by \\ x \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} y \\ (x - a + y^2)/b \end{pmatrix}. \tag{4.214}$$

Para o ponto fixo $\mathbf{v}^*_-$, $a = 0,5$ e $b = 0,3$, com direções estável e instável dadas por (4.213), e aplicando o método numérico descrito anteriormente, obtemos os trechos das curvas estável e instável mostradas na Fig. 4.16.

Por outro lado, para obter as curvas invariantes globais precisamos obter as imagens diretas e inversas das curvas locais fora da vizinhança do ponto fixo. Embora o procedimento numérico seja basicamente o mesmo das curvas locais, é necessário um cuidado extra com a precisão para a obtenção das curvas globais. Diversos métodos foram e têm sido propostos para a determinação precisa das curvas invariantes globais, um dos mais eficientes tendo sido introduzido por You e colaboradores [65]. Outros métodos descritos na literatura são o do regador [66] e o PIM triplo [67]. Uma discussão bastante acessível sobre a determinação numérica das

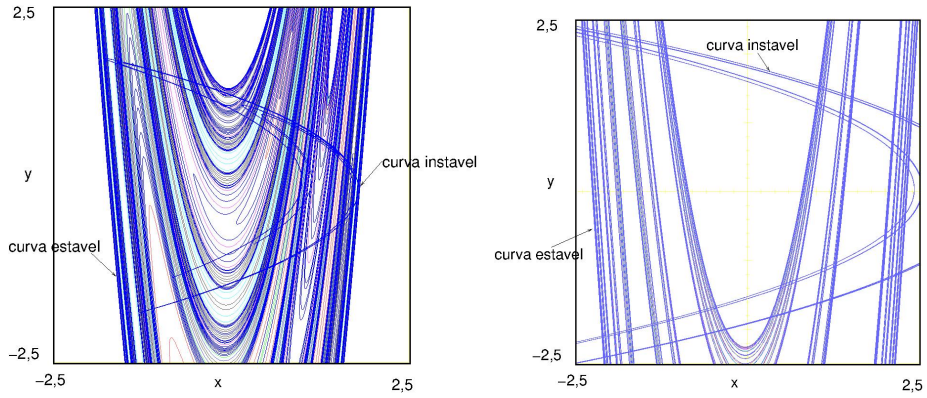

Figura 4.17: Curvas invariantes globais para um ponto de sela do mapa de Hénon com (a) $a = 1,4$ e $b = 0,3$, (b) $a = 3,0$ e $b = 0,3$. Figuras obtidas com o software *Dynamics* [1].

curvas invariantes pode ser encontrada no manual do software *Dynamics* [1], que foi usado na obtenção das Figuras 4.17(a) e (b). Nelas exibimos as curvas invariantes globais para pontos fixos do mapa de Hénon nos seguintes casos: $a = 1,4$ e $b = 0,3$, para $(x^*, y^*) = (0,884, 0,884)$ [Fig. 4.17(a)] e $a = 3,0$ e $b = 0,3$, para $(x^*, y^*) = (1,417, 1,417)$ [Fig. 4.17(b)].

4.15 Problemas

1. Considere o mapa linear $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_n$. Determine (a) a estabilidade do ponto fixo baseado no triângulo de estabilidade, bem como o tipo do ponto fixo; (b) os autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{A}$; (c) a solução geral do mapa, ou seja, $\mathbf{v}_n$ em função de $\mathbf{v}_0$ e n;

   (a)
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

   (b)
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1/4 & 2 \\ -2 & -1/4 \end{pmatrix},$$

   (c)
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1/3 \end{pmatrix},$$

2. Duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são ditas semelhantes se existe uma matriz inversível $\mathbf{E}$ tal que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}$, o que exprimimos como $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$. (a)

Mostre que as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

são semelhantes e exiba a matriz de semelhança **E**. Mostre que, se $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, então: (b) $\mathbf{A}^n \sim \mathbf{B}^n$; (c) **A** e **B** têm os mesmos autovalores.

3. Considere o mapa linear com a matriz de coeficientes dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine a estabilidade do ponto fixo na origem; (b) Obtenha a solução geral do mapa. Dicas: use diretamente a solução geral do mapa na forma (4.19). Use também o limite $\lim_{n\to\infty} na^{n-1} = 0$ se $|a| < 1$.

4. Faça um programa de computador ou use um software matemático para obter as 20 primeiras iteradas do mapa de Hénon para $a = 1,4$ e $b = 0,3$, usando as condições iniciais $x_0 = 0,1$ e $y_0 = 0,3$. Trace os seguintes diagramas: (a) x_n em função de n; (b) y_n em função de n; (c) y_n em função de x_n.

5. Considere o mapa bidimensional

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{2}(x_n + y_n), \\ y_{n+1} &= 4\cos(x_n) \end{aligned}$$

Faça um programa de computador ou use um software matemático para determinar os pontos fixos e os autovalores da matriz Jacobiana calculada nos pontos fixos.

6. Considere o mapa *riddling*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= rx_n(1 - x_n), \\ y_{n+1} &= pe^{-b(x_n - \chi)^2} y_n + y_n^3 \end{aligned}$$

onde $x \in [0,1]$, $y \in \mathbb{R}$, $r \in [0,4]$, $b > 0$ e $p > 0$ são parâmetros. Determine os pontos fixos do mapa e sua estabilidade em termos do parâmetro p.

7. Considere o mapa de Lozi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + y_n - a|x_n|, \\ y_{n+1} &= bx_n, \end{aligned}$$

onde a e b são parâmetros. Determine os pontos fixos do mapa e sua estabilidade em termos dos parâmetros (a,b).

Capítulo 5

Caos em mapas bidimensionais

5.1 Diagrama de bifurcação para o mapa de Hénon

Assim como no caso unidimensional, os diagramas de bifurcação de um mapa bidimensional fornecem uma grande quantidade de informações. Tomaremos como exemplo, novamente, o mapa de Hénon,

$$x_{n+1} = a - x_n^2 + b\,y_n, \tag{5.1}$$

$$y_{n+1} = x_n. \tag{5.2}$$

onde a e b são parâmetros. Fixando o valor de um deles, como por exemplo $b = -0,3$, podemos usar a como parâmetro de controle, variando-o no intervalo $1 \leq a \leq 2$, obtendo o diagrama de bifurcação (x *versus* a) mostrado na Fig. 5.1(a).

Alguns aspectos do diagrama de bifurcações decorrem da análise linear da estabilidade feita no Capítulo IV. Os pontos fixos do mapa de Hénon, dados por (4.105), são, para $b = -0,3$,

$$x_{\pm}^* = y_{\pm}^* = 0,5\left\{-1,3 \pm \sqrt{1,69 + 4\,a.}\right\}. \tag{5.3}$$

Para que exista o ponto fixo é necessário que $1,69 + 4a \geq 0$, ou $a \geq -0,4225$. Para $a = 1$ temos, por exemplo, os pontos fixos $x_+^* = y_+^* = 0,543$ e $x_-^* = y_-^* = -1,843$. As condições para sua estabilidade foram determinadas em (4.133). Se $b = -0,3 > -1$ teremos o seguinte intervalo de estabilidade para $\mathbf{v}_+^*$: $0,4225 \leq a < 1,2675$. De fato, no diagrama (5.1) o ponto fixo observado é estável até $a = 1,2675$. Por outro lado, como o ponto fixo $\mathbf{v}_-^*$ é sempre instável, ele não aparece no diagrama de bifurcações.

As órbitas de período s do mapa de Hénon foram determinadas anteriormente, e são dadas por (4.167)-(4.168). Para $b = -0,3$ os pontos do 2-ciclo serão

$$x_{0,1}^* = 0,5\left\{1,3 \pm \sqrt{4\,a - 5,07}\right\}, \tag{5.4}$$

$$y_{0,1}^* = 0,77\left\{a - (x_{0,1}^*)^2\right\}, \tag{5.5}$$

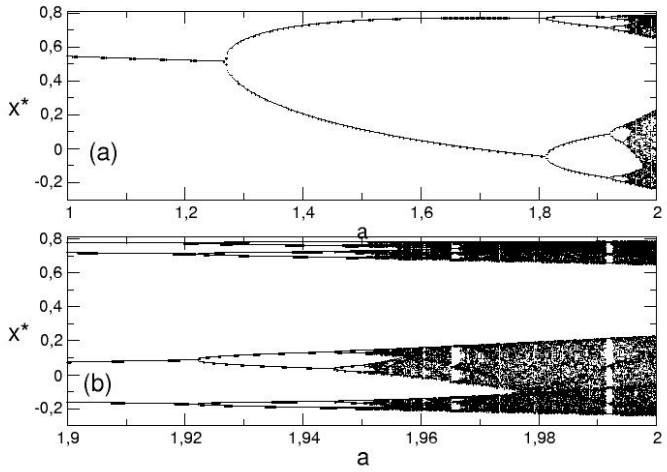

Figura 5.1: (a) Diagrama de bifurcações (x em função de a) para o mapa de Hénon quando $b = -0,3$. (b) Ampliação de uma região do diagrama.

que são reais desde que $a \geq 1,2675$. De fato, neste ponto o ponto fixo perde estabilidade e surge um 2-ciclo estável, configurando uma bifurcação de duplicação de período.

As condições de estabilidade do 2-ciclo foram obtidas em (4.129)-(4.130). No caso $b = -0,3$ o intervalo de estabilidade será $1,2675 < a < 1,8125$. No final do intervalo o 2-ciclo torna-se instável e surge um 4-ciclo estável. Na Fig. 5.1(b) podemos apreciar melhor a cascata de bifurcações de duplicação de período que aparece.

Usando a mesma terminologia empregada em mapas unidimensionais, vamos denotar por a_m os valores do parâmetro onde há uma bifurcações com duplicação de período, de 2^m para 2^{m+1}. As bifurcações acumulam-se no ponto

$$\lim_{m\to\infty} a_m \equiv a_\infty \approx 1,952. \tag{5.6}$$

Pelos resultados da Tabela 5.1, as distâncias entre duas bifurcações sucessivas aproximam-se assintoticamente da constante

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_{m-1} - a_{m-2}}{a_m - a_{m-1}} \approx 4,669 \tag{5.7}$$

que é praticamente igual à primeira constante de Feigenbaum $\delta = 4,669201609\ldots$. Para $a > a_\infty$ o diagrama de bifurcações apresenta uma região predominantemente caótica, entremeada de janelas periódicas.

m	período = 2^m	a_m	$a_m - a_{m-1}$	$\frac{a_{m-1}-a_{m-2}}{a_m-a_{m-1}}$
1	2	1,2675000	-	-
2	4	1,8125000	0,545	-
3	8	1,9216456	0,1091456	4,9933
4	16	1,9452006	0,023555	4,6337
5	32	1,9502644	0,0050638	4,6516
6	64	1,9513504	0,001086	4,6630
7	128	1,9515830	0,0002326	4,6678
8	256	1,9516329	0,0000499	4,6688

Tabela 5.1: Pontos de bifurcação de duplicação de período no mapa de Hénon (5.1)-(5.2) para $b = -0,3$.

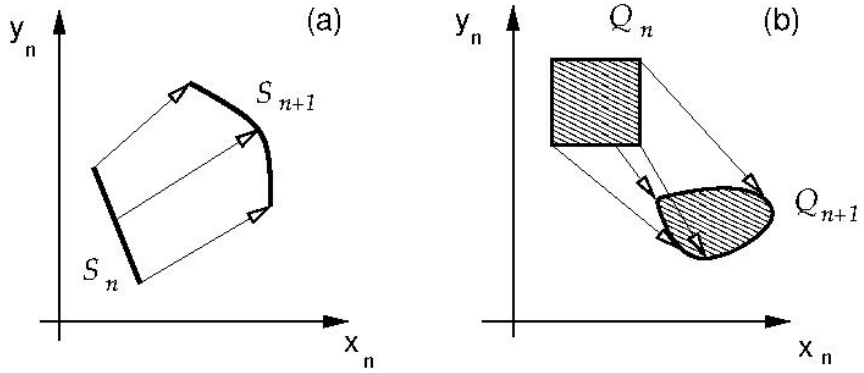

Figura 5.2: Imagens sucessivas de um (a) segmento de reta, (b) quadrado no plano de fase

5.2 Sistemas conservativos e dissipativos

Na sequência trataremos de um mapa não-linear na forma geral

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n), \tag{5.8}$$
$$y_{n+1} = g(x_n, y_n). \tag{5.9}$$

O estado do sistema num dado tempo discreto n é representado por um ponto no plano de fase (x_n, y_n). Para um mapa em N dimensões, a extensão desse conceito é um espaço de fase N-dimensional.

Uma órbita no plano de fase é uma sequência de pontos (x_n, y_n) gerados pelo mapa (5.8)-(5.9) a partir de uma dada condição inicial (x_0, y_0). É instrutivo seguir a evolução de um conjunto de condições iniciais. Por exemplo, se no tempo n consideramos todos os pontos de um segmento

de reta $\mathcal{S}_0$, em um tempo posterior $n+1$ teremos uma imagem do segmento $\mathcal{S}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathcal{S}_n)$ que, em geral, é uma curva [Figura 5.2(a)]. Da mesma forma, se consideramos um quadrado Q_n, a evolução temporal do sistema leva, para tempos posteriores, a imagens deste quadrado $Q_{n+1} = \mathbf{F}(Q_n)$ que, em geral, o deformam (esticam, encolhem, dobram, etc.) transformando-o numa figura bidimensional fechada [Figura 5.2(b)].

O mapa $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ pode ser visto como uma transformação de coordenadas no plano de fase

$$(x_n, y_n) \to (x_{n+1}, y_{n+1}),$$

de forma que dois elementos de área em tempos sucessivos estarão relacionados por

$$dx_{n+1}dy_{n+1} = |\mathcal{J}|dx_n dy_n, \tag{5.10}$$

onde

$$\mathcal{J} = \det\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{vmatrix}, \tag{5.11}$$

é o jacobiano da transformação, que é o determinante da matriz jacobiana.

Consideremos, por exemplo, o quadrado Q da Figura 5.2. A sua área, no tempo $n+1$, é dada por

$$A_{n+1} = \int_Q dA_{n+1} = \int_Q |\mathcal{J}|dA_n \tag{5.12}$$

Se $|\mathcal{J}| = 1$ então $A_{n+1} = A_n$, ou seja, o mapa $\mathbf{F}$ preserva áreas no plano de fase. Dizemos, nesse caso, que o mapa é *conservativo*. Já se $|\mathcal{J}| < 1$ então $A_{n+1} < A_n$, logo as áreas no plano de fase são contraídas na medida em que o tempo passa. Tais mapas são chamados *dissipativos*. No caso $|\mathcal{J}| > 1$ o mapa é chamado anti-dissipativo, pois se caracteriza por um crescimento das áreas com o tempo; mas, se tomarmos o mapa inverso, as áreas diminuirão com o tempo.

Um exemplo é o mapa de Hénon, cuja matriz Jacobiana é

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -2x & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

com determinante $\mathcal{J} = -b$ é constante, ou seja, vale para qualquer ponto de uma órbita. Então, se $|\mathcal{J}| = b < 1$ o mapa será dissipativo, e conservativo se $b = 1$.

Outro exemplo é o chamado mapa padrão de Chirikov-Taylor

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1}, \tag{5.14}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi x_n), \tag{5.15}$$

onde $x_n \in [0,1]$, $y_n \in [0,1]$ e $K > 0$ é um parâmetro. A matriz Jacobiana do mapa é

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 + K\cos(2\pi x) & 1 \\ K\cos(2\pi x) & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

cujo determinante também é constante: $\mathcal{J} = 1$. O mapa padrão é um paradigma para mapas bidimensionais conservativos.

5.3 Atratores

Em geral o jacobiano depende das coordenadas (x_n, y_n) mas, por simplicidade, vamos supor que ele seja constante, como nos exemplos vistos na seção anterior. A relação (5.12) para a evolução da área de regiões no plano de fase resulta em

$$A_{n+1} = |\mathcal{J}| \int_Q dA_n = |\mathcal{J}| A_n, \tag{5.17}$$

que é um mapa linear, e pode ser facilmente iterado. Para um tempo $n > 0$ qualquer

$$A_{n+1} = |\mathcal{J}|^n A_0. \tag{5.18}$$

Num sistema dissipativo $|\mathcal{J}| < 1$, logo $|\mathcal{J}|^n \to 0$ se $n \to \infty$, donde $a_n \to 0$. Portanto, no limite de tempo tendendo ao infinito, qualquer região de área finita é mapeada num conjunto de área nula, que chamamos *atrator* do sistema. Observe que, num sistema conservativo as áreas são preservadas, de modo que não podem existir atratores nesse caso.

Um dado mapa dissipativo pode ter mais de um atrator. A *bacia de atração* de um dado atrator é o conjunto de condições iniciais que converge a este atrator. É possível falar de atratores e bacias de atração para mapas unidimensionais, mas o uso mais comum desses termos refere-se a sistemas com duas ou mais dimensões, tanto a tempo discreto como contínuo.

De forma matematicamente mais precisa, definimos um atrator $\mathcal{A}$ como sendo um conjunto fechado com as seguintes propriedades [18]

- $\mathcal{A}$ é um conjunto invariante: se a condição inicial $\mathbf{v}_0$ pertence a $\mathcal{A}$, então todas as iterações diretas ou inversas do mapa $\mathbf{F}^{[\pm n]}$ também pertencerão a $\mathcal{A}$;

- $\mathcal{A}$ atrai um conjunto aberto de condições iniciais: exixte um conjunto aberto U contendo $\mathcal{A}$ tal que, se $\mathbf{v}_0 \in U$, então a distância entre as iteradas do mapa $\mathbf{F}^{[n]}(\mathbf{v}_0)$ e os pontos de $\mathcal{A}$ tende a zero quando $n \to \infty$. O maior conjunto aberto U com essa propriedade é dito *bacia de atração* de $\mathcal{A}$;

- $\mathcal{A}$ é um conjunto mínimo: não há subconjunto próprio de $\mathcal{A}$ que satisfaça às duas propriedades anteriores.

Um mapa bidimensional pode ter como atratores pontos fixos atrativos: nós estáveis e focos estáveis [Fig. 5.3(a)]. Há, também, órbitas periódicas

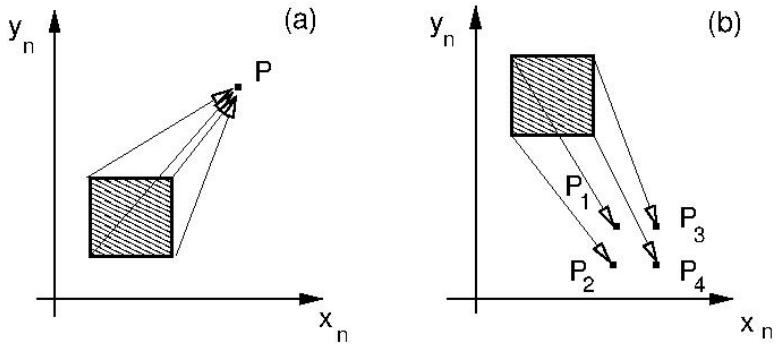

Figura 5.3: Atratores pontuais: (a) ponto fixo assintoticamente estável; (b) órbita de período 4 assintoticamente estável.

estáveis, que também são *atratores pontuais* [Fig. 5.3(b)]. Um exemplo de atrator pontual é o mapa linear cuja matriz dos coeficientes é

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix}, \tag{5.19}$$

cujos autovalores são ξ_1 e ξ_2. O mapa será dissipativo se $|\mathcal{J}| = |\xi_1 \xi_2| < 1$. Para $\xi_1 = \xi_2 = 1/2$ temos que a origem é um nó estável, portanto é um atrator, cuja bacia de atração é todo o plano de fase, exceto a própria origem.

5.4 Atrator caótico do mapa de Hénon

Atratores periódicos são pontuais, mas atratores caóticos podem ter uma geometria mais complicada, mesmo tenhdo área igual a zero. O comportamento caótico tem duas características básicas:

- aperiodicidade: ausência de comportamento periódico;
- dependência sensível às condições iniciais: condições iniciais muito próximas geram órbitas que divergem exponencialmente.

O diagrama de bifurcação do mapa de Hénon (5.1) já sugere a existência de comportamento caótico nas variáveis x e y para diversos intervalos do parâmetro a. Vamos considerar o caso "clássico" $b = 0,3$ e $a = 1,4$. A série temporal de x_n mostrada na Fig. 5.4(a) é aperiódica, o que pode-se verificar quantitativamente no respectivo espectro de potências $P(f)$ (cf. Seção 3.4.1), que apresenta uma banda larga típica do comportamento caótico [Fig. 5.4(b)].

Para ilustrar a sensibilidade às condições iniciais no caso $a = 1,4$ e $b = 0,3$ nós escolhemos duas condições iniciais muito próximas:

$$(x_0, y_0) = (0,1, 0,3), \qquad (x'_0, y'_0) = (0,100001, 0,300001)$$

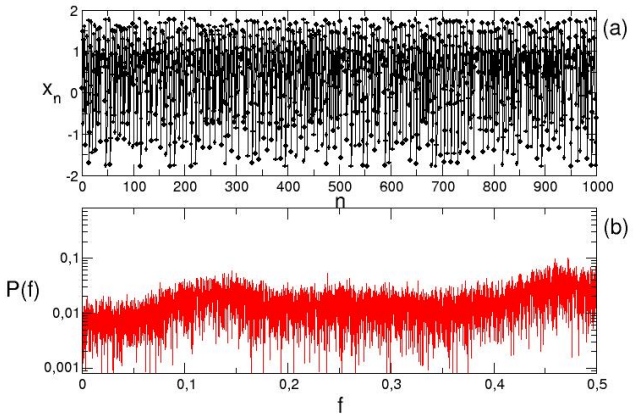

Figura 5.4: (a) Série temporal de x_n para o mapa de Hénon quando $a = 1,4$ e $b = 0,3$. (b) Espectro de potências correspondente.

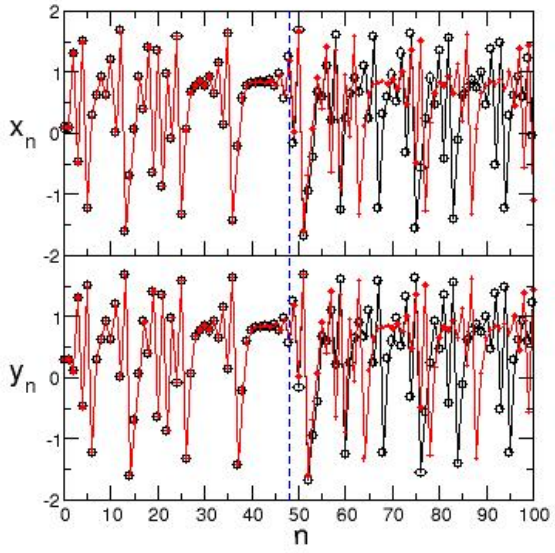

Figura 5.5: Séries temporais de x_n e y_n para o mapa de Hénon quando $a = 1,4$ e $b = 0,3$ e as seguintes condições iniciais: $(x_0, y_0) = (0,1,0,3)$ (curva em preto); $(0,100001, 0,300001)$ (curva em vermelho).

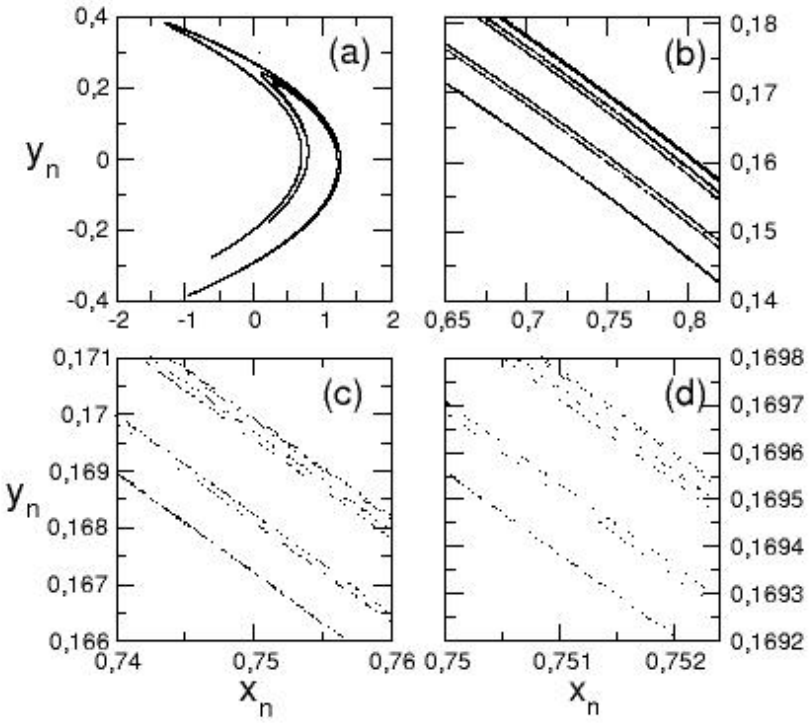

Figura 5.6: (a) Atrator do mapa de Hénon para $a = 1,4$ e $b = 0,3$. (b)-(d): sucessivas ampliações de regiões do atrator.

pois diferem entre si de uma parte em 10^6. As órbitas correspondentes a essas condições iniciais (representadas na Fig. 5.5 em diferentes cores) inicialmente são indistinguíveis até que, após cerca de 50 iterações do mapa, as duas órbitas subsequentes, $\mathbf{v}_n$ e $\mathbf{v}'_n$ afastam-se mutuamente, perdendo a correlação.

Se traçarmos a respectiva órbita caótica no plano de fase (y_n versus x_n) [Fig. 5.6(a)] teremos um atrator caótico na forma aproximada de um bumerangue. Esse atrator não é um conjunto discreto de pontos, como uma órbita periódica, mas também não é exatamente uma curva fechada, mostrando uma auto-similaridade que é revelada quando ampliamos sucessivas vezes regiões do atrator da Fig. 5.6(a).

Numa primeira ampliação, vemos que a curva grossa é, na verdade, um conjunto de três curvas, uma mais grossa que as outras duas [Fig. 5.6(b)]. As ampliações sucessivas mostram que a curva mais grossa é também um

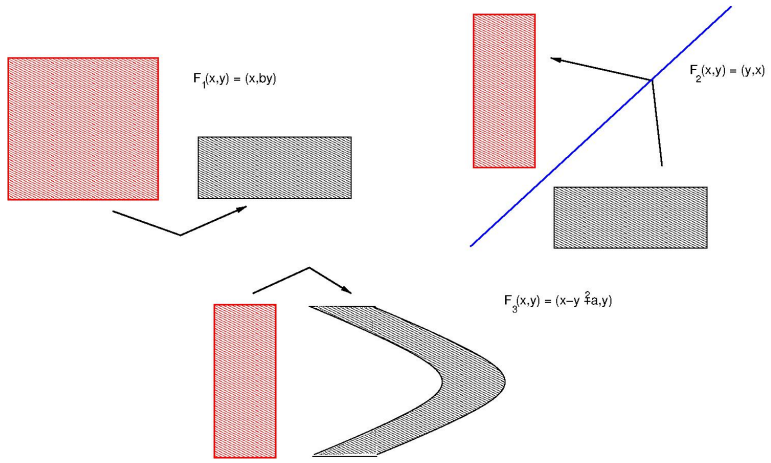

Figura 5.7: Figura esquemática mostrando a ação do mapa de Hénon em termos de três operações sobre um conjunto de condições iniciais

conjunto de três curvas [Fig. 5.6(c)-(d)], num padrão que se repete indefinidamente.

O atrator caótico de Hénon ($a = 1,4$ e $b = 0,3$), mostrado na Figura 5.6(a) lembra um bumerangue dobrado sobre si mesmo um número infinito de vezes. Para entender essa estrutura auto-similar vamos considerar o efeito do mapa de Hénon

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} a - x^2 + by \\ x \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

sobre um conjunto de condições iniciais no plano de fase. Para isso, representamos (5.20) como a composição de três mapas

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_3 \circ \mathbf{F}_2 \circ \mathbf{F}_1, \tag{5.21}$$

cada qual com as seguintes funções:

Conforme indicado na Fig. 5.7, a primeira operação

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} x \\ by \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

consiste numa contração uniforme ao longo da direção y, a uma taxa constante $|b| < 1$. A segunda operação

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

é uma reflexão em relação à diagonal principal $y = x$. Já a terceira operação

$$\mathbf{F}_3(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} x - y^2 + a \\ y \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

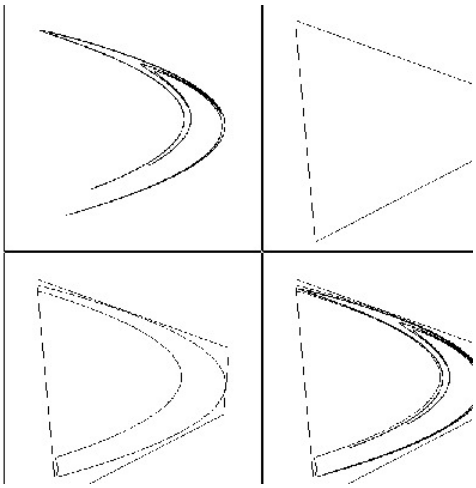

Figura 5.8: Expoentes de Lyapunov para um mapa bidimensional.

executa uma dobra na direção x. De fato,

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}_2 \circ \mathbf{F}_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{F}_2\begin{pmatrix} x \\ bx \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} by \\ x \end{pmatrix} \\ (\mathbf{F}_3 \circ \mathbf{F}_2 \circ \mathbf{F}_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \mathbf{F}_3\begin{pmatrix} by \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} by - x^2 + a \\ x \end{pmatrix} = \mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Uma iteração do mapa de Hénon $\mathbf{F}(\mathbf{v})$, portanto, faz com que um retângulo de condições iniciais transforme-se num bumerangue. Outra iteração fará com que o bumerangue seja esticado e dobrado novamente, e assim por diante. Após um número infinitamente grande destas operações obteremos o atrator caótico mostrado na Fig. 5.6(a).

5.5 Expoentes de Lyapunov

O expoente de Lyapunov foi definido para mapas unidimensionais como a taxa de divergência (ou convergência) exponencial de duas órbitas inicialmente muito próximas x_0 e x'_0, de modo que um valor positivo para ele sugere comportamento caótico. Recordamos que, considerando a diferença das condições iniciais $|x_0 - x'_0| = \delta_0$ suficientemente pequena, as órbitas que ambas geram terão, após n iteradas do mapa $f(x)$, uma distância que varia com o tempo n como,

$$\delta_n = |x_n - x'_n| \sim \delta_0 e^{\lambda n}, \tag{5.25}$$

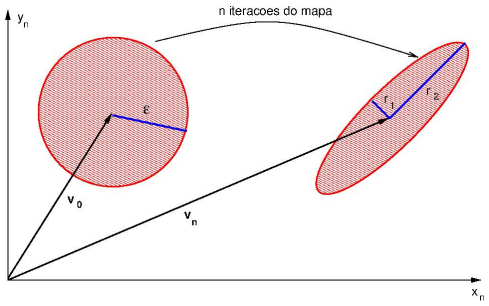

Figura 5.9: Expoentes de Lyapunov para um mapa bidimensional.

onde o expoente de Lyapunov é formalmente definido como

$$\lambda = \lim_{\delta_0 \to 0} \lim_{n \to \infty} \ln \left(\frac{\delta_n}{\delta_0} \right)^{1/n} = \lim_{\delta_0 \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\delta_n}{\delta_0} \right), \tag{5.26}$$

onde supomos que o limite existe, ou seja, os valores obtidos convergem para o valor λ. Como a determinação numérica permite apenas um número finito de pontos para a órbita, podemos apenas testar esta convergência avaliando se o valor obtido difere do anterior por um valor menor que uma dada tolerância. De fato, não podemos garantir *a priori* que o valores estimados de λ não venham a mudar, mesmo após um número n muito alto de iterações. No entanto, como observado por Nusse e Yorke [1], se realmente tomar o limite $n \to \infty$ fosse imprescindível, o próprio conceito de expoente de Lyapunov teria pouca importância prática.

Para mapas bidimensionais há duas direções independentes no plano de fase, de modo que haverá dois expoentes de Lyapunov: λ_1 e λ_2. A partir de uma dada condição inicial $\mathbf{v}_0$ no plano de fase, denotaremos por B_0 o círculo de raio unitário ($r_{10} = r_{20} = 1$) centrado na condição inicial, e cuja área é

$$A_0 = \pi r_{10} r_{20} = \pi. \tag{5.27}$$

A imagem dos pontos deste círculo, por meio do mapa linearizado $\mathbf{J} \cdot \mathbf{v}$, será uma elipse de semi-eixos r_{11} e r_{21}, que será denotada B_1 [Fig. 5.9]. Evoluindo novamente essa elipse obteremos outra, de semi-eixos r_{12} e r_{22}, e assim por diante. Em geral, após n iteradas do mapa linearizado, o círculo B_0 terá se transformado numa elipse B_n de semi-eixos r_{1n} e r_{2n}. Se as direções dos semi-eixos de B_n fossem ortogonais, a área dessa elipse seria

$$A_n = \pi r_{1n} r_{2n} = A_0 r_{1n} r_{2n}. \tag{5.28}$$

Nesse caso, em analogia com (5.26) os expoentes de Lyapunov ao longo

das direções de cada semi-eixo são definidos como

$$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{r_{1n}}{r_{10}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln r_{1n} \tag{5.29}$$

$$\lambda_2 = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{r_{2n}}{r_{20}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln r_{2n}, \tag{5.30}$$

de modo que, para n suficientemente grande

$$r_{1n} \sim r_{10} e^{\lambda_1 n}, \qquad r_{2n} \sim e^{\lambda_2 n}, \tag{5.31}$$

tal que (5.28) fornece

$$A_n = A_0 e^{(\lambda_1+\lambda_2)n} \tag{5.32}$$

Num mapa com determinante jacobiano constante $\mathcal{J}$, de (5.18) temos

$$A_{n+1} = |\mathcal{J}|^n A_0 = e^{n \ln|\mathcal{J}|} A_0, \tag{5.33}$$

que, comparado a (5.32), nos dá uma relação entre os expoentes de Lyapunov e o jacobiano

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \ln|\mathcal{J}|. \tag{5.34}$$

Caso o mapa seja dissipativo, como $|\mathcal{J}| < 1$ resulta que

$$\lambda_1 + \lambda_2 < 0, \tag{5.35}$$

enquanto para mapas conservativos, temos $\mathcal{J} = 1$ e, portanto, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

Normalmente os expoentes de Lyapunov são ordenados de modo que $\lambda_1 > \lambda_2$. Um atrator pontual, como um ponto fixo ou órbita periódica assintoticamente estável, terá dois expoentes de Lyapunov negativos: $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$. Já se o mapa tiver comportamento caótico $\lambda_1 > 0$. Num mapa dissipativo isso significa que o segundo expoente será

$$\lambda_2 = \ln|\mathcal{J}| - \lambda_1 < 0, \tag{5.36}$$

ao passo que, para um mapa conservativo, $\lambda_2 = -\lambda_1$.

5.6 Determinação numérica dos expoentes de Lyapunov

Vamos considerar o mapa bidimensional $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{v}_n)$ e acompanhar, a partir da condição inicial $\mathbf{v}_0$, a órbita formada pelos n primeiros pontos

$$\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_{n-1}\}.$$

Tomando, agora, uma segunda condição inicial $\mathbf{v'}_0$, muito próxima de $\mathbf{v}_0$, acompanhamos a órbita de modo similar

$$\{\mathbf{v'}_0, \mathbf{v'}_1, \mathbf{v'}_2, \ldots \mathbf{v'}_{n-1}\}.$$

Sendo $\mathbf{w}_0$ a diferença entre as duas condições iniciais, temos

$$\mathbf{v'}_0 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_0, \qquad (|\mathbf{w}_0| \ll |\mathbf{v}_0|). \tag{5.37}$$

Supondo uma expressão análoga para o n-ésimo ponto das órbitas

$$\mathbf{v'}_n = \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_n, \qquad (|\mathbf{w}_n| \ll |\mathbf{v}_n|), \tag{5.38}$$

podemos linearizar o mapa $\mathbf{F}$ em torno de $\mathbf{v}_n$, como fizemos no estudo da estabilidade dos pontos periódicos, visto no Capítulo 4:

$$\begin{aligned} \mathbf{v'}_{n+1} &= \mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{v}_n + \mathbf{w}_n) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{v}_n) + \mathbf{J}(\mathbf{v}_n) \cdot \mathbf{w}_n + \ldots, \end{aligned} \tag{5.39}$$

onde $\mathbf{J}(\mathbf{v}_n)$ é a matriz Jacobiana correspondente, calculada em cada ponto da órbita. Assim, o vetor tangente $\mathbf{w}(t)$ satisfaz o mapa linearizado

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{J}(\mathbf{v}_n) \cdot \mathbf{w}_n. \tag{5.40}$$

Iterando n vezes o mapa linearizado (5.89) obtemos a solução

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{J}_n(\mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{w}_0, \tag{5.41}$$

onde definimos o produto ordenado das matrizes Jacobianas em cada ponto da órbita:

$$\mathbf{J}_n = \mathbf{J}(\mathbf{v}_{n-1}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{v}_{n-2}) \cdot \cdots \cdot \mathbf{J}(\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{v}_0). \tag{5.42}$$

Observe que o vetor unitário $\mathbf{w}_n/|\mathbf{w}_n|$ fornece a direção do deslocamento infinitesimal da órbita a partir do ponto $\mathbf{v}_n$, e que $|\mathbf{w}_n|/|\mathbf{w}_0|$ é o fator pelo qual este deslocamento cresce ou encolhe com o passar do tempo. Definimos o expoente de Lyapunov para a órbita originada pela condição inicial $\mathbf{v}_0$ e na orientação do deslocamento infinitesimal dada pelo vetor unitário $\mathbf{u}_0 = \mathbf{w}_0/|\mathbf{w}_0|$ como

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{v}_0, \mathbf{u}_0) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{|\mathbf{w}_n|}{|\mathbf{w}_0|}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{|\mathbf{J}_n(\mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{w}_0|}{|\mathbf{w}_0|}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|\mathbf{J}_n(\mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{u}_0|. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Para um mapa bidimensional há duas direções independentes para o vetor unitário $\mathbf{u}_0$, de modo que haverá dois expoentes de Lyapunov, um

para cada direção. Escolhemos um sistema de vetores unitários e ortogonais $(\mathbf{u}_{01}, \mathbf{u}_{02})$ (no círculo B_0 da Fig. 5.9), tais que

$$\mathbf{u}_{01} \cdot \mathbf{u}_{02} = 0, \qquad |\mathbf{u}_{01}| = |\mathbf{u}_{02}| = 1. \tag{5.44}$$

Aplicando o mapa linearizado sobre os dois vetores ortonormais, obtemos

$$\mathbf{u}_{11} = \mathbf{J}(\mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{u}_{01}, \tag{5.45}$$
$$\mathbf{u}_{12} = \mathbf{J}(\mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{u}_{02}. \tag{5.46}$$

Caso estes vetores sejam ortogonais, suas direções serão as dos semi-eixos da elipse B_1, que é uma imagem do círculo B_0.

Portanto, após n iterações do mapa linearizado, o sistema original de vetores terá se transformado no sistema

$$\mathbf{u}_{n1} = \mathbf{J}(\mathbf{v}_{n-1}) \cdot \mathbf{u}_{n-1,1} = \ldots = \mathbf{J}_n \cdot \mathbf{u}_{01}, \tag{5.47}$$
$$\mathbf{u}_{n2} = \mathbf{J}(\mathbf{v}_{n-1}) \cdot \mathbf{u}_{n-1,2} = \ldots = \mathbf{J}_n \cdot \mathbf{u}_{02}. \tag{5.48}$$

Novamente, se estes vetores forem ortogonais, serão as direções dos semi-eixos da elipse B_n. Logo, seus módulos serão os tamanhos dos semi-eixos, ou seja,

$$r_{n1} = |\mathbf{u}_{n1}| = |\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{u}_{01}|, \tag{5.49}$$
$$r_{n2} = |\mathbf{u}_{n2}| = |\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{u}_{02}|. \tag{5.50}$$

Na prática, porém, as imagens do conjunto ortonormal original $(\mathbf{u}_{01}, \mathbf{u}_{02})$ não são ortogonais, em geral. Para uma órbita caótica por exemplo, tende a haver um alinhamento dos vetores $(\mathbf{u}_{0n}, \mathbf{u}_{0n})$ ao longo da direção de maior expansão. Para resolver este problema, Benettin e colaboradores [68] propuseram o uso do método de ortogonalização de Gram-Schmidt [veja também [69] e [43]].

Consideremos um ponto $\mathbf{v}_k$ de uma órbita do mapa, no centro da qual posicionamos um círculo unitário B_k, associado ao conjunto de vetores ortonormais $(\mathbf{u}_{k1}, \mathbf{u}_{k2})$, tais que

$$\mathbf{u}_{k1} \cdot \mathbf{u}_{k2} = 0, \qquad |\mathbf{u}_{k1}| = |\mathbf{u}_{k2}| = 1. \tag{5.51}$$

Evoluindo ambos os vetores pelo mapa linearizado temos

$$\mathbf{u}_{k+1,1} = \mathbf{J}(\mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{u}_{k1}, \tag{5.52}$$
$$\mathbf{u}_{k+1,2} = \mathbf{J}(\mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{u}_{k2}, \tag{5.53}$$

que são as direções dos semi-eixos da elipse B_{k+1}, imagem do círculo B_k. Como os vetores $(\mathbf{u}_{k+1,1}, \mathbf{u}_{k+1,2})$ não são ortogonais, em geral, determinamos um conjunto ortogonal de vetores $(\mathbf{w}_{k1}, \mathbf{w}_{k2})$ por meio das seguintes

operações:

$$\mathbf{w}_{k1} = \mathbf{u}_{k+1,1}, \tag{5.54}$$

$$\mathbf{w}_{k2} = \mathbf{u}_{k+1,2} - \left(\mathbf{u}_{k+1,2} \cdot \frac{\mathbf{w}_{k1}}{|\mathbf{w}_{k1}|} \right) \frac{\mathbf{w}_{k1}}{|\mathbf{w}_{k1}|}. \tag{5.55}$$

Portanto, um dos novos vetores é igual a um dos antigos. Já o segundo vetor novo é a diferença entre o primeiro vetor e a projeção do segundo vetor antigo ao longo da direção do primeiro [Fig. **??**]. Podemos verificar que $\mathbf{w}_{k1} \cdot \mathbf{w}_{k2} = 0$.

Por serem ortogonais, os vetores $(\mathbf{w}_{k1}, \mathbf{w}_{k2})$ indicam as direções dos semi-eixos da elipse B_{k+1}, e seus módulos representam o tamanho dos semi-eixos:

$$r_{1k} = |\mathbf{w}_{k1}|, \qquad r_{k2} = |\mathbf{w}_{k2}|. \tag{5.56}$$

Aplicando sucessivamente este procedimento em cada ponto de uma trajetória, e tendo em vista (5.42), aplicamos (5.43) da seguinte maneira:

$$\lambda_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln\left(r_{k1} r_{k-1,1} \ldots r_{11} r_{01}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \ln r_{j1}, \tag{5.57}$$

$$\lambda_2 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln\left(r_{k2} r_{k-1,2} \ldots r_{12} r_{02}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \ln r_{j2}. \tag{5.58}$$

Na determinação numérica dos expoentes de Lyapunov, a convergência é relativamente lenta, da ordem de $n^{1/2}$ [45], de modo que são necessárias tipicamente muitas iterações do mapa, da ordem de 10^4 a 10^5, para um resultado satisfatório. No exemplo do atrator caótico do mapa de Hénon quando $a = 1,4$ e $b = 0,3$ os valores calculados para os expoentes de Lyapunov são

$$\lambda_1 = 0,418, \qquad \lambda_2 = -1,622, \tag{5.59}$$

cuja soma é

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -1,204. \tag{5.60}$$

Por outro lado, como o jacobiano do mapa de Hénon é $\mathcal{J} = -b = -0,3$, então de (5.34) temos

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \ln 0,3 = -1,204, \tag{5.61}$$

em concordância com (5.60). Outro exemplo, com $a = 2,12$ e $b = -0,3$, fornece $\lambda_1 = 0,391$ e $\lambda_2 = -1,595$.

5.7 Mapa da ferradura de Smale

A formação do atrator caótico do mapa de Hénon resulta de uma sequência de operações que consistem basicamente em esticar uma região no plano

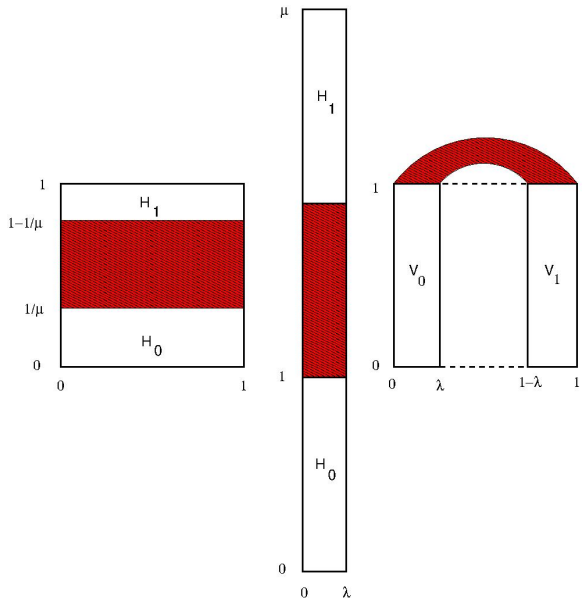

Figura 5.10: Uma iteração direta do mapa da ferradura.

de fase numa dada direção e dobrá-la sobre si mesma um número infinitamente grande de vezes. Stephen Smale propôs um mapa bidimensional dissipativo que executa essas operações de forma a gerar um atrator cuja dinâmica é fortemente caótica, o que pode ser demonstrado matematicamente.

O mapa da ferradura de Smale age sobre os pontos de um quadrado unitário no plano de fase $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,1]$. A ação do mapa $\mathbf{F}$ sobre este quadrado unitário consiste de duas operações

1. expandir o quadrado por um fator $\mu > 2$ na direção y e contrai por um fator $\lambda < 1/2$ na direção x;

2. dobrar o retângulo na forma de uma ferradura vertical e superpor sobre o quadrado, removendo o excesso.

Assim, cada iteração do mapa é feita em duas etapas: uma parte linear executa a expansão-contração do quadrado, e uma parte não-linear, que executa o dobramento e remove o excesso [Fig. 5.10]. A parte linear do mapa da ferradura é

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{se } 0 \le y \le \frac{1}{\mu}, \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{se } 1 - \frac{1}{\mu} \le y \le 1. \end{aligned} \tag{5.62}$$

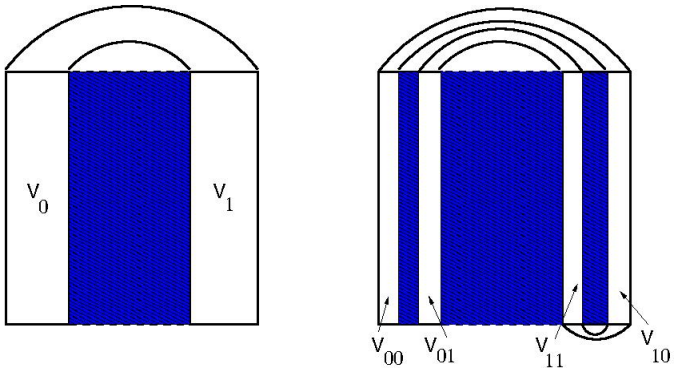

Figura 5.11: Duas iterações diretas do mapa da ferradura.

Não é necessário expressar analiticamente a parte não-linear do mapa da ferradura, responsável pela dobra.

Dividimos o quadrado unitário em duas faixas horizontais H_0 e H_1, ambas de altura $1/\mu$ e largura unitária [Fig. 5.10].

$$H_0 : \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1/\mu\}, \qquad H_1 : \{0 \leq x \leq 1, 1-(1/\mu) \leq y \leq 1\}.$$

Para encontrarmos a imagem da faixa horizontal H_0 após uma iteração direta do mapa da ferradura, nós aplicamos (5.62) aos pontos do respectivo retângulo, o que resulta na faixa vertical $V_0 = \mathbf{F}(H_0)$. Analogamente, a imagem da faixa horizontal H_1 é a faixa vertical $V_1 = \mathbf{F}(H_1)$, onde o índice 0 significa estar à esquerda, e 1 à direita no quadrado unitário [Fig. 5.10].

A região do quadrado unitário entre as duas faixas horizontais é também comprimida e esticada mas sofre uma dobra (descrita pela parte não-linear do mapa da ferradura). Como o mapa aplica pontos do quadrado unitário nele mesmo, a parte dobrada fica de fora de $\mathcal{D}$ e é descartada. Dessa forma o conjunto interseção $\mathcal{D} \bigcap \mathbf{F}(\mathcal{D})$ consiste apenas das faixas verticais V_0 e V_1.

A segunda iteração do mapa da ferradura estica e contrai as faixas verticais V_0 e V_1, dobrando sobre o quadrado unitário e descartando o que ficou de fora, produzindo quatro faixas verticais $\mathcal{D} \bigcap \mathbf{F}(\mathcal{D}) \bigcap \mathbf{F}^{[2]}(\mathcal{D})$ denotadas V_{00}, V_{10}, V_{11} e V_{10} [Fig. 5.11]. A notação V_{01}, por exemplo, significa que essa faixa é imagem de V_1 e está à esquerda no quadrado unitário.

Analogamente, após três iterações teremos oito faixas

$$\mathcal{D} \bigcap \mathbf{F}(\mathcal{D}) \bigcap \mathbf{F}^{[2]}(\mathcal{D}) \bigcap \mathbf{F}^{[3]}(\mathcal{D})$$

denotadas V_{000}, V_{001}, V_{011}, V_{010}, V_{110}, V_{111}, V_{101}, e V_{100}. A sequência de 0's e 1's vai "contando a história" da respectiva faixa, da direita para a esquerda.

O mapa da ferradura é inversível, de forma que o mapa inverso $\mathbf{F}^{-1}$ expande o quadrado unitário na direção horizontal por um fator $1/\lambda$ e o

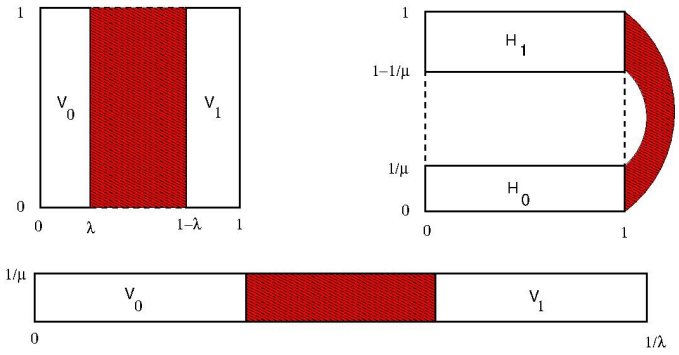

Figura 5.12: Uma iteração inversa do mapa da ferradura.

comprime na direção vertical por um fator $1/\mu$; depois dobra o retângulo sobre o quadrado unitário e descarta o que sobra. Logo o mapa inverso transforma as faixas verticais V_0 e V_1 nas faixas horizontais $H_0 = \mathbf{F}^{-1}(V_0)$ e $H_1 = \mathbf{F}^{-1}(V_1)$, respectivamente [Fig. 5.12], que constituem o conjunto interseção $\mathbf{F}^{-1}(\mathcal{D}) \bigcap \mathcal{D}$. Após duas iterações inversas teremos quatro faixas horizontais $\mathbf{F}^{-2}(\mathcal{D}) \bigcap \mathbf{F}^{-1}(\mathcal{D}) \bigcap \mathcal{D}$, denotadas H_{00}, H_{11}, H_{01} e H_{00}, e assim por diante.

Após n iterações diretas do mapa temos 2^n faixas verticais,

$$\mathcal{D} \bigcap \mathbf{F}(\mathcal{D}) \bigcap \mathbf{F}^{[2]}(\mathcal{D}) \bigcap \cdots \mathbf{F}^{[n]}(\mathcal{D})$$

cada qual com uma largura λ^n. Depois de n iterações inversas teremos 2^n faixas horizontais

$$\mathbf{F}^{[-n]}(\mathcal{D}) \cdots \bigcap \mathbf{F}^{[-2]}(\mathcal{D}) \bigcap \mathbf{F}^{-1}(\mathcal{D}) \bigcap \mathcal{D}$$

com largura $1/\mu^n$ cada uma.

A chamada ferradura de Smale é um conjunto invariante formado pelas infinitas imagens diretas e inversas do quadrado unitário sob a ação do mapa da ferradura:

$$\Lambda = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{i=-n}^{+n} \mathbf{F}^{[i]}(\mathcal{D}). \tag{5.63}$$

A ferradura de Smale é a figura que se obtém no limite $n \to \infty$ das interseções entre as faixas verticais e horizontais.

Por exemplo, para $n = 1$ a interseção

$$\Lambda_1 = \bigcap_{n=-1}^{+1} \mathbf{F}^{[n]}(\mathcal{D}).$$

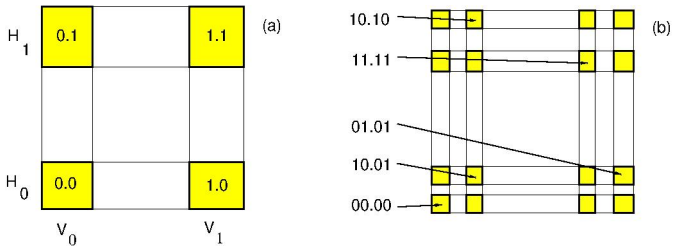

Figura 5.13: Interseções entre faixas verticais e horizontais para o mapa da ferradura.

será constituida de quatro retângulos rotulados como 0.1, 1.1, 0.0 e 1.0 [Fig. 5.13(a)]. O retângulo 0.1 é a interseção da faixa vertical V_0 com a faixa horizontal H_1 e assim por diante.

Para $n = 2$ teremos o conjunto

$$\Lambda_2 = \bigcap_{n=-2}^{+2} \mathbf{F}^{[n]}(\mathcal{D}).$$

formado por 16 retângulos denotados por 10.01, 10.10, 11.11, etc. O retângulo 10.01 é a interseção da faixa vertical V_{01} com a faixa horizontal H_{01}. Veja que os índices da faixa vertical são escritos de trás para frente por estarem à esquerda do ponto decimal [Fig. 5.13(b)].

Para n arbitrário a área do conjunto Λ_n é menor do que a área da união entre as faixas, que é $2^n\lambda^n \times 2^n\mu^{-n} = (4\lambda/\mu)^n$, e que tende a zero quando n vai a infinito, uma vez que $\lambda < 1/2$ e $\mu > 2$, por hipótese. Então Λ é um conjunto de área nula.

5.8 Dinâmica simbólica na ferradura de Smale

Depois de n iterações do mapa da ferradura, cada uma das faixas verticais terá um *itinerário simbólico* da forma $V_{s_{-1}s_{-2}\ldots s_{-n}}$, onde s_{-i} pode ser igual a 0 ou 1, e o índice $-i$ representa a i-ésima pré-imagem daquela faixa vertical sob o mapa inverso $\mathbf{F}^{-1}$. Analogamente, cada faixa horizontal terá o seguinte itinerário simbólico $H_{s_0 s_1 \ldots s_n}$, e $s_i = 0, 1$ é a i-ésima imagem direta da faixa horizontal sob o mapa.

Assim, cada retângulo no conjunto Λ_n foi identificado por uma sequência finita de 0s e 1s, na forma

$$s_{-n} \ldots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 s_2 \ldots s_n. \tag{5.64}$$

Observe novamente que o itinerário da faixa vertical, à esquerda do ponto decimal, é escrito de trás para frente.

No caso de $n \to \infty$ temos a ferradura de Smale Λ, que é um conjunto invariante que associamos ao atrator do mapa da ferradura. Cada elemento de Λ é rotulado por uma sequência bi-infinita de símbolos

$$\ldots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0 s_1 s_2 \ldots \tag{5.65}$$

No Capítulo 3, ao discutir o mapa de Bernoulli usando a representação decimal de números no intervalo $[0,1]$, tivemos a oportunidade de trabalhar com sequências simbólicas infinitas. No presente tratamento do mapa da ferradura, vamos estender aquela representação usando sequências bi-infinitas. Vamos chamar Σ o espaço destas sequências. Sejam duas sequências bi-infinitas em Σ:

$$s = (\ldots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0 s_1 s_2 \ldots) \tag{5.66}$$
$$\bar{s} = (\ldots \bar{s}_{-2}\bar{s}_{-1} \cdot \bar{s}_0 \bar{s}_1 \bar{s}_2 \ldots) \tag{5.67}$$

Podemos definir uma distância entre essas sequências em Σ da seguinte forma

$$d(s,\bar{s}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^{|i|}}, \tag{5.68}$$

onde

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & \text{se } s_i = \bar{s}_i \\ 1, & \text{se } s_i \neq \bar{s}_i \end{cases} \tag{5.69}$$

Vamos definir o mapa do deslocamento σ como o deslocamento do ponto decimal uma casa à direita de uma dada sequência bi-infinita em Σ:

$$\sigma(\ldots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0 s_1 s_2 \ldots) = (\ldots s_{-2}s_{-1}s_0 \cdot s_1 s_2 \ldots). \tag{5.70}$$

O mapa do deslocamento tem dois pontos fixos, que são as sequências bi-infinitas de 0s ou de 1s:

$$\sigma(\ldots 0 \cdot 00 \ldots) = (\ldots 00 \cdot 0 \ldots), \tag{5.71}$$
$$\sigma(\ldots 1 \cdot 11 \ldots) = (\ldots 11 \cdot 1 \ldots), \tag{5.72}$$

que escrevemos de forma simplificada como

$$\sigma(\overline{0.0}) = \overline{0.0}, \qquad \sigma(\overline{1.1}) = \overline{1.1}, \tag{5.73}$$

onde a barra superior indica que a sequência repete-se para sempre. Usando a definição 5.68 para distâncias em Σ podemos verificar que estes dois pontos fixos são instáveis.

Analogamente, uma órbita de período 2 para o mapa do deslocamento tem os pontos ($\overline{01.01}$ e $\overline{10.10}$, pois

$$\sigma(\overline{01.01}) = \overline{10.10}, \qquad \sigma(\overline{10.10}) = \overline{01.01}. \tag{5.74}$$

Da mesma forma, definimos órbitas de período m como sequências repetidas de m símbolos à direita e à esquerda do ponto decimal.

Como vimos no Capítulo 3, o mapa do deslocamento de Bernoulli tem um número infinito de órbitas periódicas (de período arbitrariamente alto), um número infinito (não-contável) de órbitas não-periódicas, e uma órbita densa, de modo que a dinâmica é fortemente caótica. Estas propriedades são compartilhadas pelo mapa σ sobre as sequências simbólicas bi-infinitas.

Neste ponto retornamos à ferradura de Smale, pois vimos que seus pontos são rotulados justamente por sequências bi-infinitas de 0s e 1s. Formalmente dizemos que o mapa do deslocamento σ e o mapa da ferradura $\mathbf{F}$ são conjugados por um homeomorfismo $\phi : \Lambda \to \Sigma$, tal que

$$\phi \circ \mathbf{F} = \sigma \circ \phi. \tag{5.75}$$

Devido à essa conjugação, as propriedades dinâmicas do mapa do deslocamento são compartilhadas pelo mapa da ferradura. Assim como σ mapeia sequências simbólicas de Σ em sequências também pertencentes a Σ, os pontos da ferradura Λ são mapeados em outros pontos de Λ (recorde que Λ é um conjunto invariante).

Assim, por exemplo, o 2-ciclo do mapa do deslocamento

$$\overline{01.01} \to \overline{10.10}$$

corresponde a uma iteração do mapa da ferradura que associa o ponto de Λ rotulado pela sequência $\overline{01.01}$ com o ponto rotulado por $\overline{10.10}$. Essa correspondência vale para as órbitas periódicas e não-periódicas. Concluimos, então, que a ferradura de Smale contém

- um conjunto infinito enumerável de órbitas periódicas (todas elas são pontos de sela);
- um conjunto infinito não-enumerável de órbitas não-periódicas
- uma órbita caótica densa,

de modo que nos é possível dizer que a ferradura de Smale é um conjunto invariante fortemente caótico.

Observe que, embora Λ seja um conjunto invariante de área nula, ele **não** é um atrator, pois "quase todos" os pontos do quadrado unitário $\mathcal{D}$ são descartados, ou seja, abandonam $\mathcal{D}$. Por "quase todos" entendemos que os pontos que permanecem em Λ têm medida nula. Então Λ é um conjunto caótico, porém não-atrativo.

Não obstante, um atrator é caótico quando contém ferraduras de Smale, ou seja, o atrator tem, localmente, propriedades topologicamente similares às do conjunto invariante Λ. Como afirma Tuffilaro [44]

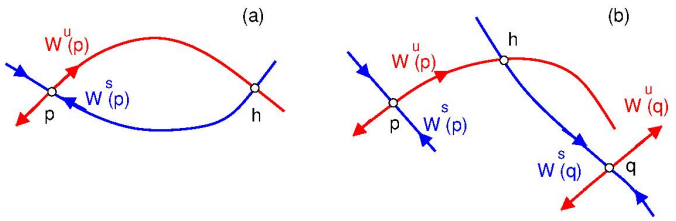

Figura 5.14: (a) Ponto homoclínico; (b) ponto heteroclínico.

> *Remanescentes de uma ferradura (...) estão enterradas dentro de um atrator caótico. A ferradura (...) atua como o esqueleto sobre o qual as órbitas caóticas e periódicas estão organizadas. Num certo sentido, as ferraduras representam o esqueleto para o atrator.*

Na sequência vamos esclarecer a relação entre a ferradura de Smale e um atrator caótico.

5.9 Pontos homoclínicos

Se $\mathbf{p}$ é um ponto fixo hiperbólico de um mapa $\mathbf{F}$, definimos no Capítulo anterior as curvas invariantes locais estável e instável que dele emanam são definidas, respectivamente, como

$$W^s_{loc}(\mathbf{p}) = \{\mathbf{v} \in W^s_{loc} : \mathbf{F}^{[n]}(\mathbf{v}) \in W^s, \mathbf{F}^{[n]}(\mathbf{v}) \to \mathbf{p}, n \to \infty\}, \quad (5.76)$$

$$W^u(\mathbf{p}) = \{\mathbf{v} \in W^u : \mathbf{F}^{[-n]}(\mathbf{v}) \in W^u, \mathbf{F}^{[-n]}(\mathbf{v}) \to \mathbf{p}, n \to \infty\}, \quad (5.77)$$

Pelo teorema das variedades invariantes, as curvas invariantes estável e instável são tangentes às direções estável e instável, respectivamente, no ponto fixo $\mathbf{p}$. Mas, como mostrado por Poincaré em seu trabalho pioneiro sobre o problema de N corpos, as curvas invariantes não se cruzam apenas nos pontos fixos, mas também nos chamados pontos homoclínicos e heteroclínicos.

Pontos homoclínicos são interseções transversais das curvas invariantes estável e instável que emanam um mesmo ponto fixo $\mathbf{p}$ [Fig. 5.14(a)]. Pontos heteroclínicos são interseções entre as curvas estável e instável que emanam de pontos fixos diferentes [Fig. 5.14(b)]

Na Fig. 5.15 representamos um ponto homoclínico $\mathbf{h}$ que pertence simultaneamente à curva instável W^u e à curva estável W^s de um ponto fixo hiperbólico p.Como ambas as curvas são invariantes, a imagem do ponto homoclínico $\mathbf{F}(\mathbf{h})$ deve também pertencer a ambas as curvas. Assim todas as imagens de um ponto homoclínico também serão pontos homoclínicos.

Também mostramos na Fig. 5.15 dois pontos $\mathbf{u} \in W^s(\mathbf{p})$ e $\mathbf{w} \in W^u(\mathbf{p})$ que precedem o ponto homoclínico $\mathbf{h}$. Desejamos que o mapa $\mathbf{F}$ preserve

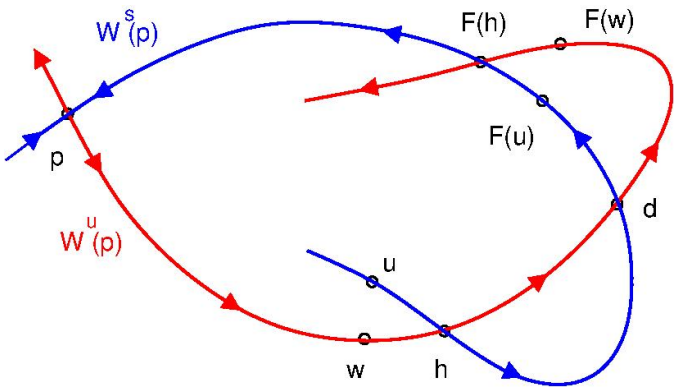

Figura 5.15: Imagens diretas de um ponto homoclínico

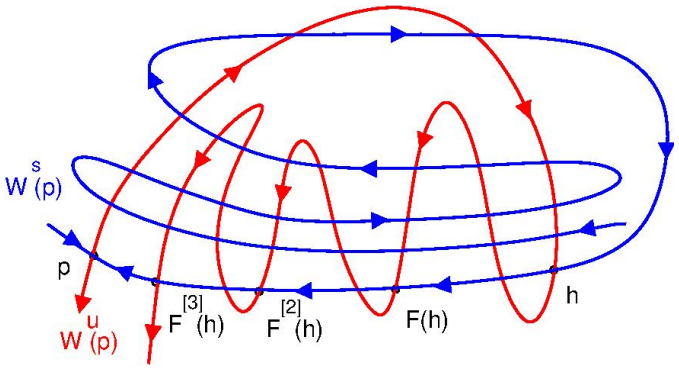

Figura 5.16: Emaranhado homoclínico

orientações, ou seja, se **u** e **w** precedem o ponto homoclínico **h**, então as respectivas imagens, $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ e $\mathbf{F}(\mathbf{w})$, também devem preceder a imagem do ponto homoclínico $\mathbf{F}(\mathbf{h})$. Portanto, o ponto **d** mostrado na Fig. 8.15, não é homoclínico, a despeito de ser uma interseção entre as curvas invariantes.

Dado que $\mathbf{F}(\mathbf{h})$ é um ponto homoclínico, assim também serão as suas imagens diretas e inversas, de modo que $\mathbf{F}^{[n]}(\mathbf{h}) \to \mathbf{p}$ quando $n \to \infty$ ao longo da curva estável $W^s(\mathbf{p})$. Da mesma forma $\mathbf{F}^{[-n]}(\mathbf{h}) \to \mathbf{p}$ quando $n \to \infty$ ao longo da curva instável $W^u(\mathbf{p})$.

A existência de um único ponto homoclínico implica em um número infinito destes pontos, que aproximam-se assintoticamente do ponto fixo ao longo de suas curvas invariantes. Para que isso ocorra, no entanto, é necessário que as curvas invariantes realizem complicados volteios [Fig. 5.16], formando uma complicada figura conhecida como *emaranhado homoclínico*. Poincaré mostrou que, se um pequeno círculo for desenhado com centro num certo ponto homoclínico, haverá infinitos outros pontos

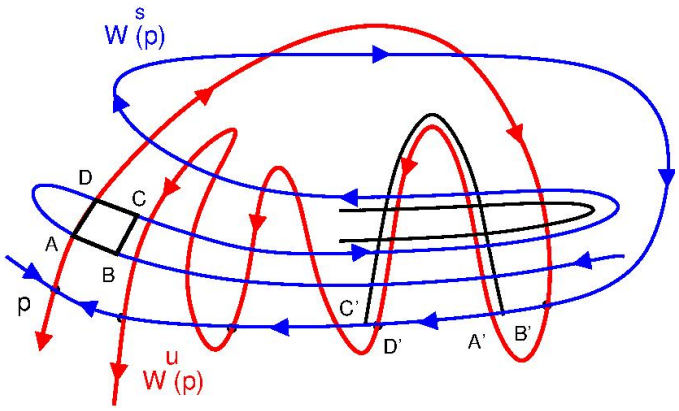

Figura 5.17: Imagens diretas e inversas de um paralelogramo num emaranhado homoclínico

homoclínicos dentro deste círculo, não importando o quão pequeno seja o seu raio.

É importante frisar que os pontos homoclínicos não representam pontos fixos ou órbitas periódicas. No entanto, Birkhoff e Smale demonstraram que cada ponto homoclínico é um ponto de acumulação para uma família com infinitas órbitas periódicas. Como no emaranhado há um número infinito de pontos homoclínicos, na vizinhança de cada um deles haverá um número infinito de pontos periódicos. A estrutura destas órbitas periódicas é organizada por meio da ferradura de Smale.

5.10 A ferradura de Smale e o emaranhado homoclínico

Vamos analisar a dinâmica na vizinhança de uma órbita periódica (como um ponto de sela **p**) onde haja um ponto homoclínico. Como vimos há pouco, isso basta para o aparecimento de um emaranhado homoclínico. Nós desejamos mostrar que esta estrutura possibilita o aparecimento de uma ferradura de Smale e, consequentemente, um conjunto caótico invariante.

Para tal consideramos um quadrilátero de pontos $ABCD$ na vizinhança do ponto fixo **p**, quando há um ponto homoclínico [Fig. 5.17]. O segmento AD pertence à curva instável $W^u(\mathbf{p})$, enquanto os segmentos AB e CD são partes da curva estável $W^s(\mathbf{p})$. Devido à invariância das curvas estável e instável, as iterações diretas e inversas do mapa **F** farão com que qualquer ponto do quadrilátero $ABCD$ que esteja sobre uma das curvas deverá permanecer nela para sempre.

Logo, após um certo número n de iterações diretas do mapa **F**, a imagem do quadrilátero $ABCD$ será a ferradura $C'D'A'B'$ [Fig. 5.17]. O segmento AD

da curva instável será mapeada no segmento curvo $A'D'$ da mesma curva. Já os segmentos AB e CD da curva estável serão mapeados no segmento $A'B'$ da mesma curva. Resulta que o quadrilátero será esticado ao longo da curva instável e comprimido ao longo da curva estável, pelo mapa n vezes iterado.

De forma análoga, se considerarmos n' (diferente de n, em geral) iterações inversas do mapa $\mathbf{F}$, a imagem do quadrilátero $ABCD$ será outra ferradura $A'B'C'D'$. A imagem direta do quadrilátero, ou $\mathbf{F}^{[n]}(ABCD)$, irá interceptar a sua imagem inversa $\mathbf{F}^{[-n']}(ABCD)$ em quatro regiões. Após um número infinito de iterações direta e inversas, teremos uma ferradura de Smale formada pelas interseções das curvas estável e instável.

Como existe uma órbita caótica densa na ferradura de Smale, isto sugere que, caso haja pontos homoclínicos no atrator, este também deverá ser caótico. No entanto, a existência de um emaranhado homoclínico, embora seja uma condição necessária, *não é* suficiente para a existência de um atrator caótico, pois a curva instável do emaranhado homoclínico não é necessariamente atrativa. Nesse caso, um ponto precisamente localizado na curva instável poderia se comportar caoticamente, mas a menor perturbação da condição inicial tiraria o ponto da curva instável e faria a órbita resultante migrar para outro atrator.

5.11 Pontos homoclínicos no atrator caótico de Hénon

Vamos considerar o mapa de Hénon para $a = 1,4$ e $b = 0,3$, caso este em que o cálculo direto dos expoentes de Lyapunov sugere a existência de um atrator caótico. Para reforçar essa conclusão podemos investigar numericamente a presença de pontos homoclínicos.

Considerando o ponto fixo $\mathbf{v}^*_+ = (0,884, 0,884)$ podemos empregar o método descrito no Capítulo anterior para determinar as curvas invariantes que emanam dele. O resultado é mostrado na Fig. 5.18, obtida com o uso do software *Dynamics* [45]. Duas conclusões são imediatas:

- a curva invariante instável que emana de $\mathbf{v}^*_+$ assemelha-se ao próprio atrator caótico;
- as curvas estável e instável interceptam-se um número indefinidamente grande de vezes;
- há pontos onde as curvas estável e instável praticamente se tangenciam.

Vamos comentar detalhadamente estes três pontos. O ponto fixo $\mathbf{v}^*_-$ é instável (ponto de sela) e pertence ao atrator caótico. Sua curva instável

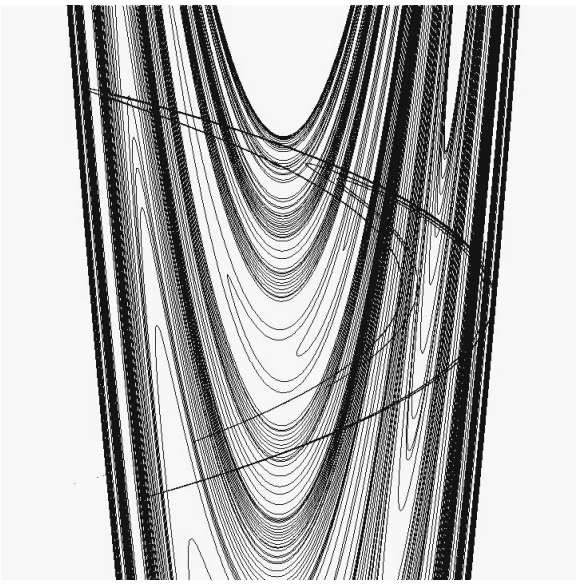

Figura 5.18: Curvas estável e instável de um ponto fixo do mapa de Hénon para $a = 1,4$ e $b = 0,3$. Os eixos vertical e horizontal vão de $-2,5$ a $2,5$. Essa figura foi gerada com o software *Dynamics* [45].

aparentemente coincide com o próprio atrator. Este fato pode ser explicado imaginando que tomamos um pequeno disco C repleto de condições iniciais centrado no ponto fixo $\mathbf{p}$ [Fig. 5.19].

Após iteração do mapa o círculo é deformado numa elipse, tal que as distâncias ao longo da curva estável $W^s(\mathbf{p})$ vão diminuindo e as distâncias ao longo da curva instável $W^u(\mathbf{p})$ vão aumentando. Após mais uma iteração, a imagem da elipse será um a região longa e fina que acompanha a curva instável. No limite de infinitas iterações do mapa, a imagem do círculo traçará a própria curva instável. Dizemos que o atrator é a "clausura" da curva instável.

Podemos, também, visualizar na Fig. 5.18 diversas interseções transversais das curvas estável e instável, os quais são pontos homoclínicos cuja existência indica a presença de uma ferradura de Smale, sugerindo uma dinâmica caótica. De fato, o expoente de Lyapunov positivo de órbitas típicas do atrator de Hénon é uma forte indicação da existência do atrator caótico.

Para o mapa de Hénon, Benedicks e Carleson mostraram rigorosamente que existe um intervalo de parâmetros (a,b), com b próximo a zero e a numa vizinhança de $a = 2$, para os quais existe um atrator caótico (ou seja, que existe uma órbita caótica densa) [46]. Posteriormente Mora e Viana [47] estenderam este resultado para uma família de mapas bidimensionais do

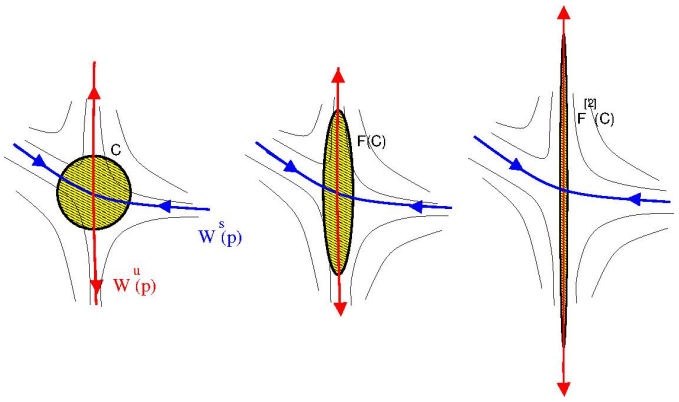

Figura 5.19: Imagens de um círculo centrado num ponto de sela sob a ação das iterações de um mapa.

tipo Hénon.

Finalmente, há diversos exemplos na Fig. 5.18 de quase-tangências entre as curvas. Como veremos na próxima seção, a existência de tangências homoclínicas é característica de um fenômeno chamado crise.

5.12 Crise de fronteira

A crise foi definida no Cap. 3 como uma mudança súbita num atrator caótico (unidimensional), na medida em que um parâmetro do mapa é variado. Para mapas bidimensionais há basicamente três tipos de crise:

Crise de fronteira: se um atrator caótico colide com uma órbita periódica instável situada na fronteira da sua bacia de atração. Imediatamente após a crise há uma súbita destruição do atrator, que torna-se um transiente caótico;

Crise interior: ocorre quando um atrator caótico colide com uma órbita periódica instável situada no interior da sua bacia de atração. Nesse caso a crise é sucedida por um súbito aumento no tamanho do atrator caótico.;

Crise de fusão: acontece quando dois ou mais atratores caóticos colidem simultaneamente com uma ou mais órbitas periódicas instáveis situadas sobre a fronteira das respectivas bacias de atração. Após a crise os atratores fundem-se num único atrator.

Supomos um mapa genérico $\mathbf{F}_p(\mathbf{v})$ com um parâmetro p que pode ser variado. O sistema deve apresentar um atrator caótico e outro atrator que pode ser caótico ou periódico. Os dois atratores têm bacias separadas por

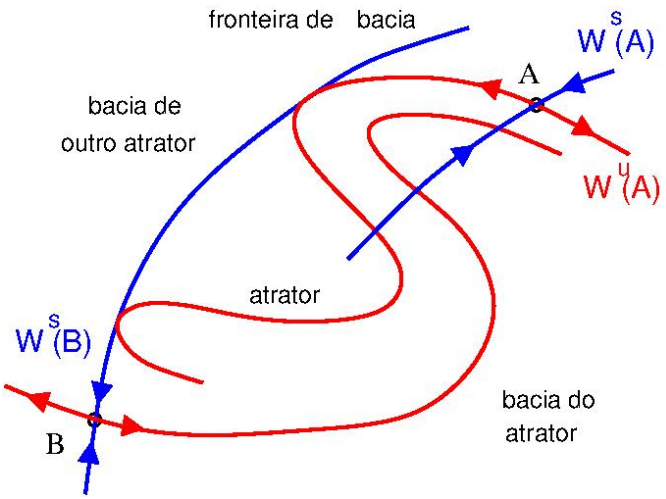

Figura 5.20: Crise de fronteira com tangência heteroclínica.

uma fronteira. A distância entre o atrator caótico e a sua fronteira de bacia deve diminuir na medida em que o parâmetro p aproxima-se de um valor crítico p_c. Supondo que os dois colidam em $p = p_c$, após a crise o atrator transforma-se num transiente caótico.

Há dois tipos de crise de fronteira, relacionadas ao tipo de tangência entre as curvas invariantes:

5.12.1 Tangência heteroclínica

Vamos chamar **A** uma órbita periódica instável imersa no atrator caótico do sistema. Por simplicidade, na Fig. 5.20 representamos um ponto de sela, mas toda a discussão é válida para um período qualquer, com as devidas alterações. O atrator caótico, por sua vez, é a clausura da curva invariante instável do ponto **A**, ou seja, de $W^u(\mathbf{A})$.

Na fronteira da bacia de atração há uma segunda órbita periódica instável **B**, de forma que a própria fronteira é a clausura da sua curva invariante estável $W^s(\mathbf{B})$ [Fig. 5.20]. A colisão entre o atrator e a fronteira de bacia, que ocorre no ponto de crise $p = p_c$, dá-se quando a curva invariante estável do ponto **B** tangencia a curva invariante instável do ponto **A**. A tangência é heteroclínica pois os pontos **A** e **B** são distintos.

5.12.2 Tangência homoclínica

Nesse caso as curvas estável e instável de uma mesma órbita periódica instável são tangentes. Na Fig. 5.21 essa situação é representada pela tangência do ramo da curva invariante instável do ponto **B** que aponta

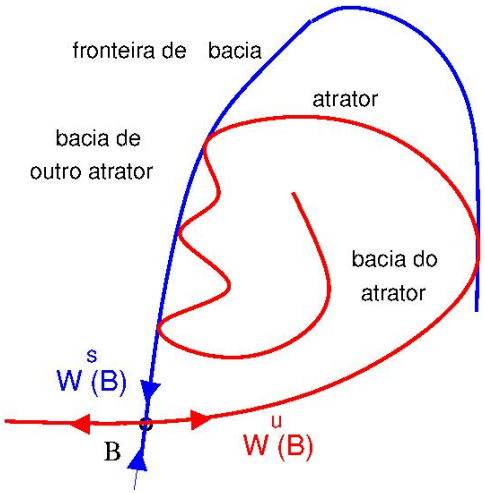

Figura 5.21: Crise de fronteira com tangência homoclínica.

para o interior da sua bacia de atração (cuja clausura é o atrator caótico) e a sua própria curva invariante estável, cuja clausura é a fronteira da bacia de atração.

Podemos encontrar ambos os tipos de crise de fronteira para o mapa de Hénon. A crise de tangência homoclínica ocorre, por exemplo, para $a_c = 1,426921114$ e $b = 0,3$. Para $a < a_c$ existe um atrator caótico (como aquele que estudamos para $a = 1,4$ e $b = 0,3$) e um atrator no infinito. Se $a = a_c$ a curva instável do ponto fixo $\mathbf{v}_+^*$, cuja clausura é o próprio atrator caótico, colide com a fronteira de bacia, que é a clausura da curva estável do mesmo ponto fixo $\mathbf{v}_+^*$.

Se a for ligeiramente maior que a_c o atrator caótico é destruído e irá transfor-se num transiente caótico: as iterações têm um comportamento caótico com uma duração τ_i, após a qual tendem a infinito. Considerando $\delta = a - a_c = 0,01$ e um grande número de condições iniciais no quadrado centrado em $(x,y) = (0,1,0,3)$ e largura $0,02$, podemos observar na Fig. 5.22(a) que a duração do transiente caótico varia bastante de acordo com a condição inicial. O histograma mostrado na Fig. 5.22(b) é bem ajustado por uma distribuição exponencial

$$P(\tau) = P_0 e^{-\kappa\tau} \tag{5.78}$$

onde $P_0 = 800,51$ e $\kappa = 0,008319$, o que dá uma duração média $\langle\tau\rangle = \kappa^{-1} = 120,2$ para o transiente caótico nesse caso.

Como a crise ocorre quando as curvas invariantes se tocam para $a = a_c$, esperamos que a duração média do transiente caótico tenda para infinito quando $a \to a_c$. De fato, variando $\delta = a - a_c$ e determinando a duração média do transiente (para diversas condições iniciais) obtemos uma relação

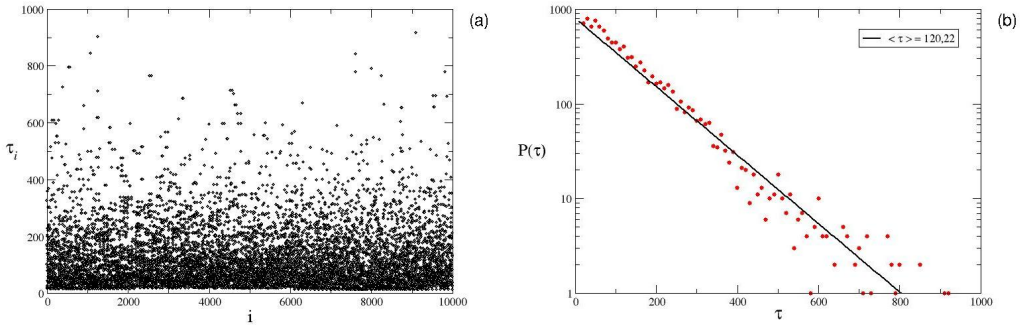

Figura 5.22: (a) Duração dos transientes caóticos para o mapa de Hénon com $\delta a = a - a_c = 0,01$ e diversas condições iniciais; (b) Histograma das durações dos transientes caóticos. A reta representa um ajuste numérico.

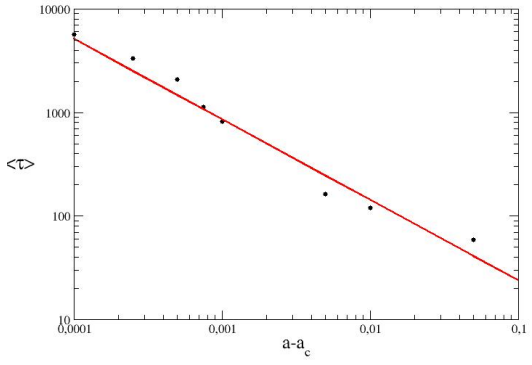

Figura 5.23: Duração média dos transientes caóticos para o mapa de Hénon em função de $\delta a = a - a_c = 0,01$. A reta representa um ajuste numérico.

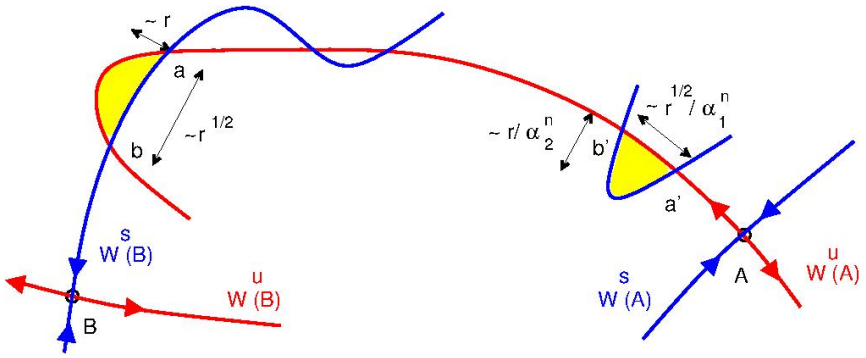

Figura 5.24: Comportamento das curvas invariantes próximo a uma tangência heteroclínica.

do tipo lei de potência [Fig. 5.23]

$$\langle \tau \rangle = K(a - a_c)^{-\gamma}, \tag{5.79}$$

onde o ajuste numérico fornece $K = 4,0114$ e $\gamma = 0,77621$.

5.13 Teoria para os expoentes críticos

Para um mapa genérico $\mathbf{F}_p(\mathbf{v})$ temos um ponto de sela **A** imerso no atrator caótico, e outro ponto de sela **B** pertencente à fronteira de bacia. Vamos considerar o comportamento das curvas invariantes próximo à tangência heteroclínica que ocorre para $p = p_c$ [Fig. 5.24]

Na Figura 5.24 mostramos esquematicamente que, para $p > p_c$ a curva instável de A intercepta a curva estável de B em dois pontos a e b. Supondo que p é apenas ligeiramente acima de p_c a parte de $W^u(A)$ que fica acima de $W^s(B)$ é aproximadamente parabólica. A altura dessa parábola é proporcional à diferença entre p e p_c (já que, se $p = p_c$ há uma tangência e a altura é nula). Definindo $r = p - p_c$, se a altura da parábola é proporcional a r, a distância entre a e b é proporcional a $r^{1/2}$.

Uma órbita do mapa que recaia na região hachureada ab no interior da parábola estará na bacia de atração de um segundo atrator (não mostrado na Fig. 5.24) e será atraida para ele ao longo do ramo externo da curva instável de B. Se o segundo atrator for o infinito, a órbita que recair na região hachureada divergirá, e o comportamento antes disso constitui o transiente caótico, cuja duração média queremos estimar.

Para saber a duração do transiente nós consideramos as iterações inversas da região hachureada ab, que aproximam-se do ponto A ao longo de sua curva instável $W^u(A)$. A sua n-ésima iteração inversa (se n é suficientemente grande) estará tão próxima ao ponto A que a dinâmica pode ser

descrita aproximadamente pelo mapa linearizado em torno de A, dado por $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{J}(A) \cdot \mathbf{v}_n$.

Nessas condições determinamos os autovalores da matriz Jacobiana α_1, associado à direção instável $E^u(A)$, de modo que $|\alpha_1| > 1$; e α_2, associado à direção estável $E^s(A)$, tal que $|\alpha_2| < 1$. Como o segmento ab pertence a $W^u(A)$ - que é tangente a $E^u(A)$ no ponto A - após n iterações inversas do mapa o segmento $a'b'$ encolherá e terá um comprimento $\sim r^{1/2}\alpha_1^{-n}$. Já a altura da parábola será $r\alpha_2^{-n}$, já que ela se estica ao longo de $W^s(A)$.

Uma órbita do mapa que recaia na região hachureada $a'b'$ irá, após n iterações, recair na região hachureada ab e ser atraida para o infinito (ou outro atrator). Logo a duração do transiente pode ser estimada como o número de iterações diretas que leva um ponto de uma órbita a penetrar na região hachureada $a'b'$.

Chamaremos $\mu(r)$ a probabilidade de que uma órbita no atrator caótico (para $p = p_c$) tenha um ponto sobre o segmento $a'b'$. Quanto maior a probabilidade, menor será o tempo necessário para que esse ponto seja mapeado na região hachureada ab. Podemos, assim, estimar a duração média do transiente caótico como $\langle\tau\rangle \sim 1/\mu(r)$.

Reduzindo r por um fator α_2 (isto é, fazendo $r \to \alpha_2 r$) e iterando $n+1$ vezes o mapa inverso, a altura da região hachureada $a'b'$ será

$$\sim \frac{\alpha_2 r}{\alpha_2^{n+1}} = \frac{r}{\alpha_2^n},$$

e o comprimento do segmento $a'b'$ será

$$\sim \frac{(\alpha_2 r)^{1/2}}{\alpha_1^{n+1}}.$$

Suporemos que a probabilidade $\mu(r)$ varie de maneira suave ao longo da direção da curva estável de A, tal que a razão entre as probabilidades seja

$$\frac{\mu(r)}{\mu(\alpha_2 r)} \sim \frac{r^{1/2}\alpha_1^{-n}}{(\alpha_2 r)^{1/2}\alpha_1^{-n-1}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2^{1/2}}. \tag{5.80}$$

Na seção anterior vimos que a duração média do transiente caótico para o mapa de Hénon (onde $p \to a$) é dada pela lei de potência (5.79)

$$\langle\tau\rangle = K(a - a_c)^{-\gamma} \sim r^{-\gamma}, \tag{5.81}$$

e a probabilidade associada é

$$\mu(r) \sim \frac{1}{\langle\tau\rangle} \sim r^{\gamma} \tag{5.82}$$

de modo que

$$\frac{\mu(r)}{\mu(\alpha_2 r)} \sim \frac{r^{\gamma}}{(\alpha_2 r)^{\gamma}} = \frac{1}{\alpha_2^{\gamma}}.$$

Comparando com (5.80)

$$\alpha_2^{1/2} = \alpha_1 \alpha_2^{\gamma},$$

e, tomando logaritmos, podemos isolar o expoente γ em função dos autovalores

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{\ln \alpha_1}{\ln \alpha_2} = \frac{1}{2} + \frac{\ln |\alpha_1|}{\ln |\alpha_2|} \tag{5.83}$$

uma vez que $|\alpha_1| > 1$ e $|\alpha_2| < 1$. Concluímos que $\gamma > 1/2$ para mapas bidimensionais.

Uma análise semelhante pode ser feita para o caso de tangência homoclínica: um ponto de sela B pertence ao atrator e à sua fronteira de bacia na tangência que ocorre quando $p = p_c$. Supondo, novamente, a validade da lei de potência (5.79), o expoente será dado pela expressão

$$\gamma = \frac{\ln |\beta_2|}{\ln |\beta_1 \beta_2|^2} \tag{5.84}$$

onde β_1 e β_2 são os autovalores da matriz Jacobiana calculada no ponto B, tais que $|\beta_1| > 1$ e $|\beta_2| < 1$. Nesse caso, também, $\gamma > 1/2$.

Para mapas unidimensionais só teríamos a curva instável no atrator caótico, então podemos fazer $\alpha_2 \to 0$ e $\beta_2 \to 0$ tanto em (5.83) como em (5.84), de sorte que, em ambos os casos, $\gamma \to 1/2$, que é o resultado que determinamos no Capítulo 3.

5.14 Crise interior

Nesse tipo de crise o atrator caótico colide com uma órbita periódica instável, em $p = p_c$, e torna-se subitamente maior, ou seja, ocupa uma maior área no plano de fase. Após a crise o sistema ainda guarda uma certa "memória" do atrator pré-crítico: uma órbita típica permanece um certo tempo na região ocupada pelo atrator pré-crítico, e "foge" desta região de forma intermitente para ocupar uma região maior do plano de fase. A órbita retorna de forma repetitiva para o remanescente do atrator pré-crítico, dando origem a uma órbita caótica que alterna entre duas regiões, como esquematizado abaixo

$$\text{caos}_1 \to \text{caos}_2 \to \text{caos}_1 \to \text{caos}_2 \to \cdots$$

onde caos_1 refere-se à órbita confinada ao "fantasma" do atrator pré-crítico e caos_2 à órbita que "foge" para o atrator pós-crítico.

Este tipo de comportamento é conhecido como *intermitência induzida pela crise* já que, na intermitência vista no Capítulo 3, o comportamento pode ser esquematizado como

$$\text{caos} \to \text{laminar} \to \text{caos} \to \text{laminar} \to \cdots$$

onde laminar refere-se à fase aproximadamente periódica observada quando a órbita aproxima-se do "fantasma" do ponto fixo que despareceu após a bifurcação tangente.

Assim como na crise de fronteira, podemos caracterizar quantitativamente o comportamento do sistema pelos intervalos de tempo $\tilde{\tau}_i$ que a órbita dispende nos trechos caos_1. Estes intervalos, assim como as durações do transiente caótico na crise de fronteira, diferem bastante entre si e obedecem também a uma distribuição exponencial de probabilidades, de modo que é mais interessante focalizarmos nossa atenção no seu valor médio $<\tilde{\tau}>$. Este satisfaz, por sua vez, uma lei de potência da forma

$$<\tilde{\tau}> \sim (p - p_c)^{-\gamma} \quad (p \to p_c) \tag{5.85}$$

onde γ é dado pela expressão da crise de fronteira com tangência heteroclínica (5.84) pois, neste caso, a órbita periódica instável B que colide com o atrator não está localizada na correspondente fronteira de bacia.

5.14.1 Crise de fusão de atratores

Na situação pré-crítica temos dois atratores caóticos que colidem simultaneamente com sua fronteira de bacia comum em $p = p_{CR}$, dando origem a um atrator resultante da fusão dos atratores pré-críticos. Depois de ocorrida a crise as órbitas ainda conservam uma "memória" dos atrator pré-críticos, pois ficam intervalos de tempo nas regiões do espaço de fase previamente ocupadas pelos atratores pré-críticos, saltando de forma intermitente entre essas duas regiões. Novamente, trata-se de um caso de intermitência induzida pela crise, esquematicamente representada por

$$\text{caos}_1 \to \text{caos}_2 \to \text{caos}_1 \to \text{caos}_2 \to \cdots$$

onde caos_1 e caos_2 representam os dois atratores pré-críticos. Podemos caracterizar quantitativamente esta situação registrando os intervalos de tempo decorridos para as incursões da órbita em qualquer uma dessas regiões, obtendo assim uma duração média $<\tilde{\tau}>$ com as mesmas propriedades mencionadas anteriormente.

Um exemplo de crise de fusão de atratores pode ser visto no diagrama de bifurcações do mapa logístico [Fig. 3.17(b)]. A janela de período 3 começa em $r = r_a = 1 + \sqrt{8} \approx 3,8284$ devido a uma bifurcação tangente que cria dois 3-ciclos, uma estável e outra instável. O ciclo estável sofre bifurcações de duplicação de período que acumulam-se em $r = r_b$ formando uma órbita caótica com três bandas, que em $r = r_c \approx 3,850$, colidem com o 3-ciclo instável. Após a crise as três bandas caóticas se fundem.

5.15 Controle de caos

Pode ser desejável, em determinadas situações, que o comportamento caótico seja evitado num sistema, já que nele o efeito de pequenas perturbações torna imprevisível o estado do sistema em tempos futuros. Uma abordagem do tipo *força bruta* para retirar um dado sistema dinâmico de um regime caótico consiste em perturbá-lo de forma a recair num regime não-caótico (periódico ou quase-periódico). No entanto, perturbações de grande amplitude podem alterar de modo indesejável da própria dinâmica do sistema.

Há diversos métodos de controle de caos na literatura que procuram o mesmo objetivo porém com o uso de perturbações tão pequenas que alteram apenas ligeiramente o sistema dinâmico [vide o Cap. 10 de [35] para uma visão geral do assunto]. Iremos nos concentrar no chamado método OGY de controle de caos, desenvolvido em 1990 por Grebogi, Ott e Yorke, e que consiste em usar a própria natureza caótica do sistema para, com o auxílio de pequenas perturbações em um parâmetro acessível, fazê-lo estabilizar numa órbita periódica desejada [48].

5.15.1 Método OGY

A base matemática do método OGY para controle de caos é o fato de que, num atrator caótico, há imersos um número infinito de órbitas periódicas instáveis. Para um exemplo unidimensional desse fato, consideramos a cascata de bifurcações de duplicação do período no mapa logístico $f_r(x) = rx(1-x)$, que inicia em $r = 3$ e termina em $r_\infty \approx 3,57$ [vide seção 2.12]. Em cada uma destas bifurcações uma órbita de período m torna-se instável e é criada uma órbita estável de período $2m$. Após um número infinito destas bifurcações, o atrator para $r > r_\infty$ conterá um número infinito de órbitas periódicas instáveis.

Esse fato pode ser estendido a mapas bidimensionais como o mapa de Hénon, que tem um atrator caótico para os valores de parâmetros $a = 1,4$ e $b = 0,3$ [cf. Fig. 5.6. O expoente de Lyapunov máximo é $\lambda_1 = 0,418 > 0$], e também mostramos numericamente a existência de um emaranhado homoclínico com uma ferradura de Smale. Para este sistema em particular há métodos numéricos eficientes para determinar órbitas períodicas instáveis de períodos até $m = 28$ [49].

Dentre o número infinitamente grande de órbitas periódicas instáveis disponíveis nós escolhemos uma órbita de baixo período que represente o comportamento que desejamos para o sistema. É suficiente considerar um ponto fixo, já que os pontos de uma órbita de período m são pontos fixos do mapa m vezes iterado (vide Cap. 1). Na sequência escolhemos perturbações adequadas (isto é, de baixa intensidade) de um parâmetro acessível do sistema para estabilizar essa órbita periódica já existente.

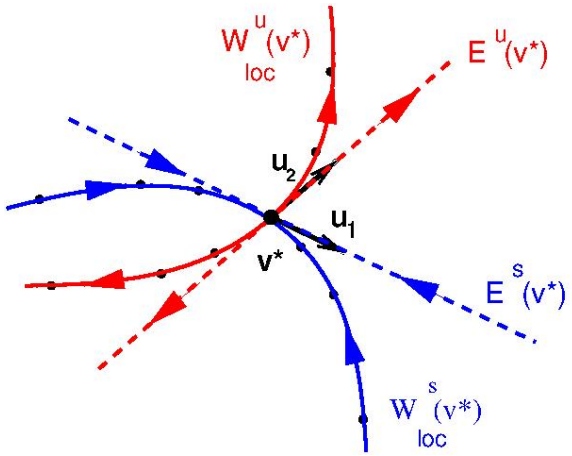

Figura 5.25: Curvas e direções invariantes para um ponto de sela do mapa.

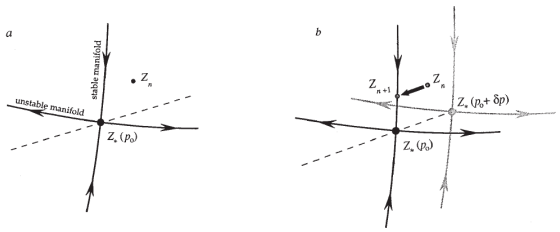

Figura 5.26: Controle de caos pelo método OGY.

Vamos considerar um mapa bidimensional genérico, da forma

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{F}_p(\mathbf{v}_n), \tag{5.86}$$

onde p é um parâmetro acessível, tal que para $p = p_0$ o mapa tenha um atrator caótico. Escolhemos um ponto fixo instável $\mathbf{v}^*$ do mapa (ponto de sela) imerso no atrator caótico. Emanam do ponto de sela $\mathbf{v}^*(p_0)$ as curvas invariantes estável W^s e instável W^u. De fato, a clausura da curva instável de $\mathbf{v}^*$ é o próprio atrator. Supomos, ainda, que o estado atual do sistema $\mathbf{v}_n$ esteja próximo ao ponto fixo $\mathbf{v}^*(p_0)$ [Fig. 5.25].

Perturbamos o parâmetro p, fazendo que ele assuma o valor $p_0 + \delta p$, onde $|\delta p| \ll p_0$. Assim podemos supor que o sistema seja apenas ligeiramente alterado, de modo que o ponto fixo será deslocado para uma nova posição $\mathbf{v}^*(p_0 + \delta p)$, suficientemente próxima à anterior. Junto com o ponto fixo, deslocam-se também as curvas invariantes.

Na iteração seguinte do mapa (após a perturbação) os pontos da órbita são atraídos para o ponto fixo deslocado em uma direção paralela à sua curva estável e, ao mesmo tempo, é repelida numa direção paralela à sua

curva instável. Assim, se δp é escolhida adequadamente, podemos fazer a próxima iteração $\mathbf{v}_{n+1}$ recair exatamente na curva estável de $\mathbf{v}^*(p_0)$ [Fig. 5.26]. Depois dessa intervenção podemos retornar o parâmetro ao seu valor original p_0, uma vez que a órbita na sequência permanecerá na curva invariante estável de $\mathbf{v}^*(p_0)$, e irá se aproximar do ponto fixo com o passar do tempo.

5.15.2 Implementação do método OGY

Considerando o mapa bidimensional na forma geral (5.86)

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{F}_p(\mathbf{v}_n), \tag{5.87}$$

supomos que $\mathbf{v}^*$ seja um ponto fixo imerso no atrator caótico que existe para $p = p_0$:

$$\mathbf{v}^*(p_0) = \mathbf{F}_{p_0}(\mathbf{v}^*(p_0)), \tag{5.88}$$

Na vizinhança do ponto fixo nós linearizamos (5.86), como fizemos no Cap. 3

$$\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}^*(p) = \mathbf{J} \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}^*(p)), \tag{5.89}$$

onde $\mathbf{J}$ é a matriz Jacobiana do mapa, com os elementos computados no ponto fixo $\mathbf{v}^*$ [cf. 4.121]

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}^*) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{\mathbf{v}^*} & \left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)_{\mathbf{v}^*} \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x_n}\right)_{\mathbf{v}^*} & \left(\frac{\partial g}{\partial y_n}\right)_{\mathbf{v}^*} \end{pmatrix}. \tag{5.90}$$

Como variamos o parâmetro p a cada iteração do mapa faremos $p_n = p_0 + \delta p_n$, onde $|\delta p_n| < \delta p_{max}$, ou seja, δp_{max} é a máxima perturbação admissível. Expandindo, agora, (5.88) na vizinhança de p_0, obtemos

$$\mathbf{v}^*(p_n) = \mathbf{v}^*(p_0) + (p_n - p_0)\mathbf{g} = \mathbf{g}\delta p_n, \tag{5.91}$$

onde deslocamos, sem perda de generalidade, a origem do sistema para o ponto fixo: $\mathbf{v}^*(p_0) = \mathbf{0}$, e definimos a matriz coluna

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_{p_0,\mathbf{v}^*} \\ \left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_{p_0,\mathbf{v}^*} \end{pmatrix}. \tag{5.92}$$

Substituindo em (5.89)

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{g}\delta p_n + \mathbf{J} \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{g}\delta p_n). \tag{5.93}$$

Sejam ξ_s e ξ_u os autovalores da matriz Jacobiana (5.90), tais que $|\xi_s| < 1$ e $|\xi_u| > 1$, correspondentes aos autovetores $\mathbf{u}_s$ e $\mathbf{u}_u$, respectivamente:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_s = \xi_s \mathbf{u}_s, \qquad \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_u = \xi_u \mathbf{u}_u, \tag{5.94}$$

tais que $\mathbf{v}_n$ pode ser expressa como uma combinação linear dos autovetores. Será mais conveniente, porém, introduzir vetores de base contravariantes $\{\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_u\}$ tais que [1]

$$\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{u}_s = \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{u}_u = 1, \tag{5.95}$$

$$\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{u}_u = \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{u}_s = 0, \tag{5.96}$$

de forma que a matriz Jacobiana seja expressa na forma explicitamente diagonal

$$\mathbf{J} = \xi_s \mathbf{u}_s \mathbf{e}_s + \xi_u \mathbf{u}_u \mathbf{e}_u, \tag{5.97}$$

onde $\mathbf{u}_s\mathbf{e}_s$ e $\mathbf{u}_u\mathbf{e}_u$ são produtos diádicos. Aplicando em (5.93) obtemos

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{g}\delta p_n + (\xi_s \mathbf{u}_s \mathbf{e}_s + \xi_u \mathbf{u}_u \mathbf{e}_u) \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{g}\delta p_n). \tag{5.98}$$

No espírito do método OGY, aguardamos até que $\mathbf{v}_n$ recaia perto o suficiente do ponto fixo para que a expressão acima se aplique. Nosso objetivo é escolher δp_n tal que $\mathbf{v}_{n+1}$ recaia exatamente na curva estável do ponto fixo, ou seja, que $\mathbf{v}_{n+1}$ não tenha componente na direção instável

$$\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{v}_{n+1} = 0. \tag{5.99}$$

Uma vez que $\mathbf{v}_{n+1}$ esteja na direção estável do ponto fixo, desligamos a perturbação (fazendo $\delta p ==$) e a órbita irá aproximar-se do ponto fixo a uma taxa ξ_s.

Aplicando a condição (5.99) sobre (5.98)

$$-\delta p_n \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{g} = [\xi_s \mathbf{e}_u \cdot (\mathbf{u}_s \mathbf{e}_s) + \xi_u \mathbf{e}_u \cdot (\mathbf{u}_u \mathbf{e}_u)] \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{g}\delta p_n).$$

Usando as propriedades algébricas do produto diádico de vetores

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{ab}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}, \qquad (\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \tag{5.100}$$

e as relações de ortonormalidade (5.95)-(5.96), obtemos

$$\delta p_n = \xi_u (\xi_u - 1)^{-1} \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{e}_u]}{\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_u}, \tag{5.101}$$

que fornece o valor da perturbação necessária para o controle.

É importante salientar que a equação de controle (5.101) só deve ser empregada se o módulo da perturbação $|\delta p_n|$ não exceder o valor máximo admissível δp_{max}. Caso contrário não aplicamos a perturbação, simplesmente.

Intuitivamente observamos que a condição $|\delta p_n| < \delta p_{max}$ implica em que estejamos suficientemente próximos ao ponto fixo. De fato, usando (5.101)

[1] No artigo original [48], são usadas as notações **e** e **f** no lugar de **u** e **e**, respectivamente.

concluímos que, para usar a lei de controle (5.101), é necessário que o estado do sistema $\mathbf{v}_n$ esteja numa vizinhança do ponto fixo na origem dada pela condição $|v_n^u| < \bar{v}$, onde

$$v_n^u = \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{v}_n, \qquad \bar{v} = \delta p_{max} \left| (1 - \xi_u^{-1}) \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_u \right| \tag{5.102}$$

O controle OGY exige, assim, que a órbita no atrator caótico entre na vizinhança do ponto fixo cujo tamanho é dado implicitamente por (5.102), para um dado valor de δp_{max}. Supondo que o atrator caótico seja ergódico, uma órbita típica $\mathbf{v}_n$ visitará todos os pontos do atrator, incluindo naturamente uma vizinhança arbitrária do ponto fixo (que está imerso no atrator). Sabemos, assim, que a condição $|v_n^u| < \bar{v}$ será satisfeita, mais cedo ou mais tarde, ao longo da órbita caótica, desde que ela seja suficientemente longa. Como a frequência em que pontos distintos de um atrator caótico são visitados pode ser bastante diferente, podemos ter de esperar um tempo muito longo para que o controle possa ser acionado.

Uma estimativa que pode ser feita é o tempo médio necessário para atingir a órbita periódica desejada, *a partir do início da aplicação do controle*. Isto por que, até ser estabilizada, a órbita pode ser encarada como um transiente caótico. Vimos, no caso da crise, que a duração do transiente depende do ponto inicial da órbita, e o mesmo raciocínio usado na seção 4.5. pode ser usado para mostrar que a duração média satisfaz a lei de escala

$$\langle \tau \rangle \sim (\delta p_{max})^{-\gamma}, \tag{5.103}$$

onde o expoente é dado por [vide Eq. (5.83)]

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{\ln |\xi_u|}{\ln |\xi_s|} \tag{5.104}$$

5.16 Aplicação ao mapa de Hénon

Vamos considerar, à guisa de ilustração, o mapa de Hénon (4.100)-(4.101)

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} a - x^2 + by \\ x \end{pmatrix}. \tag{5.105}$$

que tem um atrator caótico para, por exemplo, $a = 1,29$ e $b = 0,3$. Vamos escolher $p = a$ como o parâmetro de controle do sistema, tal que $p_0 = a_0 = 1,29$.

Suponha que queiramos estabilizar a órbita caótica em um dos seus pontos fixos, dado por (4.105)

$$\mathbf{v}_+^* = \frac{1}{2}[b - 1 + \sqrt{(b-1)^2 + 4a}] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5.106}$$

e que está imerso no atrator caótico. As coordenadas do ponto fixo são $x^*_+ = y^*_+ = 0,838486$.

Os elementos da matriz Jacobiana são dados por ()

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}^*_+, a_0) = \begin{pmatrix} -2x^*_+ & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,676972 & 0,3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.107}$$

e o vetor das derivadas em relação ao parâmetro, definido em (5.92), é

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_{a_0,\mathbf{v}^*_+} \\ \left(\frac{\partial g}{\partial a}\right)_{a_0,\mathbf{v}^*_+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.108}$$

Os autovalores da matriz Jacobiana, no ponto fixo $\mathbf{v}^*_+$, são dados por (4.136)

$$\xi_s = -x^*_+ + \sqrt{x^2_\pm + b} = 0,163042188 \tag{5.109}$$

$$\xi_u = -x^*_+ - \sqrt{x^2_\pm + b} = -1,84001432, \tag{5.110}$$

com os respectivos autovetores dados por (4.141)

$$\mathbf{u}_s = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2_s}} \begin{pmatrix} \xi_s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,160917401 \\ 0,986967862 \end{pmatrix}, \tag{5.111}$$

$$\mathbf{u}_u = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2_u}} \begin{pmatrix} \xi_u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,878626168 \\ 0,477510363 \end{pmatrix}, \tag{5.112}$$

Para obter os vetores contravariantes correspondentes na direção instável usamos as expressões

$$e_{u1} = (u_{u1} - u_{s1}u_{u2}/u_{s2})^{-1}, \tag{5.113}$$

$$e_{u2} = -e_{u1}u_{s1}/u_{s2}, \tag{5.114}$$

que podem ser verificadas substituindo diretamente nas relações de ortonormalidade (5.95)-(5.96). Substituindo (5.111) e (5.112)

$$\mathbf{f}_u = \begin{pmatrix} -1,24879515 \\ -0,203606293 \end{pmatrix}, \tag{5.115}$$

A vizinhança do ponto fixo que ativa o controle é dada pelas condições (5.102), que fornecem

$$v^u_n = f_{u1}x_n + f_{u2}y_n, \tag{5.116}$$

$$\bar{v} = \delta a_{max} \left|(1 - \xi^{-1}_u) f_{u1}\right| \tag{5.117}$$

Portanto, se $|v_n^u| < \bar{v}$ aplicamos sobre o parâmetro a_0 a perturbação dada pela lei de controle (5.101)

$$\delta a_n = \frac{\xi_u}{\xi_u - 1} \frac{f_{u1} x_n + f_{u2} y_n}{f_{u1}} \tag{5.118}$$

sendo que, se $|v_n^u| > \bar{v}$ não é aplicado o controle. Escolhendo a perturbação máxima como $\delta a_{max} = 10^{-3}$ teremos $\bar{v} = 1,92748290 \times 10^{-3}$.

5.17 Problemas

1. No capítulo anterior exemplificamos vários conceitos com o mapa de Hénon $\mathbf{F}(x,y) = (a - x^2 + by, x)$. No entanto, no seu artigo original Hénon definiu o seguinte mapa: $\mathbf{H}(x,y) = (1 - ax^2 + y, bx)$, que é bastante parecido com o outro mapa, sendo ambos quadráticos em x e lineares em y. De fato, os dois mapas são semelhantes: temos que $\mathbf{F} \sim \mathbf{H}$ por meio de uma função linear vetorial $\mathbf{E}$ definida como

$$\mathbf{E}(\mathbf{v}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{5.119}$$

   tal que

$$\mathbf{E}(\mathbf{F}(\mathbf{v})) = \mathbf{H}(\mathbf{E}(\mathbf{v})) \tag{5.120}$$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{H}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}). \tag{5.121}$$

   (a) Ache os valores de α, β, γ e δ;

   (b) Obtenha os pontos fixos do mapa $\mathbf{H}$ e estude sua estabilidade;

   (c) Obtenha uma órbita de período 2 e estude sua estabilidade;

2. Considere o mapa de Hénon modificado $\mathbf{H}$ do problema anterior. Para $b = 0,3$ e a variável verifica-se uma cascata de bifurcações com duplicação de período que acumula-se em $a = 1,0580459$.

   (a) Desenhe o diagrama de bifurcações usando algum dos programas numéricos sugeridos no texto

   (b) Complete a tabela abaixo e estime a constante de Feigenbaum.

3. Faça um programa na linguagem de sua preferência ou use um software matemático para calcular os expoentes de Lyapunov usando o método de ortonormalização de Gram-Schmidt para os seguintes mapas bidimensionais:

   (a) Mapa "tinkerbell"

$$\mathbf{F}(x,y) = (x^2 - y^2 + 0,9x - 0,6013y, 2xy + 2x + 0,5y)$$

n	período = 2^n	a_n	$a_n - a_{n-1}$	$\frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{a_n-a_{n-1}}$
1		$-0,1225$	-	-
2		$0,3675$		-
3		$0,9125$		
4		$1,0260$		
5		$1,0510$		
6		$1,0565$		

(b) Mapa de Ikeda: seja $z = x + iy$ um número complexo.

$$\mathbf{F}(z) = 1 + 0,9z\exp\left[i\left(0,4 - \frac{6}{1+|z|^2}\right)\right]$$

(c) Mapa padrão de Chirikov-Taylor

$$\mathbf{F}(x,y) = ((x+y) \mod (2\pi), y + 1,08\sin(x+y))$$

4. Mostre que, no ponto $a = \frac{3}{4}(1-b)^2$ ocorre uma bifurcação de duplicação de período no mapa de Hénon. Para isso, resolva o sistema de equações

$$x = 1 - a(1 - ax^2 + y)^2 + bx, \quad y = b(1 - ax^2 + y)$$

que resulta numa equação do quarto grau. No entanto, lembre que duas das soluções para ela já são conhecidas, que são os pontos fixos $\mathbf{v}^*_{1,2}$, de modo que a equação pode ser fatorada e a solução recai numa equação quadrática. Finalmente, calcule os autovalores da matriz Jacobiana do mapa no ponto de bifurcação e mostre que um deles é igual a -1.

Capítulo 6

Fractais

Fractais são objetos geométricos que possuem propriedades peculiares: (i) auto-similaridade; (ii) dimensão fracionária. O termo fractal foi cunhado por Benoit Mandelbrot, na década de 1960 [50]. No entanto, vários matemáticos, desde o final do Século XIX, descreveram objetos que atualmente sabemos serem fractais. Os fractais têm uma geometria própria, não-Euclidiana, e podem ser obtidos a partir de modelos matemáticos. A geometria fractal é adequada para a descrição de muitos fenômenos naturais.

O termo auto-similaridade, ao pé da letra, significa "semelhante a si próprio", ou seja, ser parecido consigo mesmo em outras escalas. Fractais possuem, pois, as mesmas características, quando observados em diferentes escalas. Se tomarmos um pedaço do fractal e o ampliarmos, o resultado será semelhante ao fractal como um todo. Num fractal matemático esse processo de auto-similaridade estende-se indefinidamente. Na Natureza, no entanto, também podemos observar exemplos de auto-similaridade aproximada.

6.1 Dimensão de contagem de caixas

A chamada *dimensão de contagem de caixas* (proposta por Minkowski) é uma definição operacional de dimensão [51]. Nós recobrimos a figura da qual desejamos conhecer a dimensão com caixas idênticas de lado r. Chamaremos $N(r)$ ao número mínimo de caixas de lado r necessárias para recobrir completamente a figura [Fig. 6.1(a)].

Quanto menor o valor de r, maior será o número necessário de caixas $N(r)$, dado na forma de uma lei de potência

$$N(r) = r^{-d}, \tag{6.1}$$

onde o expoente d é a dimensão de contagem de caixas. Formalmente de-

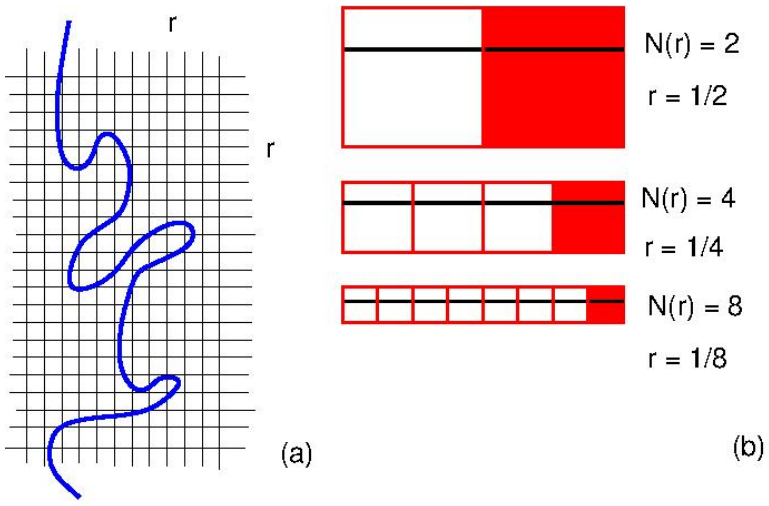

Figura 6.1: (a) Contagem de caixas; (b) Segmento unitário.

finimos essa dimensão no limite em que o tamanho da caixa r tende a zero:

$$d = \lim_{r\to 0} \frac{\ln N(r)}{\ln (1/r)} \tag{6.2}$$

Para motivar essa definição formal, vamos considerar inicialmente alguns exemplos símples, como um segmento de reta unitário. Precisaremos apenas de uma caixa, se o lado da caixa for igual a 1. Dividindo o tamanho da caixa pela metade $(r = 1/2)$, precisaremos de duas caixas $(N = 2)$. Analogamente, precisamos de 4 caixas de lado $1/4$, 8 caixas de lado $1/8$, etc.[Fig. 6.1(b)]. Em geral precisaremos de $N = 2^n$ caixas de lado $r_n = 1/2^n$, tal que o limite $r \to 0$ em (6.2) equivale a tomar $n \to \infty$:

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 2^n} = 1, \tag{6.3}$$

de acordo com nossa expectativa.

Tomando, agora, um quadrado unitário preenchido que, para ser recoberto necessita de uma caixa de lado 1, quatro de lado $1/2$, 16 de lado $1/4$, etc. [Fig. 6.2]. Na n-ésima etapa precisamos de $N = 2^{2n}$ caixas de lado $r_n = 1/2^n$, de modo que

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2^{2n}}{\ln 2^n} = 2. \tag{6.4}$$

Analogamente, um cubo preenchido tem dimensão 3.

Quando não for possível determinar, por indução finita, a relação entre $N(r_n)$ e r_n, nós usamos (6.2) para representar uma reta num gráfico cartesiano, onde no eixo das abscissas representamos $\ln(1/r)$, e no eixo das

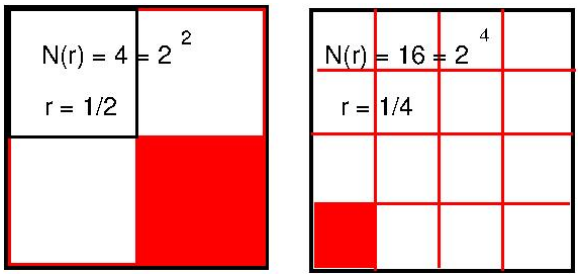

Figura 6.2: Quadrado unitário.

ordenadas, $\ln N(r)$. O coeficiente angular da reta ajustada aos dados será a dimensão de contagem de caixas.

6.2 Exemplos de fractais

Nesta seção nós iremos abordar alguns exemplos de objetos fractais que possuem auto-similaridade. Neste caso, é possível também usar a seguinte expressão para a dimensão de contagem de caixas

$$d = \frac{\ln(N_n/N_{n-1})}{\ln(r_{n-1}/r_n)}, \tag{6.5}$$

onde $n-1$ e n são duas etapas consecutivas na construção do fractal em análise.

6.2.1 Conjunto de Cantor

É um fractal criado por Georg Cantor em 1872. Como a maioria dos objetos fractais, ele é construido por etapas. Começamos com um intervalo unitário, que dividimos em três partes iguais. Subtraimos, então, o terço médio central do intervalo, ou seja, o segmento entre $1/3$ e $2/3$. Na etapa seguinte, subdividimos os segmentos restantes em três partes iguais, subtraimos o terço médio, e assim por diante. O conjunto de Cantor é o resultado de um número infinitamente grande destas operações [Fig. 6.3(a)].

Vamos aplicar o algoritmo de contagem de caixas ao conjunto de Cantor: na primeira etapa, precisamos de duas caixas de lado $1/3$, isto é, $N(1/3) = 2$. Na segunda etapa, precisamos de quatro $(= 2^2)$ caixas de lado $1/9$ $(= 3^{-2})$. Na terceira etapa, de oito $(= 2^3)$ caixas de lado $1/27$ $(= 3^{-3})$, e assim por diante. De modo geral, na n-ésima etapa, precisamos de $N_n = 2^n$ caixas de lado $r_n = 3^{-n}$ [Fig. 6.3(b)].

De (6.2), a dimensão de contagem de caixas do conjunto de Cantor é

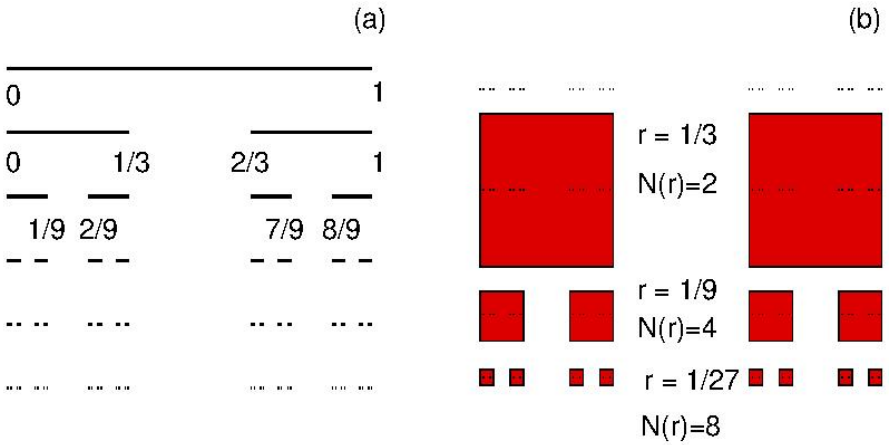

Figura 6.3: (a) Conjunto de Cantor; (b) Contagem de caixas para o conjunto de Cantor.

dada por

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,630929753 \tag{6.6}$$

que é um número fracionário $0 < d < 1$. Este resultado pode também ser obtido aplicando a fórmula (6.5), uma vez que é um objeto auto-similar.

Falando em termos informais, poderíamos dizer que o conjunto de Cantor é "mais"do que uma símples coleção de pontos (para os quais a dimensão seria nula), porém "menos"do que um segmento de reta. O conjunto de Cantor pode ser visto como uma "poeira estruturada"de pontos, e tem propriedades matemáticas não-triviais, como veremos na sequência.

6.2.2 Medida de Lebesgue

O conceito de medida de Lebesgue generaliza conceitos geométricos tradicionais como comprimentos, áreas e volumes. Um teorema fundamental da Topologia nos diz que todo conjunto aberto limitado S pode ser representado pela soma de um número finito (ou infinito contável) de intervalos abertos disjuntos, cujas extremidades não pertencem ao conjunto S [vide [51], Apêndice ao Cap. 2]. Simbolicamente

$$S = \sum_k (a_k, b_k)\,. \tag{6.7}$$

A medida de Lebesgue do conjunto aberto S é definida como

$$\mu(S) = \sum_k (b_k - a_k). \tag{6.8}$$

Já para conjuntos fechados há outro teorema, que afirma que um conjunto fechado não-vazio S' é ou um intervalo fechado ou então pode ser obtido de um intervalo fechado removendo um número finito (ou infinito contável) de intervalos abertos disjuntos cujas extremidades pertencem a S'. Assim,

$$S' = [a,b] - \sum_k (a_k, b_k)\,. \tag{6.9}$$

Neste caso a medida de Lebesgue do conjunto fechado S' é

$$\mu(S) = (b-a) - \sum_k (b_k - a_k). \tag{6.10}$$

Por exemplo, dentro do intervalo $[0,1]$ o conjunto dos números racionais é aberto e tem medida de Lebesgue nula, fato este ao qual já nos referimos no Capítulo 1. Já o conjunto dos números irracionais é fechado e tem medida de Lebesgue igual à do intervalo $[0,1]$.

O conjunto de Cantor, de forma mais geral, é todo conjunto fechado que consiste inteiramente de pontos de fronteira, cada um deles sendo o ponto-limite do conjunto [1]. O exemplo que vimos, aqui, é o chamado conjunto de Cantor do tipo terço-médio. Na n-ésima etapa da sua construção, o seu comprimento é $L_n = r_n N_n$. Logo, após infinitas etapas

$$L = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0, \tag{6.11}$$

já que $2/3 < 1$, tal que o conjunto de Cantor do tipo terço-médio tem medida de Lebesgue nula.

Como o conjunto de Cantor do tipo terço-médio $\mathcal{C}$ é obtido a partir do intervalo $[0,1]$ removendo um número infinito de intervalos abertos (como $(1/3, 2/3)$, as respectivas extremidades pertencem a $\mathcal{C}$. Mas, além desses pontos, que formam um conjunto infinito enumerável, pode-se mostrar que o conjunto de Cantor também contém um número infinito não-contável de pontos. Mesmo assim $\mathcal{C}$ não contém intervalo algum de comprimento não-nulo. Portanto $\mathcal{C}$ é um conjunto fechado e não-contável de pontos.

6.2.3 Triângulo de Sierpinski

É um objeto fractal no plano, idealizado por Waclaw Sierpinski em 1915. Assim como o conjunto de Cantor, ele é construido em etapas. Partimos de um triângulo equilátero preenchido de lado unitário, que dividimos em quatro triângulos idênticos, removendo o triângulo central. Repetimos estas operações nos triângulos preenchidos remanescentes, *ad infinitum* [Fig. 6.4].

[1] Um ponto P é um ponto-limite do conjunto S se toda a vizinhança de raio ε centrada em P contiver ao menos um ponto em S (que não seja o próprio ponto P)

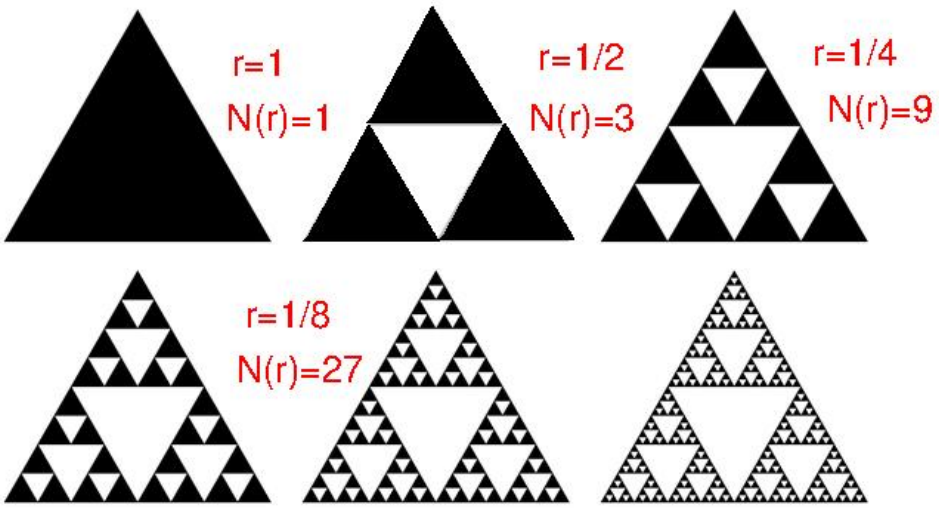

Figura 6.4: Construção da Junta de Sierpinski

Podemos recobrir o triângulo de Sierpinski com uma única caixa de lado 1,; ou três caixas de lado $r_1 = 1/2$ ($N(r_1) = 3$), nove caixas de lado $r_2 = 1/4$ ($N(r_2) = 9$), 27 caixas de lado $r_3 = 1/8$, e assim por diante. No n-ésimo passo, o tamanho da caixa é $r_n = (1/2)^n = 2^{-n}$, e necessitamos de $N(r_n) = 3^n$ caixas como essas. Usando (6.2) obtemos para a dimensão de contagem de caixas:

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 3^n}{\ln 2^n} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,584962501 \tag{6.12}$$

Na n-ésima etapa da construção do triângulo de Sierpinski temos $N(r_n)$ triângulos equiláteros de lado r_n. A área de cada um destes triângulos é $\sqrt{3}r^2/2$, de modo que a área da figura será

$$A_n = (\sqrt{3}/2)\, r_n^2 N(r_n). \tag{6.13}$$

Após um número infinito de etapas, a área tende a zero pois

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0. \tag{6.14}$$

6.2.4 Curva de Koch

É um objeto fractal no plano criado por Helge van Koch em 1904, e é construido por etapas, da seguinte maneira: partimos de um segmento unitário, dividido em três partes iguais. Sobre o terço médio subimos um triângulo equilátero e removemos a base. Repetimos o procedimento para cada lado

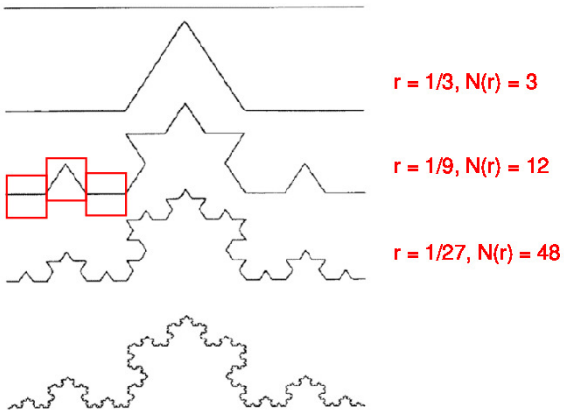

Figura 6.5: Curva de Koch

da figura resultante, e assim por diante num número infinitamente grande de vezes [Fig. 6.5].

Numa primeira etapa, recobrimos a curva de Koch com $N(r_1) = 3 = 3.1 = 3.4^0$ caixas de lado $r_1 = 1/3^1 = 3^{-1}$. Na segunda etapa, com $N(r_2) = 12 = 3.4 = 3.4^1$ caixas de lado $r_2 = 1/9 = 3^{-2}$. Depois, com $N(r_3) = 48 = 3.4^2$ caixas de lado $r_3 = 1/27 = 3^{-3}$, e assim por diante. De maneira geral, na n-ésima etapa teremos caixas de lado $r_n = 3^{-n}$, num número total de $N(r_n) = 3.4^{n-1}$.

Desta forma, a dimensão de contagem de caixas será

$$\begin{aligned} d &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 3.4^{n-1}}{\ln 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\ln 4 + \ln 3}{n \ln 3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln 4 - \ln 4 + \ln 3}{n\ln 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln 4}{n\ln 3} - \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln 4 + \ln 3}{n\ln 3} \\ &= \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,261859507 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Em cada passo da construção da curva de Koch, temos $N(r_n)$ segmentos de comprimento r_n cada, de modo que o comprimento total será o limite:

$$L = \lim_{n\to\infty} r_n N(r_n) = \lim_{n\to\infty} 3^{-n} 3.4^{n-1} = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty. \tag{6.16}$$

Efetuando o procedimento para construir a curva de Koch nos três lados de um triângulo equilátero, obtemos o *floco de neve* [Fig. 6.6]. Assim como a curva de Koch, o floco de neve também tem um comprimento infinito, a despeito de limitar uma área finita. Para determinar área delimitada pelo floco de neve, vamos supor que o triângulo equilátero inicial tenha área unitária, por simplicidade. A área delimitada pelo floco de neve, após

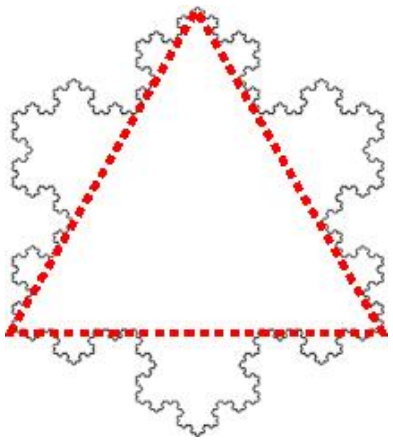

Figura 6.6: Floco de neve de Koch

um número infinitamente grande de etapas, será

$$A_\infty = 1 + 3\left(\frac{1}{9}\right) + 12\left(\frac{1}{9}\right)^2 + 48\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \ldots = 1 + A', \tag{6.17}$$

onde

$$A' = \frac{1}{3} + \left(\frac{4}{9}\right)\frac{1}{3} + \left(\frac{4}{9}\right)^2\frac{1}{3} + \ldots \tag{6.18}$$

é a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica de razão $4/9$ e primeiro termo $1/3$, que é

$$A' = \frac{1-(4/9)}{3} = \frac{3}{5}, \tag{6.19}$$

de modo que $A_\infty = 1 + (3/5) = 8/5$.

6.3 Conjuntos de Cantor na Dinâmica Não-Linear

6.3.1 Transiente caótico no mapa logístico

No Capítulo 3 vimos que o mapa logístico $f(x) = rx(1-x)$, para $r > 4$, tem órbitas que divergem para $x = -\infty$. Antes disso, porém, as órbitas têm um comportamento caótico (transiente caótico) com uma duração finita τ que depende sensivelmente da condição inicial x_0. O transiente caótico tem uma duração média que tende a infinito à medida em que $r \to 4^+$, que explicamos devido a uma crise de fronteira provocada pela colisão entre um ponto fixo instável e a órbita caótica em $r = 4$.

Mostraremos, agora, que o transiente caótico tem essas características devido à existência de um conjunto fractal do tipo Cantor no intervalo $[0,1]$.

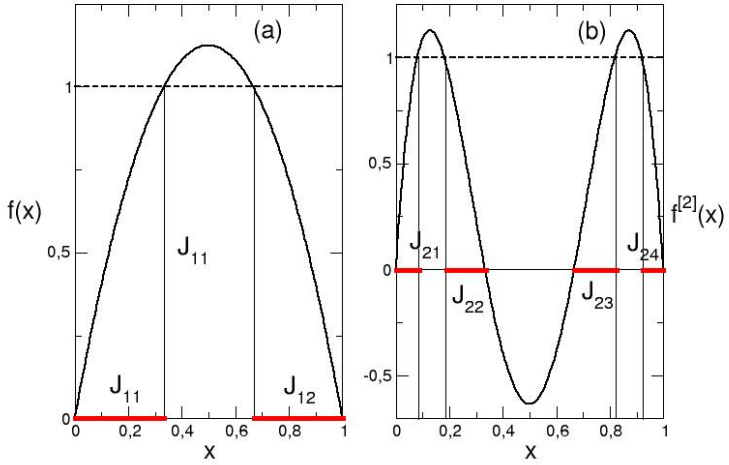

Figura 6.7: (a) Primeira e (b) segunda iteradas do mapa logístico para $r > 4$.

Os pontos desse conjunto não são mapeados para $x = -\infty$, mesmo quando $r > 4$. Como trata-se de um conjunto de medida nula, eles são "atípicos", no sentido de ser igual a zero a probabilidade de uma condição inicial escolhida ao acaso recair exatamente sobre eles. Não obstante, estes pontos atípicos influenciam a dinâmica dos demais pontos, fazendo com que estes tenham um comportamento caótico antes de divergirem a $x = -\infty$.

O gráfico da primeira iterada do mapa logístico, para $r > 4$ tem valores superiores acima de $r = 1$ num intervalo aberto de largura ε e centrado no ponto $x = 1/2$. Logo, se escolhermos uma condição inicial pertencente ao intervalo

$$\left(\frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2}\right)$$

ela será mapeada fora do intervalo $[0,1]$ (e rapidamente divergirá para $x = -\infty$) [Fig. 6.7(a)]. Portanto, os pontos que, em uma iteração do mapa, não escapam, serão aqueles pertencentes à união dos seguintes intervalos fechados

$$J_{11} : \left[0, \frac{1-\varepsilon}{2}\right], \qquad J_{12} : \left[\frac{1+\varepsilon}{2}, 1\right]. \tag{6.20}$$

De forma análoga, os conjuntos de pontos que são mapeados fora do intervalo $[0,1]$ em duas iterações do mapa logístico são obtidos a partir da segunda iterada do mapa, considerando os pontos para os quais $f^{[2]}(x) < 0$ e $f^{[2]}(x) > 1$ [Fig. 6.7(b)]. Os pontos que não escapam em duas iterações pertencem a um dos seguintes intervalos fechados: J_{21}, J_{22}, J_{23}, J_{24}.

Generalizando, o conjunto de pontos que não escapam em n iterações do mapa é a união de 2^n intervalos fechados, que denotamos por

$$K_n = J_{n1} \cup J_{n2} \cup \ldots \cup J_{n2^n} = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{nk}. \tag{6.21}$$

Adicionalmente, denotaremos por C a coleção de todos os pontos do intervalo $[0,1]$ que pertencem a cada conjunto K_n, com $n = 1,2,3,\ldots$. Então C será o conjunto dos pontos em $[0,1]$ para os quais todas as iteradas pertencem a $[0,1]$.

Podemos incluir em C todos os pontos fixos e órbitas periódicas de todos os períodos possíveis, que formam um conjunto infinito enumerável. Mas C contém muitos outros pontos. Por exemplo, para $r > 2+\sqrt{5} = 4,236068$ temos que $|f'(x)| > 1$ para todo $x \in J_{11} \cup J_{12}$. Pode-se mostrar, então, que existe uma constante $s > 1$ tal que os subintervalos J_{nk} têm comprimento menor que $1/s^n$ para todos os valores de n e k [19]. Logo, se $n \to \infty$ o comprimento dos subintervalos J_{nk} tende a zero. Então C tem um conjunto infinito não-contável de pontos. Usando, ainda, o mapa do deslocamento de Bernoulli pode-se mostrar também que existe uma órbita caótica densa em C, de modo que C exibe caos forte.

O conjunto C foi construído a partir de sequências de subintervalos fechados e disjuntos de $[0,1]$. Na verdade, C é um conjunto de Cantor, pois em cada etapa de sua construção (equivalendo a iterações do mapa logístico) removemos o intervalo de pontos que mapeia fora de $[0,1]$ e diverge para $x = -\infty$. Então podemos classificar C como um conjunto de Cantor invariante e não-atrativo imerso em $[0,1]$.

6.3.2 Conjunto de Cantor no atrator do mapa do padeiro

O mapa do padeiro é definido para pontos no quadrado unitário $\mathcal{D} : \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, e é linear por partes, como os mapas da tenda e de Bernoulli [51]:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_a \\ y/\alpha \end{pmatrix} \quad \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < \alpha \\ &= \begin{pmatrix} (1-\lambda_b) + \lambda_b x \\ (y-\alpha)/\beta \end{pmatrix} \quad \text{se } 0 \leq x \leq 1, \alpha < y \leq 1, \end{aligned} \tag{6.22}$$

onde

$$\beta = 1 - \alpha, \qquad \lambda_a + \lambda_b \leq 1 \tag{6.23}$$

A ação do mapa do padeiro sobre os pontos do quadrado unitário $\mathcal{D}$ pode ser visualizada na Fig. 6.8(a). A imagem direta $\mathbf{F}(\mathcal{D})$ é composta de dois retângulos de larguras λ_a e λ_b, situados à esquerda e à direita, respectivamente [Fig. 6.8(b)]. A segunda iterada $\mathbf{F}^{[2]}(\mathcal{D})$ consiste de quatro faixas verticais de larguras λ_a^2, λ_b^2, e $\lambda_a\lambda_b$ [Fig. 6.9(b)].

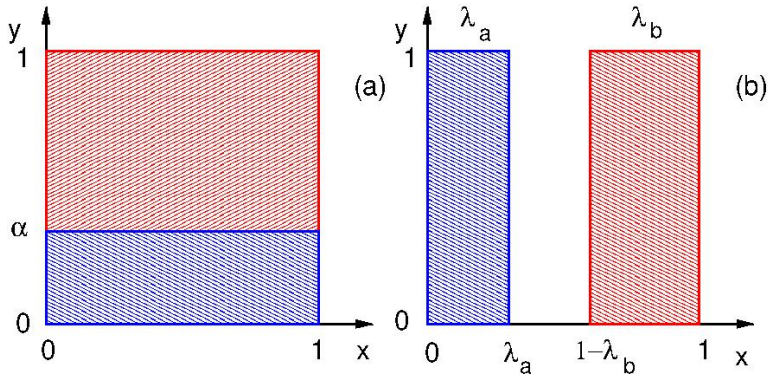

Figura 6.8: (a) Quadrado unitário e (b) primeira iterada do mapa do padeiro.

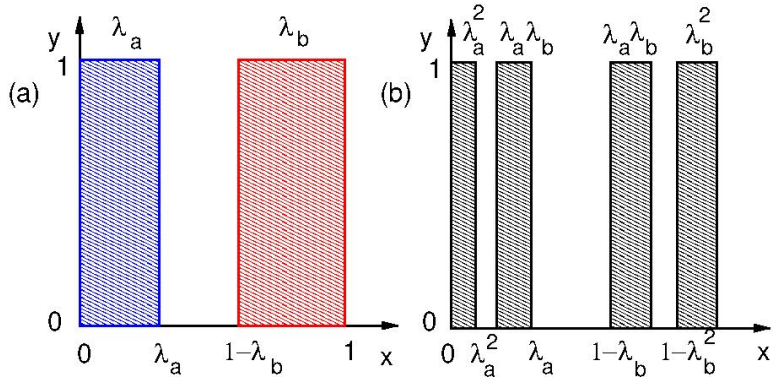

Figura 6.9: (a) Primeira e (b) segunda iteradas do mapa do padeiro.

Em geral, $\mathbf{F}^{[n]}(\mathcal{D})$ será constituída de 2^n faixas verticais de larguras $\lambda_a^m \lambda_b^{n-m}$, com $m = 0, 1, 2, \ldots n$. O número de faixas de largura $\lambda_a^m \lambda_b^{n-m}$ para um dado m fixo é dado pelo número de combinações de n elementos, tomados m a m, ou seja

$$Z(n,m) = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{6.24}$$

Chamamos A o conjunto de pontos que pertencem a $\mathbf{F}^{[n]}(\mathcal{D})$ para todo $n \geq 0$ (incluindo as fronteiras das faixas). Então A será o produto cartesiano do intervalo $[0,1]$ com um conjunto fractal do tipo Cantor, ou seja, fechado, totalmente desconexo e contendo um número infinito não-contável de pontos. O conjunto A é um atrator para o mapa do padeiro, e $\mathcal{D}$ é a sua bacia de atração, pois as iterações de qualquer ponto do quadrado unitário tendem para A.

A dimensão do atrator A é

$$d = 1 + \hat{d}, \tag{6.25}$$

onde $\hat{d}$ é a dimensão de contagem de caixas do conjunto de Cantor formado pela interseção das 2^n faixas verticais com uma reta horizontal $y = 0$. Se $\hat{N}(\varepsilon)$ é o número de caixas de lado ε necessárias para cobrir esse conjunto de Cantor, então

$$\hat{N}(\varepsilon) = k\varepsilon^{-\hat{d}}, \tag{6.26}$$

e que pode ser expresso como

$$\hat{N}(\varepsilon) = \hat{N}_a(\varepsilon) + \hat{N}_b(\varepsilon) \tag{6.27}$$

onde $\hat{N}_a(\varepsilon)$ é o número de caixas para recobrir a parte do atrator que fica no intervalo $[0, \lambda_a]$, e $\hat{N}_b(\varepsilon)$ é o número correspondente para o intervalo $[1 - \lambda_b, 1]$.

Para determinar $\hat{N}_{a,b}(\varepsilon)$ podemos usar a autosimilaridade do atrator: se tomarmos a faixa vertical no intervalo $[0, \lambda_a]$ no gráfico de $\mathbf{F}^{[2]}(\mathcal{D})$ e ampliarmos horizontalmente por um fator λ_a^{-1} obteremos o gráfico de $\mathbf{F}(\mathcal{D})$. Da mesma forma, ampliando a faixa vertical $[1 - \lambda_b, 1]$ no gráfico de $\mathbf{F}^{[2]}(\mathcal{D})$ por um fator λ_b^{-1} reproduziremos o gráfico de $\mathbf{F}(\mathcal{D})$. Traduzindo em termos algébricos temos as relações

$$\hat{N}_a(\varepsilon) = \hat{N}(\varepsilon/\lambda_a), \qquad \hat{N}_b(\varepsilon) = \hat{N}(\varepsilon/\lambda_b), \tag{6.28}$$

que, substitídas em (6.27), levam a

$$\hat{N}(\varepsilon) = \hat{N}(\varepsilon/\lambda_a) + \hat{N}(\varepsilon/\lambda_b). \tag{6.29}$$

Usando (6.26) e simplificando a expressão obtemos a equação transcendental

$$\lambda_a^{\hat{d}} + \lambda_b^{\hat{d}} = 1, \tag{6.30}$$

cuja solução fornece a dimensão do conjunto de Cantor. Como por hipótese $\lambda_a + \lambda_b < 1$ teremos $0 < \hat{d} < 1$.

Por exemplo, se $\lambda_a = \lambda_b = 1/3$, então a solução de (6.30) será

$$\hat{d} = \frac{\ln 2}{\ln 3}, \tag{6.31}$$

que é igual à dimensão do conjunto de Cantor do tipo terço-médio. Caso tivéssemos $\lambda_a + \lambda_b = 1$ então a única solução de (6.30) seria $\hat{d} = 1$ ou $d = 2$. Nesse caso, no entanto, como a área do quadrado unitário $\mathcal{D}$ seria preservada, o sistema seria conservativo e não haveria, de fato, um atrator.

Para mostrar que o mapa do padeiro é dissipativo, podemos calcular a área das faixas verticais. Como o número de faixas de largura $\lambda_a^m \lambda_b^{n-m}$ para um dado m é dado por (6.24), a área total das faixas de altura unitária é

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_m Z(n,m)\,\lambda_a^m \lambda_b^{n-m} \\ &= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!}\,\lambda_a^m \lambda_b^{n-m} = (\lambda_a + \lambda_b)^n, \end{aligned} \tag{6.32}$$

pela fórmula do binômio de Newton. Como $\lambda_a + \lambda_b < 1$ então $A_n \to 0$ quando $n \to \infty$, de sorte que o atrator é, realmente, um conjunto de área nula.

6.4 Atratores estranhos

Por definição, atratores estranhos são aqueles que têm dimensão fractal. Um exemplo é justamente o atrator do mapa do padeiro, cuja dimensão é $d = 1 + \hat{d}$, onde $0 < \hat{d} < 1$ é a solução de (6.30). Já os atratores caóticos são aqueles que exibem comportamento aperiódico e sensibilidade às condições iniciais, de maneira que o expoente de Lyapunov máximo seja positivo: $\lambda_1 > 0$, desde que $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, já que o sistema é supostamente dissipativo. Atratores caóticos são frequentemente estranhos (fractais), embora haja exceções em ambos os casos.

6.4.1 Atrator do mapa do padeiro

Vamos mostrar que o atrator do mapa do padeiro é caótico calculando explicitamente seus expoentes de Lyapunov. Como o mapa do padeiro é linear por partes, a sua matriz Jacobiana é imediatamente determinada a partir de (3.4):

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_x(y) & 0 \\ 0 & \lambda_y(y) \end{pmatrix}, \tag{6.33}$$

onde

$$\lambda_x(y) = \begin{cases} \lambda_a & y < \alpha \\ \lambda_b & y > \alpha \end{cases} \tag{6.34}$$

$$\lambda_y(y) = \begin{cases} \alpha^{-1} & y < \alpha \\ \beta^{-1} & y > \alpha \end{cases} \tag{6.35}$$

Vamos considerar uma órbita de duração N que visita n_1 vezes a região do quadrado unitário para a qual $0 < y_n < \alpha$ e n_2 vezes a região $\alpha < y_n < 1$, de forma que $N = n_1 + n_2$. Portanto o produto ordenado das N matrizes Jacobianas é dado por (5.42):

$$\mathbf{\Lambda}_N = \mathbf{J}(\mathbf{v}_{N-1}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{v}_{N-2}) \cdot \cdots \mathbf{J}(\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{v}_0) = \mathbf{J}^N, \tag{6.36}$$

onde

$$\mathbf{J}^N = \begin{pmatrix} \lambda_x^N(y) & 0 \\ 0 & \lambda_y^N(y) \end{pmatrix}, \tag{6.37}$$

sendo os autovalores da matriz produto $\mathbf{\Lambda}_N$ dados por

$$\lambda_x^N(y) = \lambda_a^{n_1}\lambda_b^{n_2}, \tag{6.38}$$
$$\lambda_y^N(y) = \alpha^{-n_1}\beta^{-n_2}. \tag{6.39}$$

Os expoentes de Lyapunov serão dados por (**??**)-(**??**) como

$$\lambda_2 = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln|\lambda_x^N(y)| = f_1\ln\lambda_a + f_2\ln\lambda_b, \tag{6.40}$$
$$\lambda_1 = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln|\lambda_y^N(y)| = f_1\ln(1/\alpha) + f_2\ln(1/\beta), \tag{6.41}$$

onde

$$f_1 = \lim_{N\to\infty}\frac{n_1}{N}, \qquad f_2 = \lim_{N\to\infty}\frac{n_2}{N}, \tag{6.42}$$

representam as frações da duração da trajetória para as quais ela visita as regiões $0 < y < \alpha$ e $\alpha < y < 1$, respectivamente [51].

No Cap. 3 vimos que tanto o mapa da tenda como o de Bernoulli tinham uma densidade de probabilidade uniforme. Assim, também, para o mapa do padeiro, supomos uma distribuição de probabilidade uniforme $\rho(y) = 1$ para $0 \le y \le 1$. Interpretando as frações (6.42) como as probabilidades da trajetória estar nas regiões $0 < y < \alpha$ e $\alpha < y < 1$, podemos obtê-las a partir de

$$f_1 = \int_0^\alpha \rho(y)dy = \alpha, \tag{6.43}$$
$$f_2 = \int_\alpha^1 \rho(y)dy = 1-\alpha = \beta, \tag{6.44}$$

de modo que (6.40)-(6.41) dão os seguintes expoentes de Lyapunov

$$\lambda_1 = \alpha\ln(1/\alpha) + \beta\ln(1/\beta), \tag{6.45}$$
$$\lambda_2 = \alpha\ln\lambda_a + \beta\ln\lambda_b, \tag{6.46}$$

Como $\beta = 1-\alpha$, com $0 < \alpha < 1$, decorre que $\lambda_1 > 0$. Além disso, da condição $\lambda_a + \lambda_b < 1$ teremos que $\lambda_2 < 0$. Se, por exemplo, $\alpha = \lambda_a = \lambda_b$, então $\lambda_1 = 0,6363$ e $\lambda_2 = -1,0984$.

6.4.2 Atrator caótico de Hénon

O atrator "clássico" de Hénon, para $a = 1,4$ e $b = 0,3$ [Fig. 6.10(a)] tem uma estrutura auto-similar, o que é sugerido pelas ampliações mostradas na Fig. 5.6(b)-(d), e é explicado pelo mecanismo de estica-e-dobra. Para verificar a

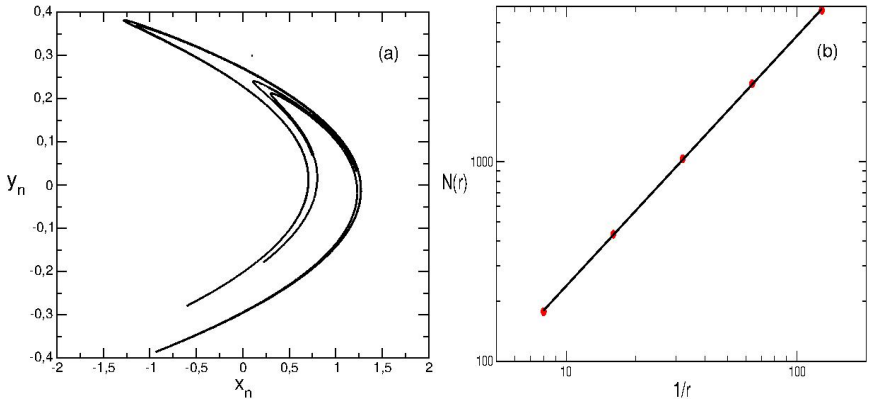

Figura 6.10: (a) Atrator caótico de Hénon, para $a = 1,4$ e $b = 0,3$. (b) Número de caixas de tamanho r necessárias para recobrir o atrator. A reta indica uma regressão linear.

fractalidade deste atrator podemos empregar o algoritmo de contagem de caixas, considerando uma malha quadrada de lado r superposta ao atrator, e contando o número de quadrados $N(r)$ necessários para recobrir completamente o atrator.

Com estes valores construímos um gráfico onde representamos $\ln N(r_n)$ versus $\ln(1/r_n)$ [Fig. 6.10(b)]. Ajustando, por regressão linear, uma reta pelos pontos do gráfico resulta uma dimensão $d \approx 1,256$, de forma que o atrator clássico de Hénon é caótico e fractal.

A estrutura auto-similar de bandas do atrator de Hénon sugere que a sua estrutura tem: (i) curvas suaves numa direção longitudinal (ao longo das bandas), com dimensão inteira $d_{\|} = 1$; (ii) um conjunto do tipo Cantor na direção transversal às bandas, com dimensão $d_{\perp}$. Como as duas direções são independentes, a dimensão de contagem de caixas pode ser escrita como $d = d_{\|} + d_{\perp}$, de modo que $d_{\perp} = 0,256$

6.5 Dimensão de Lyapunov

Para mapas bidimensionais dissipativos com um atrator caótico, e para o qual há dois expoentes de Lyapunov $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$, definimos a *dimensão de Lyapunov* para o respectivo atrator como:

$$d_L = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}. \tag{6.47}$$

No caso do atrator clássico de Hénon, visto na seção anterior, nós determinamos os expoentes de Lyapunov no Cap. 4, dados por (5.59)

$$\lambda_1 = 0,418, \qquad \lambda_2 = -1,622, \tag{6.48}$$

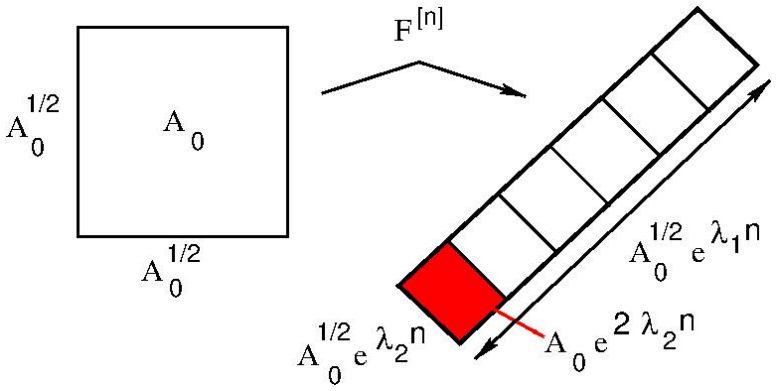

Figura 6.11: Atrator caótico de Hénon, para $a = 1,4$ e $b = 0,3$.

tal que a dimensão de Lyapunov seja $d_L = 1,258$, praticamente igual à dimensão de contagem de caixas $d = 1,256$. A igualdade $d = d_L$ é chamada *conjectura de Kaplan-Yorke* [52].

A conjectura de Kaplan-Yorke é verificada de para alguns mapas, porém não para outros, por motivos que discutiremos na sequência. No primeiro caso, é possível mostrar essa igualdade acompanhando a evolução de um quadrado de área A_0 (e lado $A_0^{1/2}$) após n iterações do mapa $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ [53].

Conforme esquematizado na Fig. 6.11 o quadrado é esticado ao longo de uma direção por um fator $e^{\lambda_1 n}$, com $\lambda_1 > 0$, e é contraído por um fator $e^{\lambda_2 n}$, com $\lambda_2 = -|\lambda_2| < 0$. Dessa forma o quadrado é transformado, após n iterações, num retângulo de lados $A_0^{1/2} e^{\lambda_1 n}$ e $A_0^{1/2} e^{\lambda_2 n}$, cuja área é

$$A_n = (A_0^{1/2} e^{\lambda_1 n})(A_0^{1/2} e^{\lambda_2 n}) = A_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2) n}.$$

Como $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, então $A_n \to 0$ quando $n \to \infty$, já que o mapa é dissipativo.

Para determinar a dimensão de contagem de caixas nós recobrimos o retângulo com $N(r)$ caixas de lado $r = A_0^{1/2} e^{\lambda_2 n}$ [Fig. 6.11]. Cada caixa tem área

$$A' = r^2 = A_0 e^{2\lambda_2 n},$$

de modo que o número de caixas é

$$N(r) = \frac{A_0}{A'} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2) n}.$$

Usando a definição de dimensão de contagem de caixas

$$d = \lim_{r \to 0} \frac{\ln N(r)}{\ln(1/r)} = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|} = d_L, \tag{6.49}$$

mostrando que, sob as condições presumidas nessa dedução, a conjectura de Kaplan-Yorke é válida.

Uma análise cuidadosa da situação mostra que a dimensão de Lyapunov deve ser igual a uma dimensão que leve em conta não só se há ou não pontos do atrator nas caixas mas também quantos pontos existem. Isto por que, em atratores de maneira geral, a densidade das iterações não é uniforme, variando de ponto a ponto. Em outras palavras, a distribuição de probabilidade varia ao longo do atrator, de modo que há regiões nele que são muito visitadas, e regiões que são pouco visitadas.

No cálculo da dimensão de contagem de caixas $d = d_0$, todas as caixas são tratadas de forma igualitária, não importa a frequência com que as caixas são visitadas. Esse efeito é captado pela chamada *dimensão de informação* d_1, que é igual à dimensão de contagem de caixas da parte mais visitada (por exemplo 90%) do atrator. Mostra-se que $d_1 \leq d_0$ [54, 55]. A forma modificada da conjectura de Kaplan-Yorke é $d_L = d_1$, de modo que a dimensão de Lyapunov deve ser igual ou ligeiramente menor do que a dimensão de contagem de caixas.

Para o mapa do padeiro, por exemplo, no caso $\alpha = \lambda_a = \lambda_b$ temos $\lambda_1 = 0,6363$ e $\lambda_2 = -1,0984$, donde a dimensão de Lyapunov $d_L = 1,58$. Para $\lambda_a = \lambda_b = 1/3$ vimos que a dimensão de contagem de caixas $d_0 = 1,63$, bem diferente de d_L, portanto. Uma análise mais profunda, no entanto, mostra que a dimensão de informação do atrator do padeiro é igual a d_L, confirmando a conjectura de Kaplan-Yorke modificada: $d_L = d_1$ (vide detalhes em [51], seção 3.5)

6.6 Fractais gordos

Vimos que o conjunto de Cantor do tipo terço-médio tem dimensão fracionária $d = \ln 2/\ln 3$ e medida de Lebesgue (comprimento total) nula. Por isso, às vezes eles são chamados *fractais magros*. No entanto, há fractais que possuem medida de Lebesgue finita, e por isso são chamados *fractais gordos*.

Um exemplo é o próprio conjunto de Cantor, desde que seja construído da seguinte forma: começamos do intervalo unitário, dividido em três terços, e subtraindo-se seu terço médio. Na etapa seguinte, removemos um intervalo de comprimento $1/9$ simetricamente no centro de cada um dos dois terços restantes. Depois removemos um intervalo de $1/27$ dos remanescentes, e assim por diante. Assim como no conjunto de Cantor do tipo terço-médio, o número de caixas necessárias para recobrir o conjunto na n-ésima etapa de sua construção é $N_n = 2^n$.

Já o tamanho de cada caixa obedece a uma lei de formação diferente. Partindo de $r_0 = 1$ temos

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) r_0,$$

na etapa seguinte

$$r_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{9}\right) r_1,$$

e, de modo geral, na n-ésima etapa

$$r_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) r_{n-1}. \tag{6.50}$$

Iterando a expressão acima n vezes obtemos

$$r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \prod_{j=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^j\right], \tag{6.51}$$

de modo que a medida de Lebesgue do conjunto em sua n-ésima etapa de construção é

$$L_n = N_n r_n = \prod_{j=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^j\right]. \tag{6.52}$$

No limite de infinitas etapas teremos a medida

$$L = \lim_{n\to\infty} L_n = \prod_{j=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^j\right]. \tag{6.53}$$

O produtório que aparece na expressão é finito. De fato, usando o símbolo-q de Pochhammer temos

$$L = (1/3)_\infty \approx 0,56,$$

mostrando que o conjunto de Cantor gordo tem medida de Lebesgue finita.

Como o conjunto é, ainda, auto-similar, podemos determinar a sua dimensão de contagem de caixas usando a fórmula (6.5), juntamente com (6.50):

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n/2^{n-1})}{\ln\left\{\frac{r_{n+1}}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) r_{n-1}}\right\}} = 1, \tag{6.54}$$

ou seja, a dimensão é inteira! Este resultado surpreendente sugere que um valor fracionário para a dimensão não caracteriza adequadamente fractais gordos.

6.6.1 Medida de grão grosso

Este problema foi tratado por Farmer em 1985, que introduziu a chamada medida *de grão grosso* $\mu(\ell)$ [31]. Supondo que, na obtenção do fractal, sejam removidos de $[0,1]$, intervalos abertos ("buracos") de comprimentos

arbitrários e diferentes. Seja $h(\ell)$ o comprimento total de todos os buracos de tamanho maior ou igual a ℓ. A medida de grão grosso é

$$\mu(\ell) = 1 - h(\ell). \tag{6.55}$$

Para objetos suaves (não-fractais) $\mu(\ell)$ atingirá seu valor limite $\mu(0)$ para algum valor de $\ell > 0$, tal qye $\mu(\ell) = \mu(0)$ para todo $\ell < \ell_0$, onde ℓ_0 é um valor fixo. Para fractais o valor $\mu(0)$ só é atingido no limite $\ell \to 0$. Em fractais magros $\mu(0) = 0$, enquanto para fractais gordos $\mu(0) > 0$.

A função $\mu(\ell)$ é um tipo de escada, onde $d\mu/d\ell = 0$ para todos os valores de ℓ, exceto aqueles iguais aos tamanhos dos buracos. No entanto, perto de $\ell = 0$ os degraus da escada são tão pequenos que é possível aproximar

$$\mu(\ell) \sim \mu(0) + A\ell^{\beta}, \tag{6.56}$$

onde $\beta \geq 0$ é denominado *expoente de magreza*. Para objetos não-fractais $\beta = \infty$. Fractais magros são tais que $\beta = D - d$, onde D é a dimensão do espaço de fase, e d é a dimensão de contagem de caixas. Já para fractais gordos β é independente de d.

Como um exemplo, vamos considerar o conjunto de Cantor gordo definido no início da seção. As medidas de grão-grosso são dadas por (**??**)-(**??**)

$$\mu(\ell_n) = L_n = \prod_{j=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^j \right], \tag{6.57}$$

$$\mu(0) = L = \prod_{j=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^j \right], \tag{6.58}$$

de modo que

$$\mu(\ell_n) - \mu(0) \propto 1 - \prod_{j=n+1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^j \right] \propto 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n, \tag{6.59}$$

desde que n seja suficientemente grande.

Fazendo uma estimativa crua do tamanho dos buracos como $\ell_n \sim 1/N_n$, onde $N_n = 2^n$ é o tamanho de caixas, teremos $\ell_n \sim (1/2)^n$, se n for também muito grande. Usando propriedades elementares de logaritmos, escrevemos (6.59) na forma da lei de escala (6.56)

$$\mu(\ell) - \mu(0) \sim \ell^{\beta}, \tag{6.60}$$

onde o expoente de magreza é

$$\beta = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,585. \tag{6.61}$$

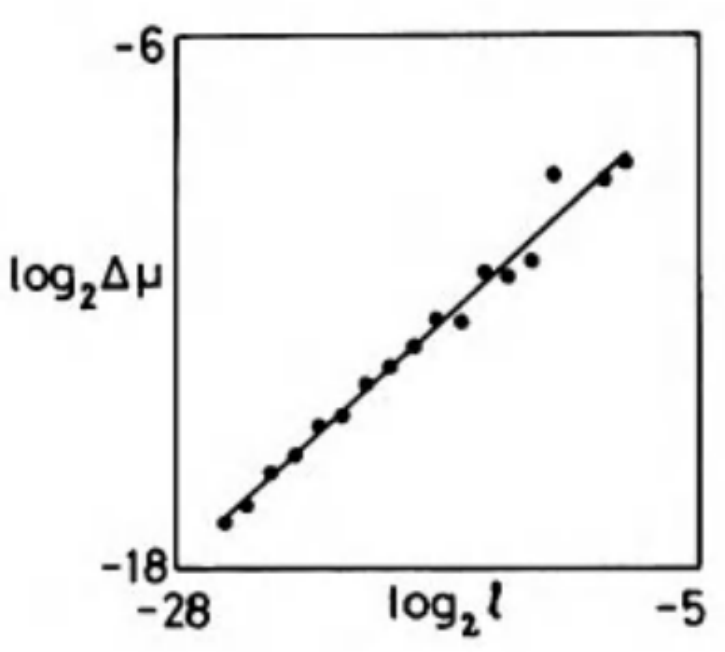

Figura 6.12: Medida de grão-grosso para os intervalos do parâmetro r associados a órbitas caóticas no mapa logístico, em função da resolução. Extraída da Ref. [31].

6.6.2 Intervalo de parâmetros caóticos no mapa logístico

Como aplicação da medida de grão-grosso, Farmer considerou a distribuição de janelas periódicas na região predominantemente caótica do mapa logístico, que começa em $r_\infty \approx 3,57$ e termina abruptamente na crise de fronteira em $r = 4$. Embora haja infinitas janelas periódicas neste intervalo, Jakobson mostrou que a medida de Lebesgue dos intervalos de r correspondendo a órbitas caóticas é positiva [30]. Com a medida de grão grosso é possível quantificar esta afirmação: $\mu(\ell)$ pode ser interpretado como o comprimento total de todos os intervalos do parâmetro r para os quais há caos.

Farmer determinou a medida de grão grosso $\mu(\ell)$ para diferentes valores do tamanho ℓ do intervalo correspondente às janelas periódicas dos mapas logístico $f_r(x) = rx(1-x)$ e senoidal $f_r(x) = r\sin(\pi x)$. O valor de $\mu(0)$ é obtido por extrapolação. Os resultados podem ser vistos na Figura 6.12, onde a diferença $\Delta\mu = \mu(\ell) - \mu(0)$ é registrada em função de ℓ. Como o gráfico está em escala log-log, os dados são ajustados por uma lei de potência na forma (6.60)

$$\mu(\ell) = \mu(0) + A\ell^{\beta}, \tag{6.62}$$

onde $\mu(0) = 0,8979$ para o mapa logístico e $\mu(0) = 0,8929$ para o mapa senoi-

dal. Em ambos os mapas o coeficiente angular é $\beta = 0,45 \pm 0,05$. Portanto o conjunto de valores de r que levam a caos é um fractal gordo.

O valor de $\mu(0)$ fornece a fração de valores de parâmetros caóticos para ambos os mapas. No mapa logístico, isso significa que cerca de 90% dos valores de r no intervalo $(r_\infty, 4]$ correspondem a caos. A probabilidade de que uma pequena alteração no valor de r provoque uma mudança qualitativa da dinâmica é proporcional à diferença $\mu(\ell) - \mu(0)$.

Devido à lei de escala (6.62), se temos um dado r para o qual a órbita é caótica, a probabilidade de encontrar uma janela periódica de largura ℓ é proporcional a ℓ^β. Estimando $\ell \sim 10^{-14}$ para cálculos em dupla precisão, e usando o valor encontrado ($\beta = 0,45$) para o expoente de magreza, a probabilidade é da ordem de 10^{-6}, ou seja, extremamente baixa. Concluimos, portanto, que podemos escolher valores de r ao acaso dentro do intervalo $(r_\infty, 4]$ (tendo o cuidado de excluir as maiores janelas, como a de período três), que quase certamente serão caóticas.

6.7 Bacias fractais de atração

A bacia de atração de um dado atrator é o conjunto de condições iniciais, no espaço de fase, que produzem órbitas que convergem ao atrator $\mathcal{A}$ quando o tempo vai a infinito. É frequente nos sistemas dinâmicos a existência de mais de um atrator (multiestabilidade), que pode ser tanto periódico como caótico, separados por uma fronteira de bacia.

6.7.1 Determinação numérica

Vamos supor que o mapa bidimensional $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ tenha dois atratores A e B, com as respectivas bacias de atração. Escolhemos uma determinada região do plano de fase: $x_1 \leq x \leq x_2$ e $y_1 \leq y \leq y_2$, e dividimos cada intervalo em N_x e N_y subintervalos, respectivamente. Isto equivale a construir uma malha cujas células são retângulos de lados $(x_2 - x_1)/N_x$ e $(y_2 - y_1)/N_y$.

No centro de cada célula nós posicionamos uma condição inicial $\mathbf{v}_0(i, j)$, onde $i = 1, 2, \ldots n_x$ e $j = 1, 2, \ldots n_y$. Começando por $\mathbf{v}_0(1, 1)$ iteramos o mapa $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{v}_n)$ um número suficientemente grande de vezes n_{max}. Se a órbita resultante converge para o atrator A em n_{max} iterações, nós pintamos a célula correspondente à condição inicial $\mathbf{v}_0(1, 1)$ de preto, por exemplo. Caso a órbita convirja para B, deixamos a célula em branco (ou usamos outra cor). Repetimos o procedimento para todas as demais $N_x N_y$ condições iniciais $\mathbf{v}_0(i, j)$.

Supondo que A e B sejam pontos assintoticamente estáveis, para determinar a convergência de uma dada órbita a estes atratores, é necessário determinar em cada iteração do mapa a distância da respectiva órbita a

cada atrator:

$$d_{An} = \left\{(x_n - x_A^*)^2 + (y_n - y_A^*)^2\right\}^{1/2}, \tag{6.63}$$

$$d_{Bn} = \left\{(x_n - x_B^*)^2 + (y_n - y_B^*)^2\right\}^{1/2}. \tag{6.64}$$

Estabelecemos um raio de convergência ε para cada atrator, de modo que a órbita converge para A se $d_{An} \leq \varepsilon$; caso contrário converge para B. A região pintada de preto é uma aproximação numérica da bacia de atração de A, enquanto a região que ficou em branco aproxima a bacia de B. Naturalmente quanto maiores forem N_x e N_y, melhor será a resolução das bacias. A fronteira de bacia é inferida pelo contraste entre as cores das bacias.

Como um exemplo ilustrativo desse método vamos considerar o mapa de Grebogi, onde $x \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ [56]

$$\theta_{n+1} = \theta_n + a\sin(2\theta_n) - b\sin(4\theta_n) - x_n\sin(\theta_n), \tag{6.65}$$

$$x_{n+1} = -J_0\cos(\theta_n). \tag{6.66}$$

onde a, b e J_0 são parâmetros. Os pontos fixos do mapa são

$$(\theta_A^* = 0, x_A^* = -J_0), \qquad (\theta_B^* = \pi, x_B^* = J_0). \tag{6.67}$$

A matriz Jacobiana do mapa é

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 + 2a\cos(2\theta_n) - 4b\cos(4\theta_n) - x_n\cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ J_0\sin(\theta_n) & 0 \end{pmatrix} \tag{6.68}$$

cujo determinante é $\jmath = J_0\sin^2(\theta_n)$. Como $\sin^2\theta \leq 1$ então o mapa de Grebogi será dissipativo se $|J_0| < 1$.

Os autovalores da matriz Jacobiana nos pontos fixos A e B serão, respectivamente, dados por

$$\xi_{A1} = 1 + 2a - 4b - J_0, \qquad \xi_{A2} = 0, \tag{6.69}$$

$$\xi_{B1} = 1 + 2a - 4b + J_0, \qquad \xi_{B2} = 0, \tag{6.70}$$

que são ambos reais. Nós escolheremos os valores de a, b e J_0 de modo que o mapa seja dissipativo e os pontos fixos A e B sejam ambos nós estáveis. Este é o caso, por exemplo, quando $a = 1,32$, $b = 0,9$ e $J_0 = 0,3$. Na Fig. 6.13 mostramos as bacias dos atratores A (em preto) e B (em branco), na seguinte região do plano de fase: $-0,5 \leq x \leq 0,5$ e $0 \leq \theta \leq \pi$.

Podemos observar que a estrutura das bacias é bastante complicada, pois há vários lugares onde há faixas pertencentes a ambas as bacias, e essas faixas aparentam ter uma estrutura auto-similar. De fato, como vamos ver na sequência, a fronteira de bacia é uma curva fractal neste caso.

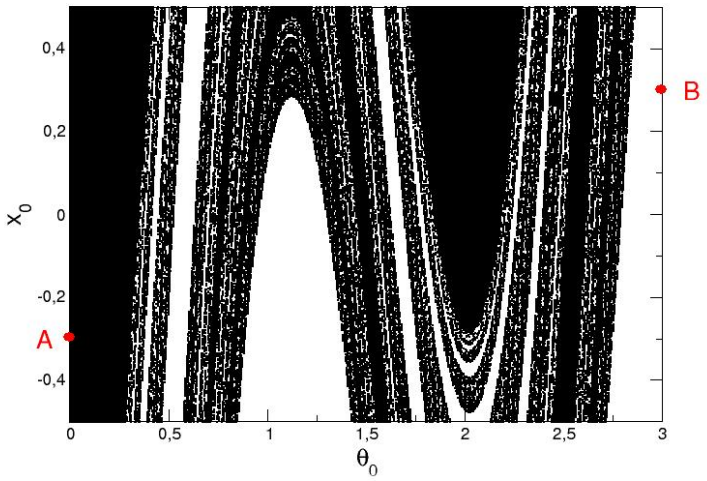

Figura 6.13: Bacias de atração do mapa de Grebogi para $a = 1,32$, $b = 0,9$ e $J_0 = 0,3$.

6.7.2 Dimensão de incerteza

A determinação de uma dada condição inicial $\mathbf{v}_0 = (x_0, y_0)$ no plano de fase é sempre eivada de alguma incerteza, seja numérica ou experimental. Podemos representar essa incerteza por um "círculo de incerteza" de raio ε centrado na condição inicial (x_0, y_0) [Fig. 6.14(a)].

Se o círculo de incerteza estiver totalmente no interior da bacia de um atrator, então a condição inicial é ε-certa, pois qualquer ponto do círculo irá convergir para o mesmo atrator. Já se o círculo de incerteza interceptar a fronteira de bacia, então a condição inicial é ε-incerta, pois há pontos do círculo que convergirão ao atrator A, e outros para B [Fig. 6.14(a)]. Definimos a fração incerta como o número de condições iniciais ε-incertas dividido pelo número total de condições iniciais.

Se a fronteira entre as bacias de A e B for uma curva suave, como esquematizado na Fig. 6.14(b), então as condições iniciais ε-incertas estarão dentro de uma faixa de largura 2ε em ambos os lados da fronteira. Assim a fração incerta é proporcional a ε. Portanto, para diminuir a fração incerta basta diminuir o raio de incerteza na mesma proporção.

No entanto, se a fronteira de bacia for fractal, então a fração incerta depende do raio de incerteza na forma de uma lei de potência

$$f(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha}, \tag{6.71}$$

onde α é chamado *expoente de incerteza*.

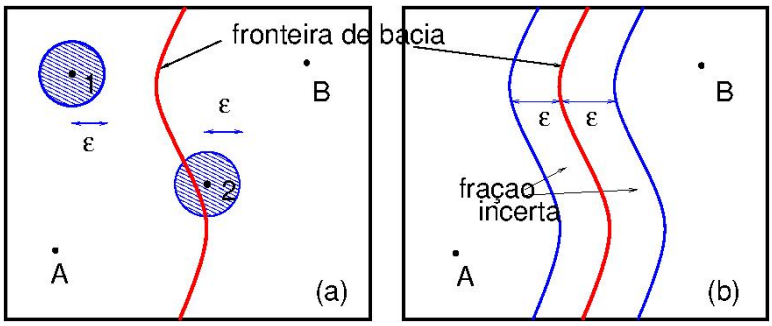

Figura 6.14: (a) Representação esquemática de uma região do plano de fase com as bacias de dois atratores; (b) Caso em que a fronteira de bacia é uma curva suave.

O expoente de incerteza pode ser usado para estimar a dimensão da fronteira de bacia. Seja D a dimensão do espaço de fase ($D = 2$ no caso de mapas bidimensionais). Pela definição de dimensão de contagem de caixas, o número de caixas de lado ε necessário para recobrir toda a região do espaço de fase contendo os atratores e suas bacias é $N_T \sim \varepsilon^{-D}$. Já para recobrir a fronteira de bacia, de dimensão d, precisaremos de $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-d}$ caixas de tamanho ε.

A fração incerta é

$$f(\varepsilon) = \frac{N(\varepsilon)}{N_T} \sim \varepsilon^{D-d}, \tag{6.72}$$

donde

$$\alpha = D - d. \tag{6.73}$$

Assim, se $\alpha = 1$ então $d = 2 - 1 = 1$, correspondendo a uma fronteira de bacia suave. Já se $0 < \alpha < 1$ então $1 < d < 2$, que caracteriza uma fronteira fractal de bacia.

Fronteiras fractais de bacia impõem obstáculos muito severos para a previsibilidade do estado final do sistema, especialmente se α for muito pequeno. Vamos supor, por exemplo, que a fronteira de bacia seja uma curva fractal com dimensão $d = 1,8$. Se diminuirmos o raio de incerteza pela metade, por exemplo, $\varepsilon \to \varepsilon' = \varepsilon/2$, a nova fração incerta será

$$f' \sim (\varepsilon')^{0,2} = (\varepsilon/2)^{0,2} \approx 0,870 f,$$

o que corresponde a uma diminuição de apenas

$$\frac{f - f'}{f} = \frac{f - 0,870f}{f} = 0,13 \times 100\% = 13\%,$$

ou seja, mesmo diminuindo a incerteza pela metade, a fração incerta diminuirá pouco mais de 10% apenas. Esse problema se agrava se $\alpha \approx 0$ pois,

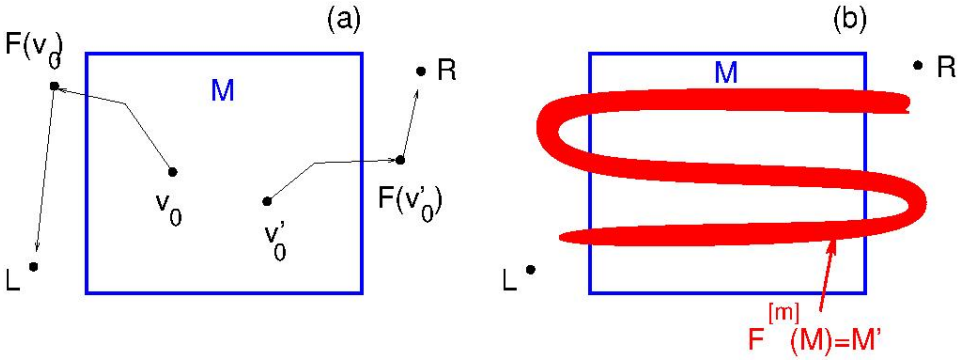

Figura 6.15: (a) Quadrado de condições iniciais e dois atratores. (b) Imagem do quadrado inicial após m iterações do mapa.

nesse caso, nenhuma diminuição da incerteza, por maior que seja, fará com que a fração incerta diminua. Nesse último caso as bacias são ditas *entremeadas*.

Um algoritmo bastante simples para a determinação do expoente de incerteza consiste em escolher aleatoriamente um grande número de condições iniciais $\mathbf{v}_0 = (x_0, y_0)$ na região de interesse do plano de fase. Para cada condição inicial nós perturbamos as respectivas coordenadas por uma dada incerteza ε, por exemplo

$$\mathbf{v}'_0 = (x_0 + \varepsilon, y_0), \qquad \mathbf{v}''_0 = (x_0 - \varepsilon, y_0).$$

Se as três condições iniciais, $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}'_0, \mathbf{v}''_0)$, convergirem para o mesmo atrator (A ou B), então $\mathbf{v}_0$ é ε-certa. Caso $\mathbf{v}'_0$ e/ou $\mathbf{v}''_0$ convirjam para um atrator diferente daquele associado a $\mathbf{v}_0$, esta condição inicial será ε-incerta.

Diminuimos a incerteza ε e repetimos todo o procedimento anterior. O expoente de incerteza será, conforme (6.71), o coeficiente angular da reta ajustada aos pontos de um gráfico de $\ln f$ versus $\ln\varepsilon$. A dimensão da fronteira de bacia será, então, $d = 2 - \alpha$. Aplicando esse algoritmo à estrutura de bacias mostradas na Fig. 6.13 para o mapa de Grebogi, obtemos $\alpha = 0,2$, correspondendo a uma dimensão $d = 1,8$ para a fronteira de bacia fractal.

6.7.3 Fronteiras de bacia fractais

O mecanismo por trás da geração de fronteiras de bacia fractais é semelhante àquele que produz a ferradura de Smale [57]. Vamos considerar dois atratores pontuais L e R, situados à esquerda e à direita, respectivamente, de um quadrado M de condições iniciais no plano de fase [Fig. 6.15(a)].

Toda órbita que provêm de uma condição inicial $\mathbf{v}_0$ em M, e que deixa M sendo mapeada à esquerda de M [como $\mathbf{F}(\mathbf{v}_0)$ na Fig. 6.15(a)] irá convergir

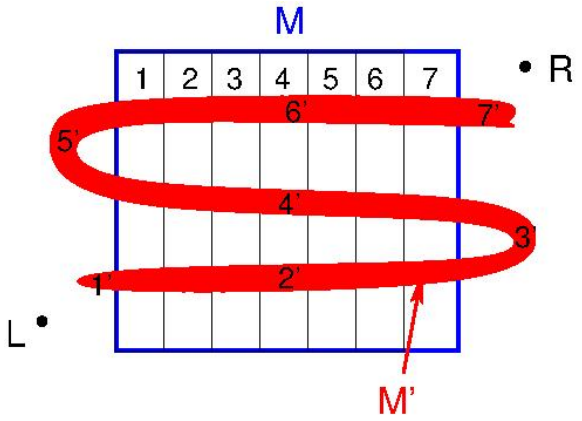

Figura 6.16: Imagem das sete faixas do quadrado inicial após m iterações do mapa.

para o atrator L, e por isso estará em sua bacia. Analogamente, toda órbita que provêm de $\mathbf{v}'_0$ que deixa M mapeada à sua direita [como $\mathbf{F}(\mathbf{v}'_0)$ na Fig. 6.15(a)] irá convergir para R.

Após m iterações do mapa, a imagem do retângulo $\mathbf{F}^{[m]}(M) = M'$ será uma ferradura dupla em forma de S [Fig. 6.15(b)]. Vamos considerar o quadrado M dividido em sete faixas verticais, e supomos que as faixas 1, 3, 5 e 7 deixem M após uma iteração do mapa. Essas faixas serão mapeadas, após m iterações, nas regiões $1'$, $3'$, $5'$ e $7'$ da ferradura dupla M' [Fig. 6.16].

De forma similar, supomos que as faixas 2, 4 e 6 permaneçam no quadrado M após uma iteração do mapa. Elas serão, assim, mapeadas nas regiões $2'$, $4'$ e $6'$ da ferradura dupla M'. Como as faixas 1 e 5 serão mapeadas à esquerda de M, elas pertencem à bacia de atração do ponto L, ao passo que as faixas 3 e 7, sendo mapeadas à direita de M, pertencerão à bacia do atrator R.

Após uma segunda iteração do mapa a dinâmica do tipo estica-e-dobra irá converter cada faixa vertical remanescente em M (2, 4 e 6) em sete faixas verticais mais estreitas. Quatro dessas faixas escaparão de M (duas pertencendo à bacia de L e duas à de R) e três permanecerão em M. Após um número infinitamente grande de iterações do mapa termos um conjunto de faixas verticais alternadas que pertencem às bacias de L e R, e que estão entremeadas em todas as escalas.

O conjunto de faixas verticais que permanece em M após infinitas iterações é um fractal de área (medida de Lebesgue) nula, e que coincide portanto com a fronteira fractal de bacia. Assim como na ferradura de Smale, o conjunto invariante das órbitas que não escapam de M é um conjunto do tipo Cantor. As órbitas que iniciam na fronteira de bacia permanecem nela para sempre, numa dinâmica similar à da ferradura de Smale. Concluimos que

a fronteira de bacia fractal é um conjunto invariante com uma dinâmica caótica.

6.8 Os conjuntos de Julia e Mandelbrot

Uma variável dinâmica complexa pode ser escrita na forma

$$z_n = x_n + iy_n \tag{6.74}$$

onde x_n e y_n são as partes real e imaginária, respectivamente, do ponto z_n no plano complexo, que será nosso espaço de fase bidimensional.

Um mapa complexo tem a forma geral

$$z_{n+1} = F(z_n), \tag{6.75}$$

onde F é uma função complexa que pode ser escrita na forma

$$F(z_n) = f(x_n, y_n) + ig(x_n, y_n), \tag{6.76}$$

onde f e g são funções reais de seus argumentos. Dessa forma o mapa complexo (6.75) pode ser expresso como um mapa bidimensional real:

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n), \tag{6.77}$$
$$y_{n+1} = g(x_n, y_n). \tag{6.78}$$

6.8.1 O conjunto de Julia

O mapa quadrático complexo é definido por

$$z_{n+1} = F_c(z_n) = z_n^2 + C, \tag{6.79}$$

onde C é uma constante complexa na forma

$$C = a + ib, \tag{6.80}$$

sendo a e b constantes reais.

Substituindo (6.74) em (6.79) e igualando as partes real e imaginária dos dois membros resulta o seguinte mapa bidimensional real

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a, \tag{6.81}$$
$$y_{n+1} = 2x_n y_n + b. \tag{6.82}$$

O mapa quadrático complexo é um exemplo de uma classe mais geral de mapas polinomiais complexos, que tem as seguintes propriedades:

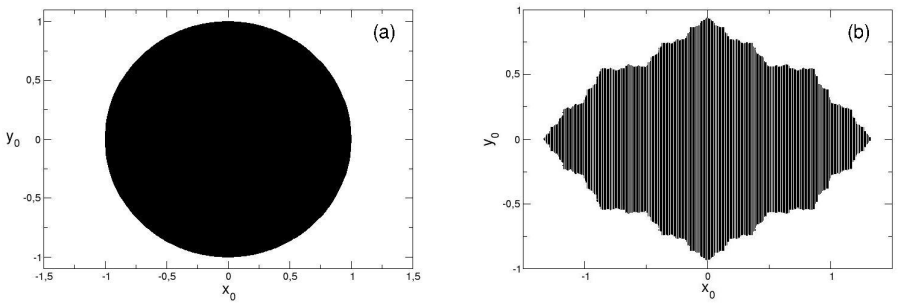

Figura 6.17: Conjuntos de Julia preenchidos para (a) $C = 0$, (b) $C = -4/9$.

1. uma órbita $\{z_0, z_1, z_2, \ldots\}$ é limitada se todos os seus pontos estiverem contidos no interior de um disco de raio R centrado na origem do plano complexo, ou seja, se existe um $R > 0$ tal que $|z_n| \leq R$ para todos os tempos $n = 0, 1, 2, \ldots$;

2. uma órbita escapa para o infinito se $|z_n| \to \infty$ se $n \to \infty$

O chamado *conjunto de Julia preenchido* para o mapa F é o conjunto de condições iniciais no plano complexo tais que a órbita gerada por elas é limitada. A bacia do infinito é o conjunto de condições iniciais que escapam para o infinito. O conjunto de Julia preenchido e a bacia do infinito são, portanto, complementares. A fronteira do conjunto de Julia preenchido é frequentemente denominada conjunto de Julia.

Para o mapa quadrático complexo (6.79) $F_c(Z) = z^2 + C$ o conjunto de Julia preenchido, denotado J_c, é o conjunto de condições iniciais que não escapam para o infinito quando $n \to \infty$. Teremos, assim, um conjunto de Julia diferente para cada valor da constante complexa C.

Vamos considerar inicialmente o caso $C = 0$, para o qual o mapa é

$$z_{n+1} = F_0(z_n) = z_n^2. \tag{6.83}$$

Escrevendo o número complexo na forma polar $z = re^{i\theta}$ teremos

$$F_0(z) = z^2 = r^2 e^{2i\theta}, \ldots F_0^{[n]}(z) = r^{2n} e^{2ni\theta}$$

Supondo que a condição inicial esteja no círculo unitário $r_0 = 1$ então $z_n = \exp(2ni\theta_0)$ de forma que todos os pontos da órbita permanecem sobre o círculo unitário $|z| = 1$.

Se $r_0 = |z_0| < 1$, então $r_0^n \to 0$ quando $n \to \infty$, donde os pontos da órbita z_n tendem para a origem, que é um ponto fixo atrativo de $F_0(z)$. Se $r_0 > 1$, então $r_0^n \to \infty$ quando $n \to \infty$, e a órbita escapa para o infinito. Concluimos

que o conjunto de Julia preenchido para $C = 0$ é o disco unitário fechado $|z| \leq 1$, e a bacia do infinito é o seu complemento [Fig. 6.17(a)]. A fronteira do conjunto de Julia é o círculo unitário, que é invariante sob a dinâmica.

Para $C \neq 0$ os pontos fixos do mapa (6.79) são dados por

$$z^*_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4C}\right). \tag{6.84}$$

Em analogia a mapas unidimensionais, o ponto fixo z^* è

1. atrativo (assintoticamente estável) se $|F'_c(z^*)| < 1$;
2. repulsivo (instável) se $|F'_c(z^*)| > 1$;
3. marginalmente estável se $|F'_c(z^*)| = 1$.

Para o mapa (6.79) temos que $F'_c(z) = 2z$, de modo que

$$F'_c(z^*_{1,2}) = 1 \pm \sqrt{1-4c} = 1 \pm w,$$

onde $w \equiv \sqrt{1-4C}$. Então das duas uma: w ou $-w$ estarão no semiplano real negativo, de modo que $|1-w| > 1$ ou $|1+w| > 1$, donde $|F'_c(z^*_1)| > 1$ ou $|F'_c(z^*_2)| > 1$. Portanto ao menos um dos pontos fixos de $F_c(z)$ será repulsivo. Na verdade pode-se mostrar que $F_c(z)$ tem um número infinito de órbitas periódicas instáveis [19].

A obtenção do conjunto de Julia preenchido J_c deve ser feita numericamente. O procedimento computacional é análogo ao feito para a determinação das bacias de atração no plano de fase: escolhemos um valor de C e uma dada região do plano complexo. Dividimos essa região numa malha de células e usamos cada célula como condição inicial do mapa quadrático complexo na forma (6.81)-(6.82).

A órbita gerada pela condição inicial é monitorada até que o módulo do número complexo $\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ seja maior que um valor especificado $d_{max} \sim 100$. Nesse caso dizemos que a órbita escapou para o infinito e a condição inicial é pintada de branco. Caso a órbita não escape então nós pintamos a respectiva condição inicial de preto. Os pontos em preto formam uma aproximação numérica do conjunto de Julia preenchido para o valor escolhido para C.

6.8.2 Exemplos de conjuntos de Julia

Escolhendo $C = -4/9$ os pontos fixos (6.84) são $z^*_1 = 4/3$ (repulsivo) e $z^*_2 = -1/3$ (atrativo). Na Fig. 6.17(b) mostramos o conjunto de Julia preenchido para este valor de C. As condições iniciais dentro do conjunto convergem para o ponto fixo atrativo $-1/3$, ao passo que aquelas fora de J_c escapam para o infinito. Podemos observar, nesse e nos demais casos que os conjuntos de Julia tem a seguinte simetria em torno da origem: $x \to -x$ e $y \to -y$.

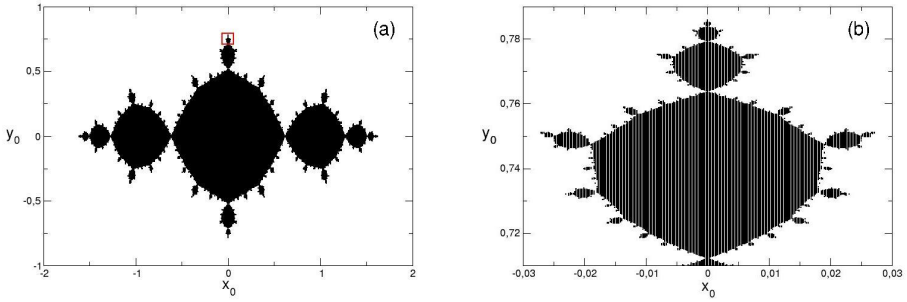

Figura 6.18: (a) Conjunto de Julia preenchido para $C = -1$, (b) Ampliação de uma pequena região de (a).

A fronteira do conjunto de Julia é uma curva auto-similar semelhante ao floco de neve, também chamada de quase-círculo. Se a condição inicial for colocada exatamente sobre a fronteira do conjunto de Julia preenchido, as iterações subsequentes permanecerão sobre ela.

Para o caso $C = -1$ os pontos fixos são os números áureos $z^*_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$, que são ambos repulsivos. Mas o mapa $F_c(z) = z^2 - 1$ tem uma órbita de periódo 2 composta pelos pontos $z^*_0 = 0$ e $z^*_1 = -1$, já que

$$F_c(0) = -1, \qquad F_c(-1) = 0.$$

Calculando o fator de estabilidade

$$\Lambda_2 = F'_c(z^*_0)F'_c(z^*_1) = 4z^*_0 z^*_1 = 0$$

conclui-se a órbita é atrativa (é, de fato, superestável).

O conjunto de Julia preenchido para $C = -1$ está mostrado na Fig. 6.18(a). As condições iniciais em seu interior são atraídas para o 2-ciclo, e os pontos da fronteira nela permanecem. O conjunto de Julia é auto-similar, como pode ser verificado pela ampliação de uma pequena parte dele, mostrada na Fig. 6.18(b).

Para $C = -0,123 + 0,754i$ o mapa $F_c(z)$ tem uma órbita atrativa de período 3. Os pontos do conjunto de Julia preenchido, mostrado na Fig. 6.19(a) são as condições iniciais que convergem a esse ciclo. O conjunto J_c é apelidado de "coelho de Douady" e sua auto-similaridade é ilustrada pela ampliação na Fig. 6.19(b).

O caso $C = -2$ é interessante pois a função $F_c(z)$ não tem, nesse caso, pontos fixos ou órbitas periódicas atrativas. Quase todas as condições iniciais no plano complexos escapam para o infinito. Na verdade os pontos fixos $z^*_1 = -1$ e $z^*_2 = 2$, embora sejam repulsivos, não escapam eles próprios para

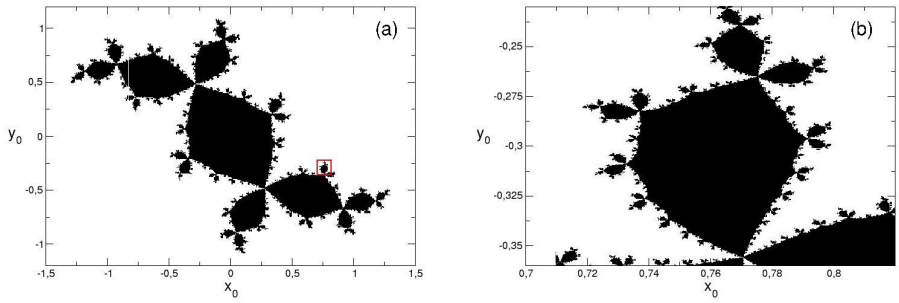

Figura 6.19: (a) Conjunto de Julia preenchido para $C = -0,123 + 0,754i$, (b) Ampliação de uma pequena região de (a).

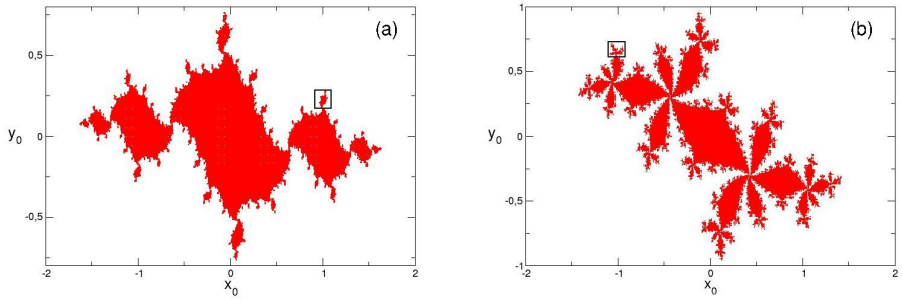

Figura 6.20: Conjuntos de Julia preenchidos para (a) $C = -1,037 + 0,17i$, (b) $C = -0,52 + 0,57i$

o infinito, então pertencerão ao conjunto de Julia correspondente. Como o mapa tem, além destes pontos fixos, órbitas periódicas repulsivas de todos os períodos, todos eles pertencerão a J_c, que é o intervalo $\{-2 \leq x \leq 2, y = 0\}$, pois esse intervalo é mapeado nele próprio por J_c.

6.8.3 Conjuntos de Julia conexos e desconexos

Seja J_c um conjunto de Julia preenchido para um dado valor da constante C. Uma curva fechada $\mathcal{C}$ é denominada uma *curva separatriz* para J_c se

1. $\mathcal{C}$ não intercepta J_c,
2. ao menos um ponto de J_c está no interior de $\mathcal{C}$,
3. ao menos um ponto de J_c está no exterior de $\mathcal{C}$.

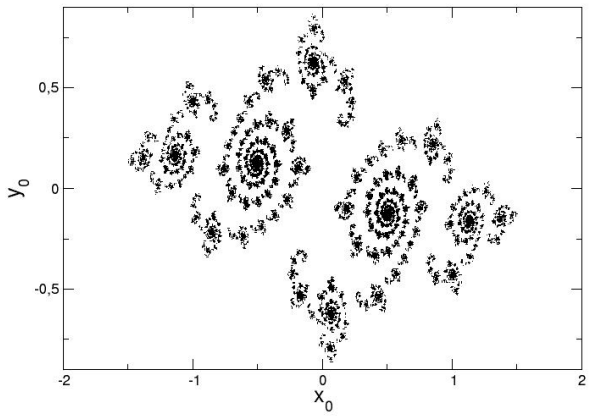

Figura 6.21: Conjunto de Julia preenchido para $C = -0,75 + 0,25i$.

Um conjunto de Julia preenchido é dito *conexo* se ele não tem curvas separatrizes. Exemplos de conjuntos de Julia conexos são mostrados na Fig. 6.20.

Um conjunto de Julia é desconexo se ele tem ao menos uma curva separatriz. Qualquer conjunto de Julia desconexo deve ter ao menos duas partes, uma no interior e outra no exterior da separatriz. No caso limite, um conjunto de Julia preenchido é totalmente desconexo se, para qualquer par de pontos distintos p e q pertencentes a J_c existe uma curva separatriz que tenha p no seu interior e q no seu exterior. Um exemplo de conjunto de Julia totalmente desconexo é apresentado na Fig. 6.21. Os conjuntos de Julia totalmente desconexos também são conhecidos como "poeira de Fatou".

Para um mapa complexo geral da forma $F_c(z)$ um ponto crítico é tal que $F'_c(z) = 0$. Para o mapa quadrático complexo o ponto crítico é $z = 0$. Os pontos críticos são importantes para sabermos se um dado conjunto de Julia é conexo ou não. O *teorema da dicotomia* nos diz que o conjunto de Julia preenchido é conexo ou totalmente desconexo [58, 59]. Para saber qual dos casos ocorre para um dado valor de C nós calculamos a órbita cuja condição inicial é o ponto crítico $z_0 = 0$. Se a órbita gerada por $z_0 = 0$ for limitada, o conjunto de Julia correspondente será conexo. Caso a órbita gerada por $z_0 = 0$ escape para o infinito, o conjunto de Julia será totalmente desconexo.

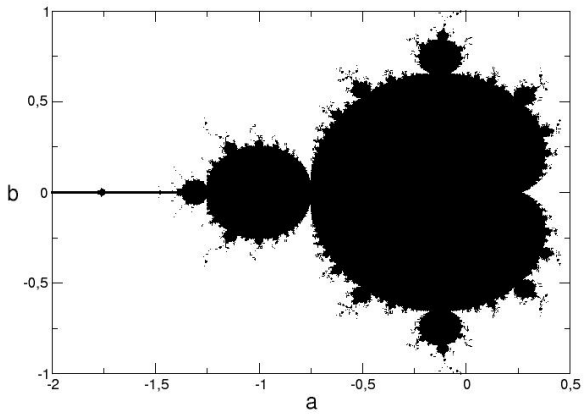

Figura 6.22: Conjunto de Mandelbrot.

6.8.4 O conjunto de Mandelbrot

O conjunto de Julia pode ser encarado como um tipo de bacia de atração no espaço de fase. Já o conjunto de Mandelbrot é definido no chamado espaço de parâmetros [50]. O espaço de parâmetros para o mapa quadrático complexo $F_c(z) = z^2 + C$ é o plano complexo a versus b. O conjunto de Mandelbrot M è o conjunto de valores de a e b para os quais a órbita gerada pela condição inicial $z_0 = 0$ é limitada, ou seja, não escapa para infinito. Logo, os pontos do conjunto de Mandelbrot M correspondem aos valores da constante C para os quais a órbita gerada por $z_0 = 0$ é limitada. Pelo teorema da dicotomia, os conjuntos de Julia preenchidos serão conexos para tais valores de $C \in M$.

Para obter numericamente o conjunto de Mandelbrot nós procedemos de forma análoga ao conjunto de Julia preenchido, mas considerando uma malha de pontos sobre o plano de parâmetros $a \times b$. Para cada valor dos parâmetros nós computamos a órbita com a condição inicial $z_0 = 0$, e acompanhamos o módulo de z_n. Caso este último não exceda um valor pré-especificado consideramos que a órbita é limitada e, portanto, pintamos o ponto correspondente a (a, b) de preto. O resultado, mostrado na Fig. 6.22, é uma figura bastante interessante.

O conjunto de Mandelbrot tem uma cardióide central, cujos pontos são tais que o conjunto de Julia J_c tem um ponto fixo atrativo. Os dois exemplos mostrados na Fig. 6.17 pertencem a essa categoria. A cardióide central de M tem "bulbos" que "brotam" da sua periferia. Esses bulbos representam valores de C para os quais $F_c(z)$ tem órbitas atrativas de períodos 1, 2, 3, etc.

associados a conjuntos de Julia conexos.

O maior destes bulbos é o disco à esquerda da cardióide central, associados a órbitas de período 2 atrativas. O conjunto de Julia preenchido da Fig. 6.18 é um exemplo. Os dois bulbos no topo e na base do conjunto de Mandelbrot estão associados a órbitas de período 3 atrativas, sendo o respectivo conjunto de Julia exemplificado pelo coelho de Douady da Fig. 6.19.

Ao contrário do conjunto de Julia preenchido, que é auto-similar, o conjunto de Mandelbrot não é auto-similar. Não obstante, suas ampliações sucessivas levam a figuras de grande beleza estética, e já fazem parte da cultura popular dos nossos tempos [60].

6.9 Problemas

1. Determine a dimensão de contagem de caixas dos seguintes objetos:

   (a) um triângulo retângulo isósceles de lados 1, 1 e $\sqrt{2}$.

   (b) um espaguete de Cantor, que é o produto cartesiano de um segmento de reta unitário e um conjunto de Cantor do tipo terço-médio.

   (c) a poeira de Cantor, que é o produto cartesiano de dois conjuntos de Cantor do tipo terço-médio.

   (d) o tapete de Sierpinski, que começa de um quadrado unitário, dividido em 9 quadrados de mesma área, e removendo o quadrado central em cada etapa. Qual é a área do tapete após infinitas etapas?

   (e) a esponja de Menger, que começa com um cubo de aresta unitária, dividido em 27 cubos de igual volume, e removendo o cubo central em cada etapa. Qual é a área e o volume da esponja após infinitas etapas?

2. Considere uma linha costeira bastante recortada, como a da Grã-Bretanha por exemplo. Mostre que o perímetro L da linha costeira depende da escala r utilizada para determiná-la a partir de uma poligonal, na forma de uma lei de potência

   $$L \sim r^{1-d},$$

   onde d é a dimensão de contagem de caixas da linha costeira. O mesmo raciocínio vale para fronteiras terrestres: a fronteira entre Portugal e Espanha mede 987 km na Espanha e 1214 km em Portugal. Quem está certo e porquê?

3. Considere o mapa de Hénon para $a = 1,4$ e $b = 0,3$, que tem um atrator caótico, e outro atrator no infinito. Faça um programa de computador ou use um software matemático para determinar as bacias de atração. Use o método do expoente de incerteza para determinar a dimensão fractal da fronteira de bacia nesse caso.

4. Faça um programa de computador ou use um software matemático para determinar os conjuntos de Julia preenchidos para os seguintes valores da constante complexa C: (a) $-4/9$; (b) -1; (c) $-0,123+0,754i$; (d) $-1,037+0,17i$; (e) $-0,52+0,57i$; (f) $-0,75+0,25i$.

5. Faça um programa de computador ou use um software matemático para determinar os conjuntos de Mandelbrot.

Capítulo 7

Fluxos unidimensionais

Há diversas classes de sistemas dinâmicos, ou seja, de equações determinísticas que prevêem o estado futuro do sistema, dado o estado presente. As duas classes mais comuns são os mapas, onde o tempo é uma variável discreta, assumindo valores inteiros positivos e negativos, e as equações diferenciais ordinárias, onde o tempo é contínuo. Nos capítulos anteriores estudamos em detalhes os mapas uni e bidimensionais e algumas de suas propriedades, incluindo o comportamento caótico. Agora vamos passar ao estudo de equações diferenciais, que também são conhecidas por fluxos, devido à descrição que podemos fazer das soluções. Como no caso discreto, iniciaremos nossa apresentação pelo caso unidimensional, passando pelo bidimensional e concluindo no tridimensional.

7.1 Fluxos unidimensionais

São sistemas dinâmicos descritos por uma variável dinâmica x dependente do tempo t, que é uma variável contínua ($-\infty < t < \infty$). A evolução temporal desta variável será governada por uma equação diferencial cuja forma geral é

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x), \tag{7.1}$$

onde $f(x)$ é uma função arbitrária.

Aplicando separação de variáveis na equação (7.1) obtemos a quadratura

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{f(x')} = \int_0^t dt = t \tag{7.2}$$

onde consideramos uma condição inicial $x_0 = x(t=0)$. Esta integral pode ser resolvida analiticamente em determinados casos ou numericamente de forma geral. Como resultado, podemos conhecer a solução da equação diferencial (7.1), expressa na forma $x = x(t, x_0)$. Veremos, na sequência, que para cada condição inicial x_0 haverá uma e somente uma solução $x = x(t, x_0)$.

Assim, em havendo infinitas condições iniciais possíveis, existirão infinitas soluções. O conjunto destas soluções pode ser encarado como um fluxo unidimensional ao longo do eixo x. Por extensão, a própria equação (7.1) será denominada um fluxo unidimensional.

Assim como fizemos com mapas, começamos estudando o caso de fluxos lineares, para os quais

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta, \tag{7.3}$$

onde α e β são constantes. Considerando a condição inicial $x(t=0) = x_0$ integramos a equação acima

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\alpha x + \beta} = \int_0^t dt = t,$$

de modo a obter a seguinte solução

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha}, \tag{7.4}$$

desde que $\alpha \neq 0$. O comportamento dessa solução depende do sinal do parâmetro α: se $\alpha < 0$ então $x(t)$ converge com o tempo para o valor $-(\beta/\alpha)$. Já se $\alpha > 0$ $x(t)$ é uma função monotonicamente crescente do tempo, e vai a infinito quando $t \to \infty$.

Uma solução importante de qualquer fluxo unidimensional $f(x)$ é o ponto de equilíbrio x^*, ou ponto fixo, definido pela condição

$$\dot{x}^* = f(x^*) = 0, \tag{7.5}$$

No caso do fluxo linear obtemos que $x^* = -\beta/\alpha$, caso $\alpha \neq 0$, de modo que a solução (7.4) é reescrita como

$$x(t) = (x_0 - x^*)e^{\alpha t} + x^*. \tag{7.6}$$

Neste caso, se $\alpha < 0$ então $x(t) \to x^*$ se $t \to \infty$, donde o ponto de equilíbrio é atrativo. Por analogia, se $\alpha > 0$ o ponto de equilíbrio será repulsivo pois $x(t) \to \infty$ para $t \to \infty$.

7.2 Estabilidade dos pontos de equilíbrio

A estabilidade dos pontos de equilíbrio de um fluxo unidimensional qualquer $f(x)$ pode ser inferida usando um *diagrama de fase*, que é um gráfico de $\dot{x} = f(x)$ em função de x. Os pontos de equilíbrio são os pontos onde o gráfico de $f(x)$ intercepta o eixo horizontal. O sinal de $\dot{x}$ indica o sentido do fluxo: se $\dot{x} > 0$ este é para a direita, e se $\dot{x} < 0$, para a esquerda.

Pela inspeção do sentido do fluxo nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio se determina imediatamente sua estabilidade. A função linear,

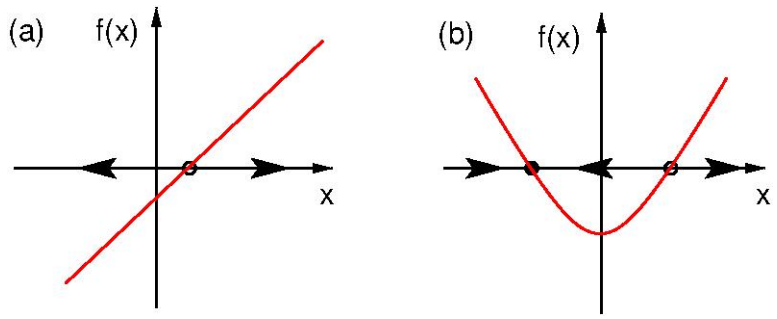

Figura 7.1: Diagramas de fase para $f(x) =$ (a) $\alpha x + \beta$; (b) $x^2 - 1$.

por exemplo, para $\alpha > 0$ tem um ponto de equilíbrio repulsivo, devido aos sinais do fluxo [Fig. 7.1(a)]. Já a função $f(x) = x^2 - 1$ tem dois pontos de equilíbrio $x_1^* = 1$ e $x_2^* = -1$, sendo o primeiro atrativo e o segundo repulsivo [Fig. 7.1(b)].

Também podemos investigar a estabilidade do ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$ considerando uma solução nas suas vizinhanças

$$x(t) = x^* + \delta(t), \tag{7.7}$$

onde supomos que $|\delta(t)| \ll 1$. Substituindo essa solução em (7.1)

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dx^*}{dt} = f(x^* + \delta) = f(x^*) + \delta\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x^*} + \ldots, \tag{7.8}$$

onde desprezamos os termos de ordem igual ou superior a δ^2. Definindo a constante

$$\alpha \equiv \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x^*} = f'(x^*), \tag{7.9}$$

e usando (7.5) obtemos

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \alpha\,\delta(t), \tag{7.10}$$

que é uma equação diferencial linear do tipo (7.3), com $\beta = 0$, cuja solução geral é dada por (7.4) como

$$\delta(t) = \delta(0)e^{\alpha t}, \tag{7.11}$$

cujo ponto de equilíbrio $\delta^* = 0$ corresponde a $x = x^*$. Assim, a estabilidade do ponto de equilíbrio é determinada pelo sinal do parâmetro α:

1. se $f'(x^*) < 0$, x^* é atrativo (assintoticamente estável)
2. se $f'(x^*) > 0$, x^* é repulsivo (instável)

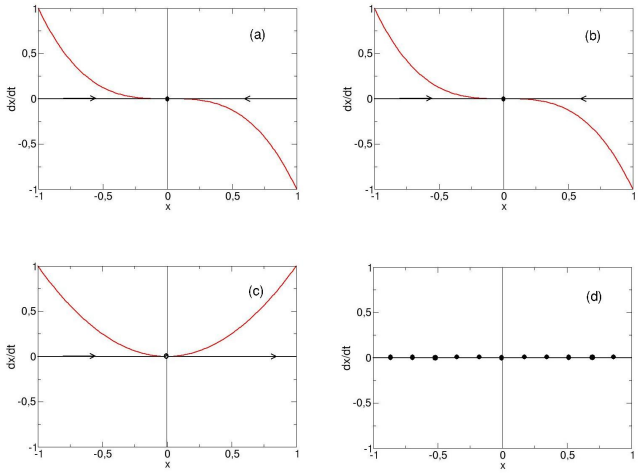

Figura 7.2: Diagramas de fase para os fluxos unidimensionais (a) $f(x) - -x^3$, (b) x^3, (c) x^2, (d) 0.

3. se $f'(x^*) = 0$, a linearização não permite determinar a estabilidade.

Se $f'(x^*) = 0$ a aproximação linear não é suficiente para julgar a estabilidade do ponto de equilíbrio, e precisamos neste caso considerar o diagrama de fase. Alguns exemplos desta situação, onde $x^* = 0$ é um ponto de equilíbrio, são os fluxos unidimensionais: $\dot{x} = -x^3$, no qual $x^* = 0$ é estável para $x < 0$ e $x > 0$ [Fig. 7.2(a)]; $\dot{x} = x^3$, onde $x^* = 0$ é instável para $x < 0$ e $x > 0$ [Fig. 7.2(b)]; $\dot{x} = x^2$: em que $x^* = 0$ é estável para $x < 0$ e instável para $x > 0$ [Fig. 7.2(c)]; e $\dot{x} = 0$, tal que $x^* = 0$ é um ponto de equilíbrio indiferente [Fig. 7.2(d)].

7.3 A equação logística

É bastante comum encontrarmos modelos de crescimento populacional que empregam equações diferenciais ordinárias, que são sistemas a tempo contínuo. No Capítulo 1 deste trabalho abordamos modelos a tempo discreto, obtendo o mapa logístico, que é um paradigma para o estudo de mapas unidimensionais. Para passar de mapas para fluxos (a tempo contínuo), são necessárias algumas aproximações.

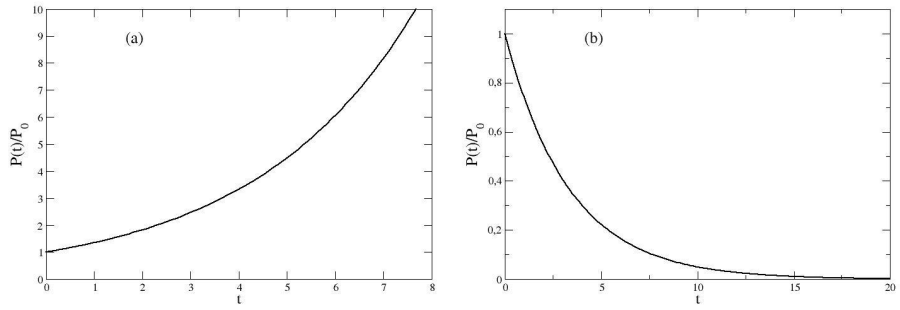

Figura 7.3: Crescimento populacional segundo o modelo Malthusiano para (a) $R > 0$, (b) $R < 0$.

7.3.1 Crescimento Malthusiano e logístico

Denotando, por conveniência, P_t a população de uma espécie no tempo discreto $t = 0, 1, 2, \ldots$, de (1.1) temos que

$$P_t = P_{t-1} + RP_{t-1}, \tag{7.12}$$

onde R é a taxa de crescimento da população. Supondo que os intervalos de tempo sejam tão pequenos que podemos considerá-los infinitesimais, então

$$P_t - P_{t-1} = \frac{\Delta P_{t-1}}{\Delta t} = RP_{t-1}, \tag{7.13}$$

que, no limite $\Delta t \to 0$, resulta na equação diferencial linear

$$\frac{dP(t)}{dt} = RP(t), \tag{7.14}$$

cuja solução é, dada a condição inicial $P_0 = P(t = 0)$,

$$P(t) = P_0 e^{Rt}. \tag{7.15}$$

Caso morram mais indivíduos do que nasçam, a taxa de crescimento R será negativa, donde $P(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, e a população tende à sua extinção [Fig. 7.3(b)]. Por outro lado, se nascem mais indivíduos que morrem então a taxa de crescimento R é positiva, donde $P(t)$ tende ao infinito quando $t \to \infty$ [Fig. 7.3(a)]. Este aumento ilimitado da população foi descrito por Thomas Malthus em seu *Ensaio sobre o princípio da população*, publicado em 1798. Malthus estimou que a população da Inglaterra dobrava seu valor a cada geração (encarada como um intervalo de 25 anos). Usando (7.15) teremos

$$P(t = 25) = P_0 e^{25R} = 2P_0, \Rightarrow R = \frac{\ln 2}{25} \approx 0,028.$$

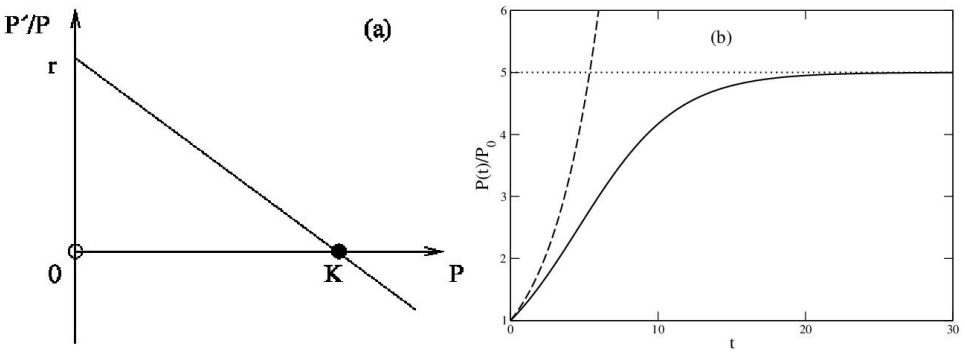

Figura 7.4: (a) Modelo de Verhulst para taxa de crescimento *per capita*. (b) Solução da equação logística. A linha tracejada mostra a solução da equação exponencial correspondente.

O crescimento ilimitado da população fez com que Malthus previsse fome e miséria para o futuro, uma vez que a produção de alimentos não seguiria a mesma progressão que o aumento populacional.

No entanto, como observado por Pierre-François Verhulst em 1838, há vários fatores que limitam o número de indivíduos que podem coabitar em uma região geograficamente limitada, e com uma capacidade finita de produção de alimentos. Assim, a taxa de crescimento *per capita* $\dot{P}/P$, que era uma constante (igual a R no modelo de Malthus), na verdade diminuiria com o aumento de população. Verhulst propôs uma diminuição linear dessa taxa *per capita*, na forma [Fig. 7.4(a)]

$$\frac{\dot{P}}{P} = R\left(1 - \frac{P}{K}\right), \tag{7.16}$$

onde K, denominada capacidade de sustentação, representa a população limite, dada a quantidade de recursos disponíveis e o espaço físico ocupado pela espécie.

Substituindo (7.16) em (7.14) obtemos a chamada *equação logística*

$$\frac{dP}{dt} = RP\left(1 - \frac{P}{K}\right). \tag{7.17}$$

Esperando uma população limitada ao intervalo $[0,K]$, é conveniente definir uma variável $x = P/K$ (população reduzida), tal que $0 \leq x \leq 1$ e a equação logística torna-se

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = Rx(1-x), \tag{7.18}$$

que é a versão, a tempo contínuo, do mapa logístico.

7.3.2 Dinâmica da equação logística

Os pontos de equilíbrio da equação logística (**??**eqlogistica) satisfazem

$$f(x^*) = Rx^*(1-x^*) = 0,$$

que tem como soluções $x_1^* = 0$, ausência de indivíduos, e $x_2^* = 1$, que interpretamos como a população limite do modelo. Para determinar sua estabilidade linear computamos a derivada do fluxo

$$f'(x) = R(1-2x),$$

tal que $f'(x_1^* = 0) = R$ e $f'(x_2^* = 1) = -R$. Se $R < 0$ (taxa de mortalidade maior que a de natalidade) então $x_1^* = 0$ é estável, e $x_2^* = 1$, instável, o que correspondente à extinção da população para tempos grandes. A situação se inverte se $R > 0$ (taxa de mortalidade menor que a de natalidade), pois x_1^* torna-se instável, e x_2^*, estável, significando uma convergência à população limite.

Estas conclusões podem, naturalmente, ser obtidas diretamente pela solução da equação logística (7.18), que reduz-se à quadratura (8.146)

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x(1-x)} = Rt, \tag{7.19}$$

que pode ser feita analiticamente, resultando

$$x(t) = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{-Rt}}, \Rightarrow P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K-P_0)e^{-Rt}} \tag{7.20}$$

cujo gráfico é mostrado na Fig. 7.4(b) para o caso $R > 0$. Observamos que, quando $t \to \infty$, temos que $P(t) \to K$, ou seja, a população tende para o seu valor limite, ao contrário do modelo Malthusiano onde ela aumenta indefinidamente com o tempo.

É curioso compararmos a dinâmica dos modelos logístico discreto e contínuo. Enquanto a dinâmica exibida pelo mapa logístico $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ é extremamente rica, apresentando órbitas periódicas, caos, intermitência, crise, janelas periódicas, etc., a equação logística tem apenas duas soluções correspondentes à extinção e à estabilização da população, respectivamente. Este fato ilustra a importância, na Dinâmica Não-Linear, da dimensionalidade do sistema, bem como do caráter assumido pela variável tempo. Mapas unidimensionais não-inversíveis têm um comportamento dinâmico muito rico, ao passo que fluxos unidimensionais são bem menos interessantes (sob nosso ponto de vista). Como veremos na sequência dos próximos capítulos, fluxos precisam ter uma dimensão mínima igual a 3 para que possamos ter comportamento caótico. Assim, a qualidade das previsões que um modelo dinâmico pode gerar para um dado problema físico depende muito da sua estrutura matemática.

7.4 Teorema de existência e unicidade

O teorema de existência e unicidade, para a equação diferencial (problema de valor inicial):

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad x(0) = x_0,$$

nos assegura que, se $f(x)$ e $f'(x)$ forem funções contínuas em um intervalo aberto I do eixo real, e se a condição inicial $x_0 \in I$, então o problema de valor inicial terá uma e somente uma solução $x(t)$ para algum intervalo de tempo $(-\tau, \tau)$ centrado em $t = 0$ [18, 61].

Em outras palavras, o teorema de existência e unicidade garante que existe um limite finito τ para o intervalo de tempo, no qual uma solução $x(t)$ existe e é única, desde que a função $f(x)$ seja suficientemente suave. Por "suficientemente suave", queremos dizer que $f(x)$ não tenha pontos dentro do intervalo da variável x para os quais a derivada não exista.

Para ilustrar esse ponto do teorema vamos consider o seguinte contra-exemplo [Fig. 7.2(b)]:

$$\dot{x} = x^{1/3}. \tag{7.21}$$

O ponto $x = 0$ é um ponto de equilíbrio, logo é uma solução possível para a condição inicial $x_0 = 0$. No entanto, usando (8.146) podemos encontrar uma segunda solução para a *mesma* condição inicial:

$$\int_0^x \frac{dx}{x^{1/3}} = \frac{3}{2}x^{2/3} = t$$

ou seja, $x(t) = (2t/3)^{3/2}$, violando assim a unicidade das soluções. Por outro lado, ainda que $f(x) = x^{1/3}$ seja contínua em $x = 0$, $f'(x) = x^{-2/3}/3$ não é, de modo que a hipótese do teorema de existência e unicidade não é verificada nesse exemplo.

Outro ponto relevante é que o teorema de existência e unicidade não garante a existência de soluções para um tempo arbitrariamente grande. Ele apenas afirma a existência de um tempo máximo τ para o qual as soluções existem dentro do intervalo $(-\tau, +\tau)$ centrado em $t = 0$. Um exemplo de solução que existe apenas até um tempo finito é apresentado pela equação

$$\dot{x} = 1 + x^2, \qquad x(0) = 0. \tag{7.22}$$

Usando (8.146) podemos integrar a equação

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x = t$$

tal que a solução é $x(t) = \tan t$. Como a função tangente diverge nos pontos $\pm\pi/2$, a solução existe apenas no intervalo $-\pi/2 < t < \pi/2$ de tamanho finito $\tau = \pi/2$ em torno de $t = 0$.

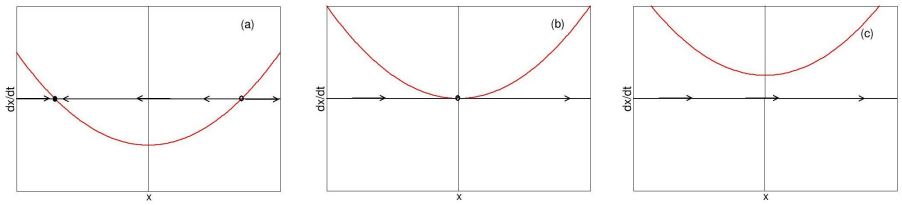

Figura 7.5: Diagramas de fase para o fluxo (7.23) nos casos de (a) $p < 0$, (b) $p = 0$ e (c) $p > 0$

7.5 Bifurcações em fluxos unidimensionais

Vamos considerar um fluxo unidimensional com um parâmetro p variável: $\dot{x} = f(x;p)$. Uma bifurcação é uma mudança na estabilidade do ponto de equilíbrio quando p é variado através de um ponto p^*, chamado ponto de bifurcação. Estudamos, no Capítulo 2, alguns tipos de bifurcações em mapas unidimensionais: duplicação de período, tangente e transcrítica. Em fluxos unidimensionais também existem bifurcações, algumas das quais similares às vistas para mapas. Neste trabalho veremos três delas: nó-sela, transcrítica e forquilha. Um estudo mais completo sobre bifurcações em fluxos unidimensionais pode ser encontrado na referência [41], seção 3.1.

7.5.1 Bifurcação nó-sela

Este tipo de bifurcação é exemplificado pelo seguinte fluxo unidimensional:

$$\frac{dx}{dt} = f(x;p) = p + x^2, \tag{7.23}$$

com os pontos de equilíbrio

$$x_1^* = \sqrt{-p}, \qquad x_2^* = -\sqrt{-p}, \tag{7.24}$$

que são reais se $p \leq 0$.

Como $f'(x;p) = 2x$, então $f'(x_{1,2}^*;p) = \pm 2|p|^{1/2}$, de modo que x_1^* é instável e x_2^* é estável se $r < 0$ [Fig. 7.5(a)]. Para $p = p_c = 0$ os pontos de equilíbrio convergem à origem $x^* = 0$, para a qual $f'_p(x^*) = 0$, de modo que a origem é o ponto de bifurcação [Fig. 7.5(b)]. Já se $p > 0$ não há pontos de equilíbrio [Fig. 7.5(c)].

O diagrama de bifurcações é o gráfico de x^* em função do parâmetro p, e mostra um par de pontos de equilíbrio estável e instável para $p < 0$ que coalescem no ponto de bifurcação em $p^* = 0$ [Fig. 7.6(a)]. A bifurcação é chamada *nó-sela* devido ao seu análogo em duas dimensões, que veremos no próximo Capítulo.

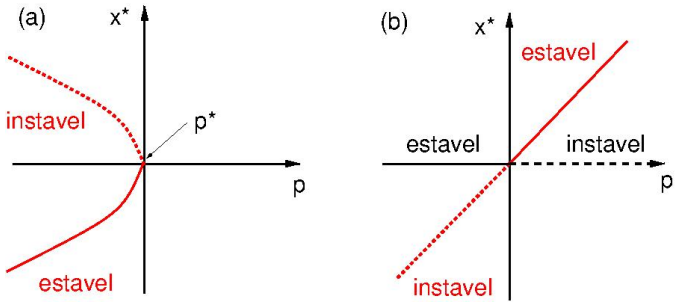

Figura 7.6: Diagrama de bifurcações para (a) uma bifurcação nó-sela, (b) uma bifurcação transcrítica.

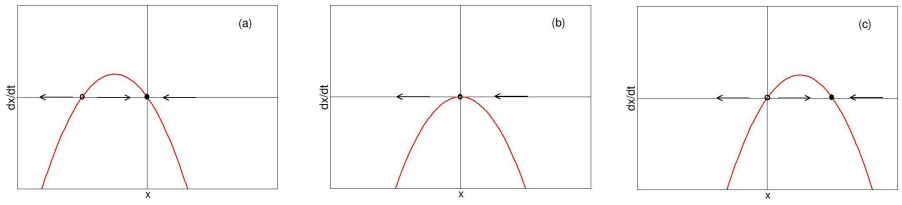

Figura 7.7: Diagramas de fase para o fluxo (7.25) nos casos de (a) $p < 0$, (b) $p = 0$ e (c) $p > 0$

7.5.2 Bifurcação transcrítica

Ilustraremos este tipo de bifurcação com o seguinte exemplo:

$$\frac{dx}{dt} = f(x;p) = px - x^2, \tag{7.25}$$

cujos pontos de equilíbrio são [Fig. 7.7(a)].

$$x_1^* = 0, \qquad x_2^* = p. \tag{7.26}$$

Uma vez que $f'(x;p) = p - 2x$, então $f'(x_1^* = 0;p) = p$, donde x_1^* é estável se $p < 0$, e instável se $p > 0$ [Fig. 7.7(a)]. Como $f'(x_2^* = p;p) = -p$, resulta que x_1^* é instável se $p < 0$, e estável se $p > 0$ [Fig. 7.7(c)]. No ponto de bifurcação transcrítica $x^* = 0$, para $p^* = 0$, os dois pontos de equilíbrio permutam seu tipo de estabilidade [Fig. 7.7(b)]. O diagrama de bifurcações correspondente é mostrado na Fig. 7.6(b). Um exemplo deste tipo de bifurcações é a equação logística, quando o parâmetro passa pelo valor crítico $R = 1$.

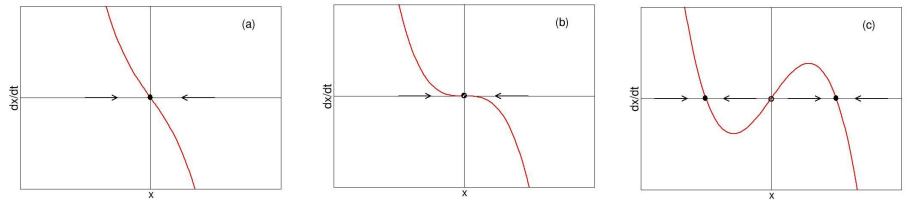

Figura 7.8: Diagramas de fase para o fluxo (7.27) nos casos de (a) $p < 0$, (b) $p = 0$ e (c) $p > 0$

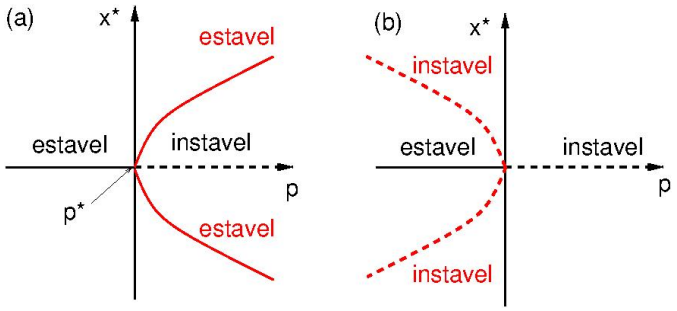

Figura 7.9: Diagrama de bifurcações para uma bifurcação forquilha (a) supercrítica, (b) subcrítica.

7.5.3 Bifurcação forquilha

Há dois casos nesta categoria: o primeiro é a bifurcação forquilha supercrítica, cujo modelo é

$$\frac{dx}{dt} = f(x;p) = px - x^3, \tag{7.27}$$

cujos pontos de equilíbrio são

$$x_1^* = 0, \qquad x_2^* = \sqrt{p} \qquad x_3^* = -\sqrt{p}, \tag{7.28}$$

sendo que $x_{2,3}^*$ só existem se $p > 0$ [Fig. 7.8(a)].

A estabilidade dos pontos de equilíbrio é determinada por $f'(x;p) = p - 3x^2$. Assim, como $f'(x_1^* = 0;p) = p$, então x_1^* é estável se $p < 0$, e instável se $p > 0$. Em vista de $f'(x_{2,3}^*;p) = p - 3p = -2p$, temos que $x_{2,3}^*$ são ambos instáveis se $p < 0$, e estáveis se $p > 0$ [Fig. 7.8(c)]. Em $p^* = 0$ temos o ponto de bifurcação forquilha [Fig. 7.8(b)]. O diagrama de bifurcações para este caso é mostrado na Fig. 7.9(a).

Um tipo análogo é a bifurcação forquilha sub-crítica, exemplificada pelo fluxo $\dot{x} = f(x;p) = px + x^3$, cujos pontos de equilíbrio são $x_1^* = 0$ e $x_{2,3}^* =$

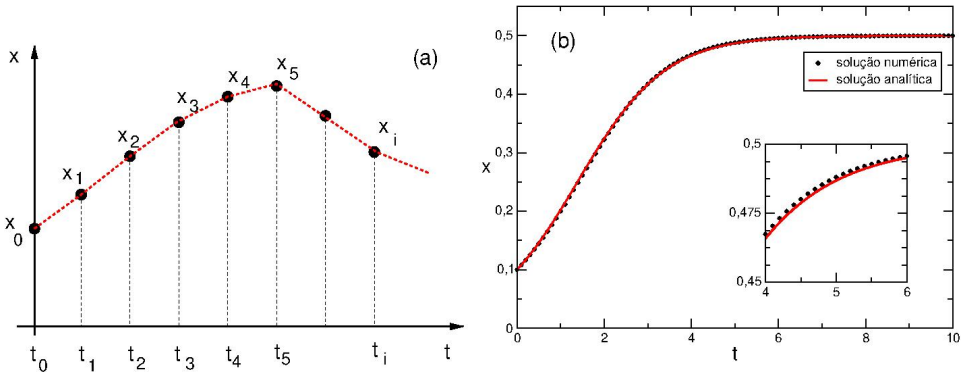

Figura 7.10: (a) Solução computacional de um fluxo unidimensional; (b) Exemplo de utilização do método de Euler para a equação logística $\dot{x} = x(1-2x)$.

$\pm\sqrt{-p}$, e que portanto existem desde que $p < 0$. Neste caso, como $f(x_1^* = 0; p) = p$, o respectivo ponto de equilíbrio é estável se $p < 0$, e instável se $p > 0$. Analogamente, como $f(x_{2,3}^* = \pm\sqrt{-p}; p) = 4p$, ambos os pontos são instáveis se $p > 0$ (para $p < 0$ eles simplesmente não existem). Numa bifurcação forquilha sub-crítica dois pontos de equilíbrio instáveis colidem com o ponto estável no ponto de bifurcação. Após a bifurcação, em $p^* = 0$, o ponto de equilíbrio $x^* = 0$ torna-se instável. O diagrama de bifurcações correspondente é mostrado na Fig. 7.9(b).

7.6 Soluções numéricas

Dentro das restrições impostas pelo teorema de existência e unicidade, procuramos obter soluções numéricas para o fluxo unidimensional

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

sabendo que existe uma e somente uma solução $x(t)$ que passa pela condição inicial $x(t = 0) = x_0$. Na dinâmica não-linear usualmente desejamos uma solução para $t_0 \leq t \leq t_f$. Para isso dividimos esse intervalo de tempo em N sub-intervalos de tamanho

$$h = \frac{t_f - t_0}{N} \tag{7.29}$$

chamado *passo de integração*. Uma solução numérica consiste da sequência de pontos

$$x_i = x(t = t_0 + ih), \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots N) \tag{7.30}$$

a intervalos de tempo constantes [Fig. 7.10(a)].

7.6.1 Método de Euler

Se o passo h de integração for suficientemente pequeno, podemos expandir o ponto $x_1 = x(t = t_0 + h)$ em série de Taylor e reter apenas o termo linear

$$x_1 \approx x(t = t_0) + h\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0} = x_0 + hf(x_0),$$

de forma que, para todos os demais intervalos teremos

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i), \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots N-1) \tag{7.31}$$

Como um exemplo de aplicação do método de Euler, consideramos uma adaptação da equação logística (7.18)

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx), \qquad x_0 = 0,1. \tag{7.32}$$

onde a e b são parâmetros, e que tem uma solução analítica [vide (7.20)]:

$$x(t) = \frac{ax_0}{(a - bx_0)e^{-at} + bx_0}. \tag{7.33}$$

Na figura 7.10(b) mostramos a solução numérica da equação logística, para $a = 1$ e $b = 2$, usando o método de Euler com passo $h = 0,1$, assim como a solução analítica acima. Podemos ver que a concordância é muito boa nesse caso, mesmo com um passo relativamente grande. Em particular, observamos que, para tempos grandes, a solução converge para o ponto de equilíbrio atrativo $x^* = a/b = 1/2$, o que pode ser inferido também pela solução (7.33).

O método de Euler é bastante impreciso pois calcula a derivada de x em relação ao tempo apenas no início do intevalo. Um aperfeiçoamento do método consiste em tomar a derivada média ao longo do intervalo. Para isso fazemos inicialmente uma estimativa baseada em (7.31)

$$\tilde{x}_{i+1} = x_i + hf(x_i), \tag{7.34}$$

e depois calculamos a média das derivadas no início e no final do intervalo

$$\frac{f(x_i) + f(\tilde{x}_{i+1})}{2},$$

de maneira que a estimativa será refinada para

$$\tilde{x}_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}\left\{f(x_i) + f(\tilde{x}_{i+1})\right\}. \tag{7.35}$$

Pode-se mostrar que o erro $|x(t_i) - x_i|$ cresce linearmente com o passo h no método de Euler (7.31), enquanto cresce com h^2 no método de Euler

refinado (7.35). Por isso o método de Euler é dito de primeira ordem, enquanto seu refinamento é de segunda ordem. Como o passo é usualmente um número muito pequeno, $(h \ll 1)$, então o erro propaga-se mais lentamente com o passar do tempo na versão mais refinada do método de Euler. Nesse caso, para um mesmo valor do passo h, mais iterações do método podem ser realizadas com relativa confiança.

7.6.2 Método de Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta é de quarta ordem, ou seja, o erro cresce com h^4, conferindo uma precisão maior ao resultado em comparação aos métodos de Euler. Na sua versão mais símples o passo h é mantido constante, e os pontos da solução são dados pelas seguintes fórmulas [27]:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \tag{7.36}$$

onde

$$k_1 = hf(x_i), \tag{7.37}$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}k_1\right), \tag{7.38}$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}k_2\right), \tag{7.39}$$

$$k_4 = hf\left(x_i + k_3\right). \tag{7.40}$$

A fórmula (7.36) representa uma média ponderada de quatro incrementos, dados por (7.37)-(7.40). Cada incremento é o produto do passo de integração e uma inclinação estimada pela função da seguinte maneira:

1. k_1 é a inclinação de f no início do intervalo, assim como no método de Euler (7.31);
2. k_2 é a inclinação de f no ponto médio do intervalo, usando k_1;
3. k_3 também é a inclinação de f no ponto médio do intervalo, mas agoa usando k_2;
4. k_4 é a inclinação de f no final do intervalo, usando k_3.

A média entre essas quatro contribuições dá mais peso àquelas no ponto médio do intervalo, ou seja, k_2 e k_3 (que recebem peso 2), e menos peso às das extremidades, k_1 e k_4, que têm peso 1.

O método de Runge-Kutta têm vários refinamentos, que podem elevar sua ordem de 4 para 12, por exemplo. Além disso, há versões dele onde o passo h deixa de ser constante e passa a ser variável, o que pode ser necessário se a função $f(x)$ sofrer mudanças repentinas.

7.7 Osciladores de fase

Um oscilador de fase é um modelo símples para diversos fenômenos periódicos, nos quais encaramos o estado do sistema em termos de uma evolução ao longo de um círculo de raio unitário C. O movimento sobre este círculo é descrito por uma ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$, que chamamos de fase do oscilador. Assim, a evolução temporal do oscilador de fase pode ser encarada como um fluxo unidimensional, na forma geral

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = f(\theta), \tag{7.41}$$

que podemos encarar como um fluxo unidimensional sobre o círculo C. Assim, supomos que a função f seja periódica em θ, com período 2π, ou seja,

$$f(\theta) = f(\theta + 2\pi)$$

Em um oscilador de fase uniforme, a fase varia com o tempo com uma frequência constante $\omega = 2\pi/T$ (T é o período da oscilação) tal que

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \tag{7.42}$$

e que pode ser imediatamente integrada fornecendo

$$\theta(t) = \theta(0) + \omega t, \tag{7.43}$$

onde $\theta(0)$ é a fase inicial (em $t = 0$). Se $\omega > 0$ a rotação da fase é convencionalmente no sentido anti-horário, enquanto se $\omega < 0$ ela é no sentido horário. Ao longo de um ciclo completo de oscilação a fase cresce de 2π em relação ao seu valor anterior. Podemos, assim, considerar o valor "cheio" da fase, que é ilimitado, ou então o valor "reduzido" da fase, que varia apenas de zero a 2π. A relação entre estes dois valores é dada pela operação "módulo 2π", que fornece o resto da divisão de θ por 2π:

$$\theta_{reduzido} = \theta_{cheio}, \qquad \mod (2\pi).$$

7.8 Oscilador não-uniforme

Um modelo de oscilador de fase presente em diversas aplicações físicas e biológicas é o chamado oscilador não-uniforme

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - \varepsilon \sin\theta, \tag{7.44}$$

ε é uma constante. Por conveniência, supomos que tanto ω como ε sejam positivos.

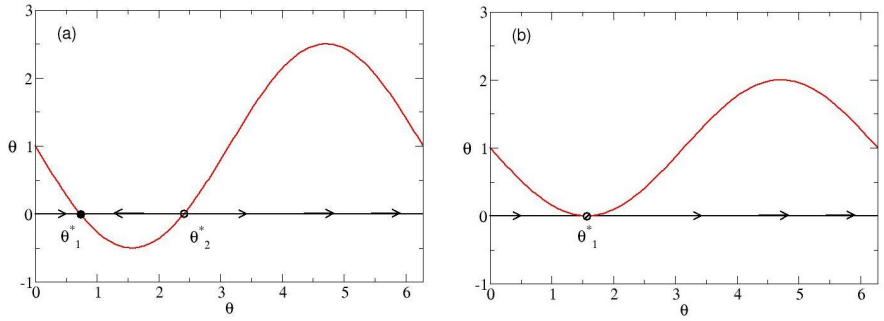

Figura 7.11: Plano de fase para a equação de Adler para os casos: (a) $\varepsilon > \omega$, (b) $\varepsilon = \omega$.

O diagrama de fase $\dot{\theta}$ *versus* θ correspondente a (7.53) é mostrado na Figura 7.11 para três situações possíveis, conforme a relação entre ω e ε. Os pontos de equilíbrio θ^* são definidos pela condição

$$\sin\theta^* = \frac{\omega}{\varepsilon}. \tag{7.45}$$

Como $|\sin\theta^*| \leq 1$ resulta que, para que existam um ou mais pontos de equilíbrio, é necessário que $\omega \leq \varepsilon$. Analisando, inicialmente, o caso $\omega < \varepsilon$, (7.45) terá duas soluções no intervalo $[\pi, 2\pi)$:

$$\theta_1^* = \arcsin\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right), \qquad \theta_2^* = \arcsin\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2}, \tag{7.46}$$

sendo que a primeira solução é estável, e a segunda, instável, como podemos inferir da Fig. 7.11(a), ou também analisando o sinal da derivada

$$f'(\theta^*) = -a\cos\theta^* = \mp a\sqrt{1-(\omega/\varepsilon)^2},$$

já que $f'(\theta_1^*) < 0$ e $f'(\theta_2^*) > 0$.

O caso $\varepsilon = \omega$ é tal que há apenas um ponto de equilíbrio $\theta_1^* = \theta_2^* = 3\pi/2$, e que é semi-estável, ou seja, é estável pela esquerda e instável pela direita [Fig. 7.11(b)]. O comportamento é diferente, porém, no caso $\varepsilon < \omega$, que viola a condição $|\sin\theta^*| \leq 1$, de modo que não há ponto de equilíbrio, e as oscilações correspondentes são não-uniformes, com um período dado por [Fig. 7.12(a)]

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega - \varepsilon\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}} \tag{7.47}$$

O período da oscilação é igual a $2\pi/\omega$ para $\varepsilon = 0$, que é o caso de um oscilador uniforme, e aumenta com o parâmetro ε, tendendo ao infinito quando $\varepsilon = \omega$ [Fig. 7.12(b)].

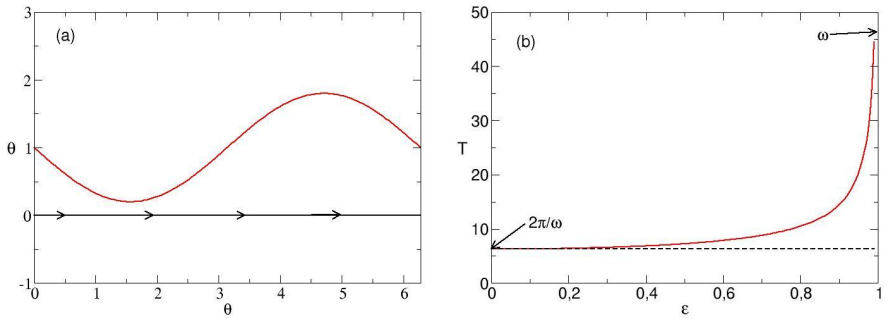

Figura 7.12: (a) Plano de fase para a equação de Adler para os caso $\varepsilon < \omega$, (b) Período de oscilação em função de ε quando $\omega = 1$.

7.9 Oscilador de fase com perturbação externa periódica

Existem diversos problemas de interesse físico e biológico onde desejamos conhecer a resposta de um oscilador descrito pela fase $\theta(t)$ e com frequência própria ω_0 a uma perturbação externa periódica. Esta perturbação pode ser representada por um segundo oscilador caracterizado pela fase $\psi(t)$ e uma frequência de forçamento ω_0, e que influencia o primeiro oscilador por meio de uma função ainda indeterminada G, na seguinte forma

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 - \varepsilon G(\theta, \psi), \tag{7.48}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega, \tag{7.49}$$

onde ε é uma constante, denominada intensidade do forçamento, e G é uma função com período 2π tanto em θ como em ψ. Supomos, também, que a perturbação seja fraca o suficiente, no sentido que $\varepsilon \ll 1$. Observe que, no presente modelo, o segundo oscilador influencia o primeiro, mas não *vice-versa*.

Subtraindo (7.49) de (7.48) membro-a-membro temos um fluxo unidimensional no círculo

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Delta\omega - \varepsilon G(\theta, \psi), \tag{7.50}$$

onde definimos a diferença de fase entre o oscilador e seu forçamento,

$$\varphi = \theta - \psi, \tag{7.51}$$

e o descasamento entre as respectivas frequências

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega. \tag{7.52}$$

Nas proximidades da ressonância ($\omega \approx \omega_0$) o descasamento das frequências é muito pequeno. Pode-se mostrar que, nessas condições, o termo de acoplamento entre os osciladores em (7.50) é uma função somente da diferença de fase, ou seja, $g(\theta, \psi) = g(\varphi)$. A forma exata da função g depende do tipo de oscilador a ser considerado, e pode ser complicada. No entanto, é possível fazer uma análise qualitativa escolhendo uma função periódica simples como $g(\varphi) = \sin\varphi$. Assim, o fluxo (7.50) será dado por

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Delta\omega - \varepsilon \sin\varphi, \tag{7.53}$$

que é a equação de Adler da qual tratamos na seção anterior. Portanto, podemos recorrer à discussão qualitativa lá realizada, sobre o comportamento do oscilador perturbado.

Sem perda de generalidade, podemos supor que o descasamento de frequências é positivo, ou seja $\omega_0 > \omega$, e que a intensidade do forçamento ε é positiva. Vimos que o comportamento depende da relação entre estes fatores: se $|\Delta\omega| < \varepsilon$ (pequeno descasamento) haverá dois pontos de equilíbrio $\varphi^*_{1,2}$, um estável e outro instável. O ponto estável é tal que $\theta = \psi + \varphi^*_1$, ou seja, a diferença de fase entre o oscilador e o forçamento permanece constante constante com o tempo, o que é chamado travamento de fases ("phase-locking"). De (7.49) temos $\psi(t) = \omega t$, de modo que $\theta(t) = \omega t + const$. Portanto, a frequência do oscilador na presença da perturbação será $\Omega = \dot{\theta} = \omega$, ou seja, o oscilador responde na mesma frequência do forçamento. Em outras palavras, há uma sincronização de frequências entre o oscilador e o forçamento externo.

Há diversas aplicações físicas e biológicas desse gênero de sincronização. Por exemplo, podemos sincronizar relógios analógicos por meio de sinais de rádio: um pulso eletromagnético gerado por um relógio central extremamente preciso (usualmente um relógio atômico) é usado para fazer pequenos ajustes em outros relógios de modo a sincronizá-los com esta central [**?**]. Outro exemplo é o ajuste dos ritmos circadianos que têm um período de 24 horas, aproximadamente [**?**]. Para esta situação, o forçamento é proveniente do ciclo dia-noite, que é regulado tant pela rotação da Terra como pela posição do Sol. Devido à interação entre o organismo e o ciclo dia-noite, seu período tende a sincronizar com o do ritmo circadiano. Quando se viaja a regiões em altas latitudes ou se explora cavernas, permanecendo longo tempo na obscuridade, a sincronização dos ritmos circadianos é afetada [**?**].

Os ritmos circadianos permitem, ainda, exemplificar o efeito do travamento de fase. Há uma diferença de fase entre o ritmo circadiano e o ritmo inerente ao ciclo dia-noite, e que varia de pessoa para pessoa: há os madrugadores e os dorminhocos, para os quais o dia "começa mais cedo" ou "mais tarde", respectivamente. Viagens aéreas onde a longitude geográfica varia bastante (como cruzar o Oceano Atlântico ou Pacífico) levam

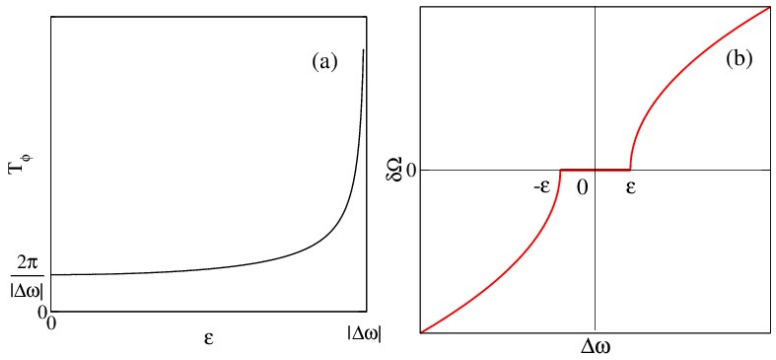

Figura 7.13: (a) Período do batimento em função da intensidade do forçamento; (b) Frequência de batimento em função do descasamento de frequências.

a perturbações desta diferença de fase, ocasionando o chamado "jet-lag", que é o desconforto característico enquanto o relógio biológico (o ritmo circadiano) não ajusta a sua fase ao ciclo dia-noite [**?**]. Este ajuste também varia conforme o indivíduo, e pode durar até vários dias em alguns casos.

7.9.1 Batimentos e quase-periodicidade

O caso $\varepsilon = |\Delta\omega|$ é tal que há apenas um ponto de equilíbrio $\varphi_1^* = \varphi_2^* = 3\pi/2$, e que é semi-estável, ou seja, é estável pela esquerda e instável pela direita [Fig. 7.11(b)]. O comportamento é diferente, porém, no caso $\varepsilon < |\Delta\omega|$, para o qual não há ponto de equilíbrio; logo não haverá sincronização do oscilador com o forçamento nem travamento de fases. De fato, derivando a equação (7.51) em relação ao tempo e usando as equações (7.49) e (**??**) temos

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \omega_0 = -\Omega \tag{7.54}$$

onde $\Omega \equiv \omega_0 - \omega$ é chamada frequência de batimento.

Quando há sincronização de frequências ($\omega = \omega_0$) resulta que $\Omega = 0$. O batimento ocorre quando ω tem um valor próximo a ω_0, o que pode ocorrer para um oscilador não-uniforme, já que sua frequência não é mais constante, dependendo da diferença de fase. O período do batimento $T_\varphi = 2\pi/|\Omega|$ pode ser achado integrando a equação (7.54) ao longo de um ciclo completo, quando a fase aumenta de 2π:

$$T_\varphi = \left| \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\omega - \varepsilon \sin\varphi} \right| = \frac{2\pi}{\sqrt{(\Delta\omega)^2 - \varepsilon^2}}. \tag{7.55}$$

Na ausência de forçamento ($\varepsilon = 0$), o período do batimento reduz-se a $2\pi/\Delta\omega$, que é o período associado ao descasamento de frequência. O valor

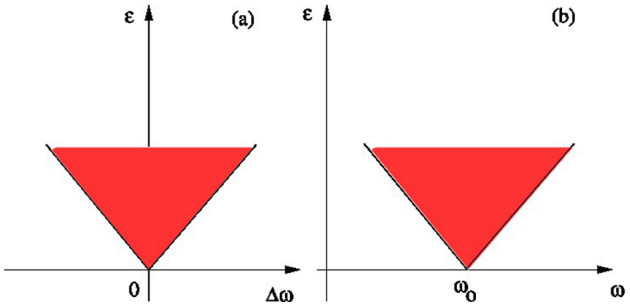

Figura 7.14: Região de sincronização nos planos (a) ε versus Δω; (b) ε versus ω.

de T_φ aumenta lentamente com ε para pequenas intensidades do forçamento, e depois rapidamente à medida em que ε aproxima-se do seu valor limite Δω (para valores ainda maiores há sincronização, como vimos) [Fig. 7.13(a)]. O motivo é que, no caso em que $|\Delta\omega|$ é apenas ligeiramente maior que ε, forma-se um "gargalo" no plano de fase próximo ao valor $3\pi/2$ (que é o "fantasma" do ponto de equilíbrio para $\varepsilon = |\Delta\omega|$). A diferença de fase aproxima-se lentamente deste gargalo e lá permanece durante um certo período, que tende a infinito na medida em que tendemos para $\varepsilon = |\Delta\omega|$. O comportamento para ε na vizinhança do ponto de bifurcação pode ser obtido aproximando-se a raiz quadrada na equação (7.55) como

$$\sqrt{(\Delta\omega)^2 - \varepsilon^2} = \sqrt{\Delta\omega - \varepsilon}\sqrt{\Delta\omega + \varepsilon} \approx \sqrt{2\Delta\omega}\sqrt{\Delta\omega - \varepsilon}, \qquad (\varepsilon \lesssim |\Delta\omega|),$$

que, substituído na equação (7.55), leva à seguinte expressão aproximada para a frequência de batimento nas vizinhanças do gargalo [18]

$$|\Omega| = \sqrt{2\Delta\omega}\,(\Delta\omega - \varepsilon)^{1/2}, \qquad (\varepsilon \lesssim |\Delta\omega|). \tag{7.56}$$

Na Fig. 7.13(b) mostramos o gráfico da frequência de batimento em função do descasamento das frequências. Na região onde $-\varepsilon \leq \Delta\omega \leq \varepsilon$ há sincronização, portanto não há batimento. Fora deste intervalo, como vimos, a frequência de batimento aumenta ou diminui com a raiz quadrada da diferença entre Δω e ε. Apesar disto ε é suposto sempre pequeno (forçamento débil) neste tratamento.

Outra forma de apreciar esta diferença de comportamento é fazendo o gráfico da intensidade do forçamento *versus* o descasamento de frequência. Nele representamos a condição de sincronização (**??**) pela região limitada internamente pela função $\varepsilon = |\Delta\omega|$ [Fig. 7.14(a)]. Para pontos fora desta região não há sincronização, e sim o batimento descrito por (7.55). Nas variáveis ε em função de ω este gráfico é chamado de plano de parâmetros do forçamento, e nele a região de sincronização (também conhecida como

"língua de Arnold" [51]) é deslocada para o ponto de ressonância exata $\omega = \omega_0$ [Fig. 7.14(b)].

A existência desta língua de Arnold ajuda-nos a entender melhor o próprio conceito de ressonância, entendida como a igualdade exata entre as frequências do oscilador ω_0 e do forçamento ω. Se não há forçamento, ou se este é infinitamente pequeno, então a sincronização entre estas frequências só ocorre no ponto de ressonância. Entretanto, na medida em que a intensidade do forçamento cresce, a sincronização ocorre para valores ligeiramente diferentes de ω e ω_0, desde que o módulo desta diferença não exceda ε. Se pensarmos que a frequência do forçamento pode flutuar ligeiramente em relação ao seu valor médio ω, então a sincronização é um fenômeno "robusto", no sentido em que persiste mesmo ligeiramente fora da condição de ressonância exata.

7.10 Problemas

1. Considere o fluxo unidimensional

$$\dot{x} = \sin x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

(a) Esboce o diagrama de fase e, a partir dele, ache os pontos fixos e sua estabilidade; (b) Determine por cálculo direto os pontos fixos e sua estabilidade na aproximação linear.

2. Elabore um programa de computador ou use um software matemático de sua preferência para integrar, pelo método de Euler, o seguinte problema de valor inicial

$$\dot{x} = x(1 - ax), \qquad x(0) = 0,1,$$

com $a = 2$. Faça um gráfico de $x(t)$ e compare-o com a solução exata da equação.

Notes

[5]Este valor pode ser obtido analiticamente a partir do discriminante de uma equação algébrica de sexto grau. Vide `https://mathworld.wolfram.com/LogisticMap.html`

[6]Um homeomorfismo é uma função contínua, definida em espaços topológicos, com uma inversa também contínua.

Capítulo 8

Fluxos bidimensionais

A extensão natural do nosso estudo de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem é o caso bidimensional. Assim como no tratamento de mapas bidimensionais, faremos uso intensivo da notação vetorial, o que torna particularmente simples a análise de estabilidade. Muitos dos conceitos introduzidos no Capítulo 4 aqui serão revisitados, do ponto de vista de sistemas a tempo contínuo.

8.1 Fluxos bidimensionais lineares

Trataremos, agora, de sistemas de duas equações diferenciais ordinárias para as variáveis dinâmicas $x(t)$ e $y(t)$, na seguinte forma geral

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + j, \tag{8.1}$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy + k, \tag{8.2}$$

onde a, b, ... k são constantes.

Na notação matricial, podemos escrever esse sistema na forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{B}, \tag{8.3}$$

onde definimos

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

Definimos, para o fluxo bidimensional geral (8.63) o vetor de pontos de equilíbrio

$$\mathbf{v}^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \tag{8.5}$$

tal que $d\mathbf{v}^*/dt = 0$. Resolvendo (8.3) obtemos

$$\mathbf{v}^* = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}, \tag{8.6}$$

desde que a matriz $\mathbf{A}$ seja inversível ($\det \mathbf{A} \neq 0$).

Podemos fazer $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ sem perda de generalidade, de modo que o fluxo linear será escrito simplesmente como

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \tag{8.7}$$

cujo ponto de equilíbrio é a origem $\mathbf{v}^* = \mathbf{0}$.

8.2 Estabilidade dos pontos de equilíbrio

Os conceitos de estabilidade de pontos de equilíbrio para fluxos bidimensionais são extensões dos seus análogos para mapas bidimensionais. De modo geral, uma solução de equilíbrio $\mathbf{v}^*$ é estável (no sentido de Lyapunov) se, dada uma condição inicial $\mathbf{v}(0)$ suficientemente próxima a $\mathbf{v}^*$, então a solução $\mathbf{v}(t)$ permanece próxima a $\mathbf{v}^*$ para todos os tempos subsequentes. Nesta definição, o sentido da palavra "próxima" refere-se à distância no plano entre a solução e o ponto de equilíbrio, ou seja

$$d(t) = |\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}^*| = \sqrt{(x(t) - x^*)^2 + (y(t) - y^*)^2} \tag{8.8}$$

Além disso, $\mathbf{v}^*$ é assintoticamente estável se, dada uma condição inicial $\mathbf{v}(0)$ suficientemente próxima a $\mathbf{v}^*$, então a solução $\mathbf{v}(t)$ converge a $\mathbf{v}^*$ quando $t \to \infty$. Em outras palavras, se a distância (8.8) tende a zero nesse limite. Como veremos na sequência, estas definições não são equivalentes: um ponto de equilíbrio estável no sentido de Lyapunov pode não ser assintoticamente estável, embora o inverso seja sempre verdadeiro [7]

Para fluxos bidimensionais lineares, onde o ponto de equilíbrio é a origem $\mathbf{v}^* = \mathbf{0}$, podemos determinar a estabilidade a partir da solução geral (9.16). Para isso, analogamente ao que fizemos no caso de mapas bidimensionais, vamos procurar uma solução para (9.8) na forma

$$\mathbf{v}(t) = e^{\xi t}\,\mathbf{u}, \tag{8.9}$$

onde $\mathbf{u}$ é um vetor fixo, a ser determinado, e ξ um escalar. Derivando em relação ao tempo e substituindo em (9.8) chegamos a

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \xi \mathbf{u}, \tag{8.10}$$

que é a equação de autovalores para a matriz $\mathbf{A}$, onde $\mathbf{u}$ é o autovetor correspondente ao autovalor ξ. A equação que determina ξ é do segundo grau e, portanto, terá duas raízes, reais ou complexas. Vamos, assim, considerar os seguintes casos:

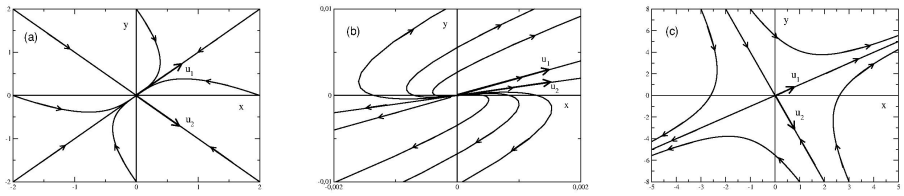

Figura 8.1: Tipos de pontos de equilíbrio com autovalores reais: (a) nó estável, (b) nó instável, (c) pontos de sela.

8.2.1 Autovalores reais e distintos

Os autovetores correspondentes aos autovalores ξ_1 e ξ_2, denotados por $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, são linearmente independentes. A solução geral de (9.8) será uma combinação linear dos autovetores:

$$\mathbf{v}(t) = c_1\, e^{\xi_1 t}\, \mathbf{u}_1 + c_2\, e^{\xi_2 t}\, \mathbf{u}_2. \tag{8.11}$$

onde c_1 e c_2 são coeficientes reais, a serem determinados pela condição inicial $\mathbf{v}(0)$.

Há três tipos de pontos de equilíbrio nessas condições:

1. Nó estável: se $\xi_1 < 0$ e $\xi_2 < 0$, tal que $\exp(\xi_{1,2}\, t) \to 0$ se $t \to \infty$, donde $|\mathbf{v}(t)| \to 0$ e o ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$ é atrativo (assintoticamente estável) em ambas as direções [Fig. 8.1(a)];

2. Nó instável: se $\xi_1 > 0$ e $\xi_2 > 0$, com $\exp(\xi_{1,2}\, t) \to \infty$ se $t \to \infty$, logo $|\mathbf{v}(t)| \to \infty$ e o ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$ é repulsivo (instável) em ambas as direções [Fig. 8.1(b)];

3. Ponto de sela: se $\xi_1 < 0$ e $\xi_2 > 0$ teremos $\exp(\xi_1\, t) \to 0$ e $\exp(\xi_2\, t) \to \infty$ quando $t \to \infty$. Logo $\mathbf{0}$ é estável ao longo da direção $\mathbf{u}_1$ e instável ao longo de $\mathbf{u}_2$ [Fig. 8.1(c)]. As demais trajetórias também divergem para o infinito, de modo que o ponto de sela é instável, na prática.

No caso do ponto de sela, $\mathbf{u}_1$, associada a $\xi_1 < 0$, determina a chamada *direção estável* E^s, enquanto $\mathbf{u}_2$, associada a $\xi_2 > 0$, a *direção instável* E^u. As direções estável e instável são invariantes, ou seja, uma condição inicial que seja colocada exatamente sobre elas, nelas ficará para todos os tempos. As trajetórias fora destas direções têm formato semelhante a hipérboles, tendo as direções como assíntotas.

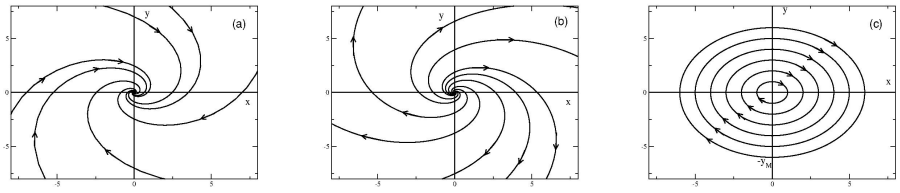

Figura 8.2: Tipos de pontos de equilíbrio com autovalores complexos: (a) foco estável, (b) foco instável, (c) centro.

8.2.2 Autovalores complexos

Quando os autovalores forem complexos, serão conjugados entre si:

$$\xi_{1,2} = \mu \pm i\,\omega, \tag{8.12}$$

onde μ e ω são reais. Os autovetores correspondentes serão também complexos, na forma

$$\mathbf{u}_{1,2} = \mathbf{a} \pm i\,\mathbf{b}, \tag{8.13}$$

Assim como no caso anterior, vamos procurar soluções na forma

$$\begin{aligned} e^{\xi t}\mathbf{u} &= e^{(\mu+i\omega)t}(\mathbf{a}+i\mathbf{b}), \\ &= e^{\mu t}(\cos\omega t + i\sin\omega t)(\mathbf{a}+i\mathbf{b}) \\ &= e^{\mu t}(\mathbf{a}\cos\omega t + i\mathbf{b}\cos\omega t + i\mathbf{a}\sin\omega t - \mathbf{b}\sin\omega t), \end{aligned}$$

As partes real e imaginária dessa expressão são

$$e^{\mu t}(\mathbf{a}\cos\omega t - \mathbf{b}\sin\omega t) \qquad e^{\mu t}(\mathbf{a}\sin\omega t + \mathbf{b}\cos\omega t). \tag{8.14}$$

Como cada uma delas é uma solução linearmente independente, a solução geral será uma combinação linear delas:

$$\mathbf{v}(t) = c_1\, e^{\mu t}(\mathbf{a}\cos\omega t - \mathbf{b}\sin\omega t) + c_2\, e^{\mu t}(\mathbf{a}\sin\omega t + \mathbf{b}\cos\omega t). \tag{8.15}$$

A classificação do ponto de equilíbrio na origem será, no caso de autovalores complexos, a seguinte:

1. Foco estável: se $\mu < 0$ então $\exp(\mu t) \to 0$ se $t \to \infty$, de modo que $\mathbf{v}(t)$ se aproxima da origem numa espiral, e o ponto de equilíbrio é atrativo (assintoticamente estável) [Fig. 8.2(a)];

2. Foco instável: se $\mu > 0$ então $\exp(\mu t) \to \infty$ para $t \to \infty$, e $\mathbf{v}(t)$ se afasta da origem, também numa espiral. A origem é repulsiva (instável) [Fig. 8.2(b)].

3. Centro: se $\mu = 0$ então o módulo de $\mathbf{v}(t)$ não cresce nem diminui com o passar do tempo, de maneira que a trajetória $\mathbf{v}(t)$ orbita em torno do ponto de equilíbrio na origem, que é portanto marginalmente estável (indiferente) [Fig. 8.1(c)];

No caso de um centro, as trajetórias são dadas por (8.15) com $\mu = 0$:

$$\mathbf{v}(t) = c_1(\mathbf{a}\cos\omega t - \mathbf{b}\sin\omega t) + c_2(\mathbf{a}\sin\omega t + \mathbf{b}\cos\omega t). \tag{8.16}$$

Calculando o módulo desse vetor, e escolhendo os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ ortonormais, por simplicidade,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 1, \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0,$$

temos que

$$|\mathbf{v}(t)|^2 = c_1^2 + c_2^2 = |\mathbf{v}(0)|^2,$$

de sorte que a trajetória executa um movimento circular em torno da origem com raio $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Para cada condição inicial (x_0, y_0) teremos um raio diferente, portanto. Assim, o centro é estável no sentido de Lyapunov, mas não assintoticamente estável, já que uma condição inicial próxima à origem gera uma trajetória que permanece nas proximidades do centro, sem tender assintoticamente a ele.

8.2.3 Autovalores reais e iguais

Quando os autovalores da matriz dos coeficientes são reais e iguais ($\xi_1 = \xi_2 \equiv \xi$) então temos apenas uma solução linearmente independente do fluxo linear,

$$\mathbf{v}_1(t) = e^{\xi t}\mathbf{u}, \tag{8.17}$$

onde $\mathbf{u}$ é o autovetor associado a ξ. Para chegarmos a uma solução geral, temos de obter uma segunda solução linearmente independente $\mathbf{v}_2$ que entre na combinação linear desejada

$$\mathbf{v}(t) = c_1\mathbf{v}_1(t) + c_2\mathbf{v}_2(t), \tag{8.18}$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

Para determinar a segunda solução, devemos antes encontrar um vetor $\mathbf{w}$ tal que

$$(\mathbf{A} - \xi\mathbf{I})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}, \tag{8.19}$$

ou seja, precisamos resolver a seguinte equação matricial

$$\begin{pmatrix} a-\xi & b \\ c & d-\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, \tag{8.20}$$

de modo que a segunda solução procurada é

$$\mathbf{v}_2 = (\mathbf{w} + t\mathbf{u})e^{\xi t}. \tag{8.21}$$

Podemos constatar que $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_1$ são, de fato, linearmente independentes pois uma não é um múltiplo da outra.

Substituindo (8.21) em (8.18) obtemos a solução geral para este caso

$$\mathbf{v}(t) = c_1 e^{\xi t}\mathbf{u} + c_2 e^{\xi t}(\mathbf{w} + t\mathbf{u}). \tag{8.22}$$

8.3 Critério geral de estabilidade

A partir da análise dos casos anteriores, podemos enunciar as condições para estabilidade do ponto de equilíbrio na origem de fluxos bidimensionais lineares:

- autovalores reais e distintos: $\xi_1 < 0$ e $\xi_2 < 0$;
- autovalores complexos: $\mu = Re(\xi_{1,2}) < 0$.

No Cap. 3 vimos que os autovalores são raízes da equação do segundo grau

$$\xi^2 - \tau\xi + \Delta = 0, \tag{8.23}$$

onde

$$\tau = \operatorname{tr}\mathbf{A} = a + d, \qquad \Delta = \det\mathbf{A} = ad - bc \tag{8.24}$$

Das relações de Girard temos que

$$\tau = \xi_1 + \xi_2, \qquad \Delta = \xi_1\xi_2. \tag{8.25}$$

Se $\Delta < 0$ então há duas possibilidades: $\xi_1 < 0$ e $\xi_2 > 0$ ou $\xi_1 > 0$ e $\xi_2 < 0$. Em ambos os casos a origem é um ponto de sela, portanto instável. Já se $\Delta > 0$ então também temos dois casos: $\xi_1 > 0$ e $\xi_2 > 0$, correspondendo a um nó ou foco instável; $\xi_1 < 0$ e $\xi_2 < 0$, para um nó ou foco estável. No primeiro caso $\tau > 0$ e no segundo $\tau < 0$. Resumindo, o ponto de equilíbrio na origem será estável se

$$\Delta > 0, \qquad \tau < 0. \tag{8.26}$$

Como a solução da equação (8.23) é dada por

$$\xi_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}, \tag{8.27}$$

a condição para os autovalores serem reais é que

$$|\tau| > 2\sqrt{\Delta}, \tag{8.28}$$

que, combinada a (8.26), permite-nos distinguir as regiões no plano $\tau \times \Delta$ correspondentes a cada tipo de ponto de equilíbrio visto nesta sub-seção [Fig. 8.3].

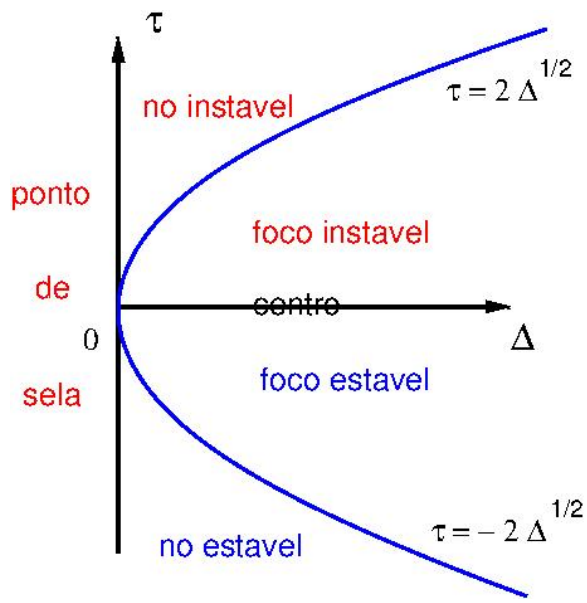

Figura 8.3: Tipos de pontos de equilíbrio no diagrama traço *versus* determinante.

8.4 Exemplos

Nesta seção vamos obter a solução geral de alguns fluxos bidimensionais lineares, a partir da metodologia esboçada anteriormente. Alguns casos de estabilidade serão vistos. Inicialmente consideramos o sistema

$$\dot{x} = -4x + y, \tag{8.29}$$
$$\dot{y} = 3x - 2y, \tag{8.30}$$

para o qual a matriz dos coeficientes é

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \tag{8.31}$$

cujos autovalores (reais e distintos) são $\xi_1 = -1 < 0$ e $\xi_2 = -5 < 0$, de modo que o ponto de equilíbrio na origem é um nó estável. Os autovetores (não normalizados) associados a $\xi_{1,2}$ são, respectivamente,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{8.32}$$

Para situações como esta, a solução geral do fluxo linear é dada por (8.11),

$$\mathbf{v}(t) = c_1\, e^{-t}\, \mathbf{u}_1 + c_2\, e^{-5t}\, \mathbf{u}_2, \tag{8.33}$$

que, em vista de (8.40), fornece

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t}, \tag{8.34}$$

$$y(t) = 3c_1 e^{-t} - c_2 e^{-5t}. \tag{8.35}$$

As constantes de integração c_1 e c_2 são determinadas pelas condições iniciais (x_0, y_0) Fazendo $t = 0$ em (8.34)-(8.35) obtemos um sistema linear, cuja solução é

$$c_1 = \frac{1}{4}(x_0 + y_0), \qquad c_2 = \frac{1}{4}(3x_0 - y_0). \tag{8.36}$$

Outro exemplo é

$$\dot{x} = -x + y, \tag{8.37}$$

$$\dot{y} = 3x + y, \tag{8.38}$$

correspondente à matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.39}$$

cujos autovalores são $\xi_1 = 2 > 0$ e $\xi_2 = -2 < 0$, donde a origem é um ponto de sela. Os autovetores (não normalizados) a eles associados são:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.], \tag{8.40}$$

e correspondem às direções invariantes instável e estável, respectivamente, que emanam da origem. De (8.11), a solução geral do fluxo linear é

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}, \tag{8.41}$$

$$y(t) = 3c_1 e^{2t} - c_2 e^{-2t}, \tag{8.42}$$

onde as constantes de integração c_1 e c_2 são dadas por

$$c_1 = \frac{1}{4}(x_0 + y_0), \qquad c_2 = \frac{1}{4}(3x_0 - y_0). \tag{8.43}$$

em termos das condições iniciais.

O caso de autovalores complexos conjugados é exemplificado pelo fluxo linear

$$\dot{x} = x + 5y, \tag{8.44}$$

$$\dot{y} = -x - 3y, \tag{8.45}$$

A matriz dos coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \tag{8.46}$$

tem autovalores $\xi_{1,2} = \mu \pm \omega i = -1 - \pm i$, com autovetores complexos

$$\mathbf{u}_{1,2} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \pm i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{a} \pm \mathbf{b}i. \tag{8.47}$$

Como $\mu = -1$ e $\omega = 1$, a origem será um foco estável.

No caso de autovalores complexos, a solução geral do fluxo linear será dada por (8.15) como

$$\mathbf{v}(t) = c_1 e^{-t}(\mathbf{a}\cos t - \mathbf{b}\sin t) + c_2 e^{-t}(\mathbf{a}\sin t + \mathbf{b}\cos t), \tag{8.48}$$

que, devido a (8.47), conduz a

$$x(t) = 5e^{-t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t), \tag{8.49}$$

$$y(t) = c_1 e^{-t}(-2\cos t - \sin t) + c_2 e^{-t}(-2\sin t + \cos t) \tag{8.50}$$

onde as constantes são

$$c_1 = \frac{x_0}{5}, \qquad c_2 = \frac{2x_0}{5} + y_0. \tag{8.51}$$

Um exemplo correspondente ao caso de autovalores iguais é o fluxo linear

$$\dot{x} = 3x - 4y, \tag{8.52}$$

$$\dot{y} = x - y, \tag{8.53}$$

Pode-se verificar que $\xi = 1$ é o único autovalor da matriz dos coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{8.54}$$

correspondente ao autovetor

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.55}$$

Inicialmente determinamos o vetor $\mathbf{w}$, que satisfaz (8.20) que, com $\xi = 1$ e (8.55), resulta em

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{8.56}$$

cuja solução é $w_x = 3$ e $w_y = 1$. De (8.22) a solução geral será

$$x(t) = e^t[2c_1 + c_2(3 + 2t)], \tag{8.57}$$

$$y(t) = e^t[c_1 + c_2(1 + t)] \tag{8.58}$$

onde

$$c_1 = -x_0 - y_0, \qquad c_2 = x_0 + 2y_0. \tag{8.59}$$

Como $\xi = 1 > 0$ a origem é um nó instável degenerado.

8.5 Fluxos bidimensionais não-lineares

Fluxos bidimensionais são sistemas de duas equações diferenciais ordinárias acopladas nas variáveis dinâmicas $x(t)$ e $y(t)$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y), \tag{8.60}$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x,y), \tag{8.61}$$

Definindo os vetores

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}, \tag{8.62}$$

escrevemos o fluxo bidimensional na forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{v}). \tag{8.63}$$

O vetor de pontos de equilíbrio $\mathbf{v}^*$ satisfaz

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}^*) = \mathbf{0}, \tag{8.64}$$

equivalente ao sistema de equações

$$f(x^*,y^*) = 0, \qquad g(x^*,y^*) = 0. \tag{8.65}$$

8.5.1 Estabilidade do ponto de equilíbrio

Considerando uma solução na vizinhança do ponto de equilíbrio

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}^* + \delta\mathbf{v}(t), \tag{8.66}$$

onde

$$\delta\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \delta x(t) \\ \delta y(t) \end{pmatrix}, \tag{8.67}$$

é um vetor de deslocamentos tal que $|\delta\mathbf{v}| \ll |\mathbf{v}|$. Expandimos o campo vetorial $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\mathbf{v})$ nas vizinhanças do ponto de equilíbrio, de forma análoga a que empregamos no Cap. 3 para mapas bidimensionais:

$$\frac{d\mathbf{v}^*}{dt} + \frac{d(\delta\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{v}^* + \delta\mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{v}^*) + \mathbf{J}(\mathbf{v}^*)\cdot\delta\mathbf{v} + \ldots,$$

onde $\mathbf{J}(\mathbf{v}^*)$ é a matriz Jacobiana do fluxo, cujos elementos são calculados no ponto de equilíbrio. Temos, assim, um fluxo linearizado

$$\frac{d(\delta\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{J}(\mathbf{v}^*)\cdot\delta\mathbf{v}, \tag{8.68}$$

cujo ponto de equilíbrio $\delta\mathbf{v}^* = \mathbf{0}$, correspondente a $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$, pode ter sua estabilidade determinada pelos autovalores de $\mathbf{J}(\mathbf{v}^*)$. Na verdade, como veremos na sequência, isto só é verdade se os autovalores tiverem parte real diferente de zero. Caso contrário a aproximação linear pode não ser suficiente para a determinação da estabilidade do ponto de equilíbrio.

Um exemplo de análise linear de estabilidade é dado pelo fluxo bidimensional não-linear

$$\dot{x} = 4y^2 - x^2 \tag{8.69}$$

$$\dot{y} = 2y - 2 \tag{8.70}$$

cujos pontos de equilíbrio são $P_1 : (x_1^* = 2, y_1^* = 1)$ e $P_2 : (x_2^* = -2, y_2^* = 1)$. A matriz Jacobiana é

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \partial\dot{x}/\partial x & \partial\dot{x}/\partial y \\ \partial\dot{y}/\partial x & \partial\dot{y}/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & 8y \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{8.71}$$

Os autovalores de $\mathbf{J}$ para o ponto de equilíbrio P_1 são $\xi_1 = -4 < 0$ e $\xi_2 = 2 > 0$, de modo que será um ponto de sela, portanto instável. Os autovetores serão as soluções da equação

$$\begin{pmatrix} -4-\xi & 8 \\ 0 & 2-\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.72}$$

Para o autovalor $\xi_1 = -4$ obtemos $u_y = 0$. Escolhendo $u_x = 1$, o autovetor correspondente é

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8.73}$$

e que determina, portanto, a direção invariante estável E^s que emana do ponto de sela. O outro autovalor, $\xi_2 = 2$, é tal que $u_x = 4u_y/3$. Escolhendo $u_y = 3/4$ então $u_x = 1$, de modo que o autovetor associado (ou seja, a direção invariante instável E^u) é

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \end{pmatrix}, \tag{8.74}$$

Os autovalores da matriz Jacobiana para o ponto de equilíbrio P_2 são $\xi_1 = 4 > 0$ e $\xi_2 = 2 > 0$, que será um nó instável, com autovetores correspondentes

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/4 \end{pmatrix}. \tag{8.75}$$

Na Fig. **??** esboçamos o comportamento das trajetórias no plano de fase nas vizinhanças de ambos os pontos de equilíbrio.

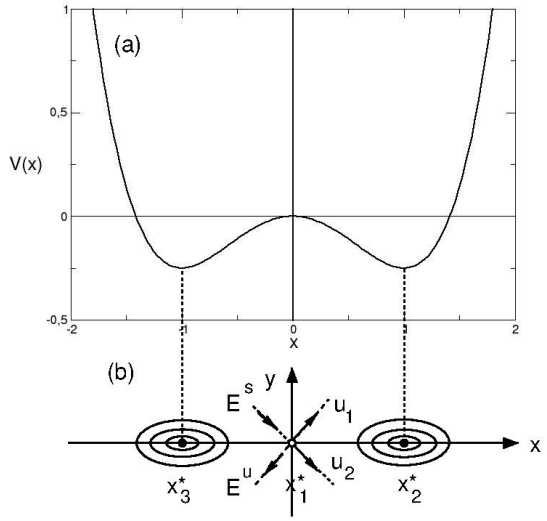

Figura 8.4: (a) Energia potencial $U(x) = -x^2/2 + x^4/4$; (b) Pontos de equilíbrio no plano de fase yx.

8.6 Equação de Duffing

Os fluxos bidimensionais aparecem, por exemplo, na descrição do movimento unidimensional de uma partícula de massa m sob o efeito de uma força conservativa $F(x)$, derivável de uma energia potencial $U(x)$. A segunda lei de Newton leva à equação do movimento

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}, \tag{8.76}$$

que pode ser expressa na forma de um fluxo bidimensional (faremos $m = 1$ sem perda de generalidade)

$$\frac{dx}{dt} = y, \tag{8.77}$$

$$\frac{dy}{dt} = -U'(x), \tag{8.78}$$

cujos pontos de equilíbrio são $y^* = 0$ e $U'(x^*) = 0$. Nestes pontos, correspondentes a extremos da energia potencial, a partícula está em repouso, logo podem ser identificados como as posições onde a partícula está em equilíbrio estático.

Vamos examinar com atenção o caso de uma energia potencial na forma [Fig. **??**(a)]

$$U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4, \tag{8.79}$$

que corresponde a uma força $F(x) = x - x^3$, que pode ser interpretada como a resposta de uma mola não-linear com rigidez negativa, o que não é usual. Mas há outros sistemas físicos que podem ser descritos por esta equação. Moon e Holmes [64] consideraram um sistema magnetoelástico onde uma barra engastada em uma das suas extremidades sofre deflexões elásticas sob a ação do campo magnético não-uniforme produzido por dois ímãs permanentes. Considerando apenas um modo de vibração da placa, Moon e Holmes mostraram que a deflexão da extremidade livre da placa satisfaz à equação

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = 0, \tag{8.80}$$

também chamada equação de Duffing. Na ausência de forças dissipativas ($\delta = 0$) a equação de Duffing reduz-se ao fluxo bidimensional

$$\dot{x} = y \tag{8.81}$$

$$\dot{y} = x - x^3, \tag{8.82}$$

correspondente à energia potencial (8.79). Para resolver esta equação, devemos especificar ainda as condições iniciais $(x(0), y(0))$.

Os pontos de equilíbrio do sistema são $x_1^* = 0$ e $x_{2,3}^* = \pm 1$, com $y^* = 0$ para todos eles. A matriz Jacobiana correspondente é

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.83}$$

No ponto de equilíbrio $\mathbf{v}*_1 = (0,0)$ a matriz Jacobiana é

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}*_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.84}$$

cujos autovalores no são $\xi_1 = 1$ e $\xi_2 = -1$, de maneira que $(0,0)$ é um ponto de sela. As direções invariantes são dadas pelos autovetores da matriz Jacobiana,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{8.85}$$

correspondendo às direções instável E^u e estável E^s, respectivamente, que emanam da origem [Fig. **??**(b)].

Os autovalores da matriz Jacobiana nos pontos de equilíbrio $x_{2,3}^* = \pm 1$ são imaginários puros $\xi_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$, portanto ambos são centros (estáveis) na aproximação linear [Fig. **??**(b)]. No entanto, estes pontos permanecem centros na presença de termos não-lineares, uma vez que ambos são mínimos da energia potencial, como podemos inferir da Fig. 8.4. Como a força é conservativa neste caso, então a energia total da partícula

$$E = \frac{1}{2}y^2 + U(x) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4, \tag{8.86}$$

é uma constante do movimento. Assim, dada uma condição inicial (x_0, y_0) a trajetória do sistema no plano de fase é tal que

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{2}y_0^2 - \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{4}x_0^4 \tag{8.87}$$

donde as trajetórias em torno do centro são fechadas mesmo fora da aproximação linear. Dizemos, então, que são centros não-lineares em vista da constância da energia.

8.6.1 Efeito de um termo dissipativo

Naturalmente este argumento não pode mais ser empregado se a partícula estiver sujeita a forças dissipativas, como por exemplo o atrito viscoso (proporcional à velocidade da partícula). Neste caso, a equação de Duffing (8.80) corresponde ao fluxo

$$\dot{x} = y \tag{8.88}$$

$$\dot{y} = x - x^3 - \delta y, \tag{8.89}$$

onde $\delta > 0$ é um coeficiente de dissipação. No caso do sistema estudado por Moon e Holmes, este termo pode representar a resistência do ar às vibrações da barra magnetoelástica.

Como $y^* = 0$, os pontos de equilíbrio são os mesmos do sistema conservativo, descrito anteriormente. A matriz Jacobiana, porém, será agora

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & -\delta \end{pmatrix}. \tag{8.90}$$

No ponto de equilíbrio $(x_1^* = 0, y_1^* = 0)$ a matriz Jacobiana

$$\mathbf{J}(x_1^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\delta \end{pmatrix} \tag{8.91}$$

tem autovalores

$$\xi_{1,2} = -\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + 1}. \tag{8.92}$$

Como $\delta > 0$, então $0 < \xi_1 < 1$ e $\xi_2 < -1$, donde os autovalores são reais e têm sinais opostos: o equilíbrio continua sendo um ponto de sela.

Para os outros dois pontos de equilíbrio $(x_{2,3}^* = \pm 1, y_{2,3}^* = 0)$ a matriz Jacobiana

$$\mathbf{J}(x_{2,3}^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\delta \end{pmatrix} \tag{8.93}$$

possui autovalores

$$\xi_{1,2} = -\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - 2}. \tag{8.94}$$

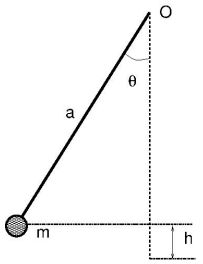

Figura 8.5: Pêndulo

Se $0 < \delta < \sqrt{8}$ ambos são complexos conjugados, com parte real negativa, de modo que os pontos de equilíbrio (na presença da dissipação) tornam-se focos estáveis. Se $\delta > \sqrt{8}$, os autovalores tornam-se reais e negativos, tal que os pontos de equilíbrio passam a ser nós estáveis. Essa mudança de estabilidade é uma consequência da introdução do termo de amortecimento, o que nos impossibilita o uso da energia como quantidade conservada.

8.7 Pêndulo

No pêndulo, uma partícula de massa m está na extremidade de uma haste rígida sem massa de comprimento ℓ, cuja posição é descrita pelo ângulo θ em relação à direção vertical. Será conveniente limitar o domínio de θ ao intervalo $(-\pi, +\pi]$. O momento de inércia da haste é $I = m\ell^2$, de maneira que a equação de movimento para a rotação do pêndulo em torno de um eixo que passa pelo seu ponto de suspensão é

$$I\ddot{\theta} = N_0 \Rightarrow m\ell^2\ddot{\theta} = mg\ell\sin\theta, \tag{8.95}$$

onde $N = mg\ell\sin\theta$ é o torque da força peso e desprezamos todos os atritos.

Definindo a frequência angular

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \tag{8.96}$$

a equação (8.95) é reescrita na forma

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0, \tag{8.97}$$

onde devemos especificar as condições iniciais $(\theta(0), \dot{\theta}(0))$.

Fazendo $\omega_0 = 1$, sem perda de generalidade, a equação de movimento pode ser reescrita na forma de um fluxo bidimensional

$$\dot{\theta} = v, \tag{8.98}$$

$$\dot{v} = -\sin\theta. \tag{8.99}$$

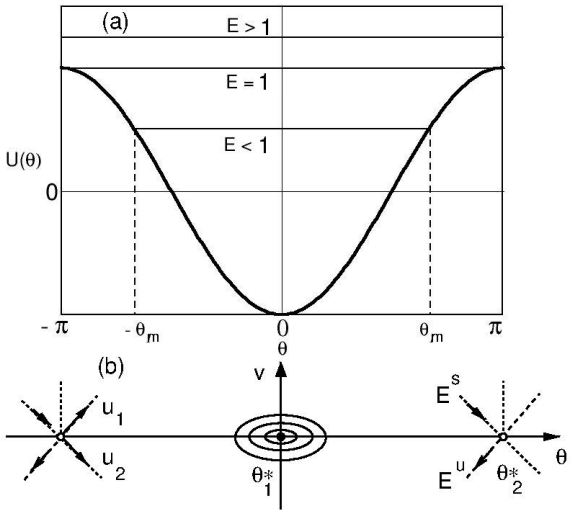

Figura 8.6: (a) Energia potencial do pêndulo em função do ângulo θ. (b) Pontos de equilíbrio no plano de fase.

Os pontos de equilíbrio são dados por $v^* = 0$ e $\sin\theta^* = 0$, donde $\theta_1^* = 0$ e $\theta_2^* = \pi$. Observe que o ponto $\theta = -\pi$ coincide com $\theta = \pi$, como nos fluxos unidimensionais no círculo.

A matriz Jacobiana do fluxo é

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{8.100}$$

Para o ponto de equilíbrio $(\theta_1^* = 0, v_1^* = 0)$ a matriz Jacobiana torna-se

$$\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.101}$$

cujos autovalores (imaginários puros) são $\xi_{1,2}^* = \pm i$, de forma que trata-se de um centro [Fig. 9.23(b)]. Já o ponto $(v_2^* = 0, \theta_2^* = \pi)$ é tal que

$$\mathbf{J}(0,\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.102}$$

cujos autovalores (reais) são $\xi_{1,2}^* = \pm 1$, ou seja, é um ponto de sela. Como (8.102) é idêntica a (8.84), os autovetores são dados por (8.103), especificando as direções invariantes instável e estável, respectivamente [Fig. 9.23(b)]

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{8.103}$$

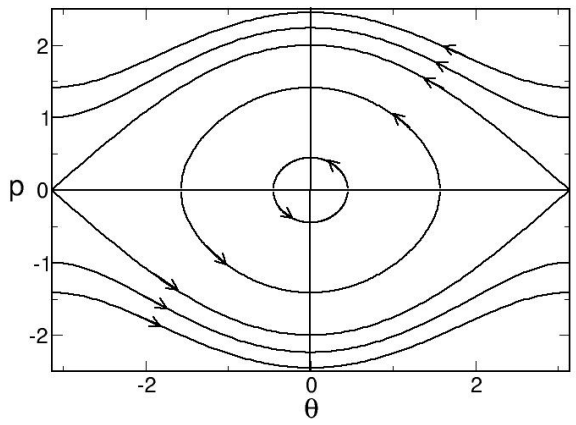

Figura 8.7: Algumas trajetórias de fase do pêndulo para diferentes valores da sua energia.

Como não há forças dissipativas envolvidas aqui, podemos fazer uma análise das trajetórias do pêndulo no plano de fase $\theta - v$ a partir da conservação de energia, dada por

$$E = \frac{1}{2}v^2 + U(\theta) = \frac{1}{2}v^2 - \cos\theta, \tag{8.104}$$

Se adotamos uma condição inicial (θ_0, v_0), então

$$\frac{1}{2}v^2 - \cos\theta = \frac{1}{2}v_0^2 - \cos\theta_0 = E \tag{8.105}$$

de forma que, para cada condição inicial adotada, há um único valor da energia E. Assim, podemos traçar as trajetórias resolvendo (8.105) para v como função de θ. Conforme o valor da energia E há três tipos de movimentos [Fig. 8.7]:

1. se $-1 \leq E < 1$ o pêndulo tem oscilações (librações) limitadas a um intervalo $-\theta_m \leq \theta \leq \theta_m$, onde θ_m é a amplitude. Pode-se mostrar que o período destas oscilações aumenta com a amplitude. No plano de fase, as librações correspondem a trajetórias fechadas em torno do centro que, devido à conservação de energia, assim permanece no caso não-linear.

2. se $E > 1$ o movimento do pêndulo consiste de rotações não-uniformes (para as quais a velocidade não é constante). No plano de fase as trajetórias são abertas. Na verdade, como identificamos os pontos $+\pi$ e $-\pi$, as trajetórias fecham-se numa superfície de fase cilíndrica. Estes pontos foram identificados como pontos de sela;

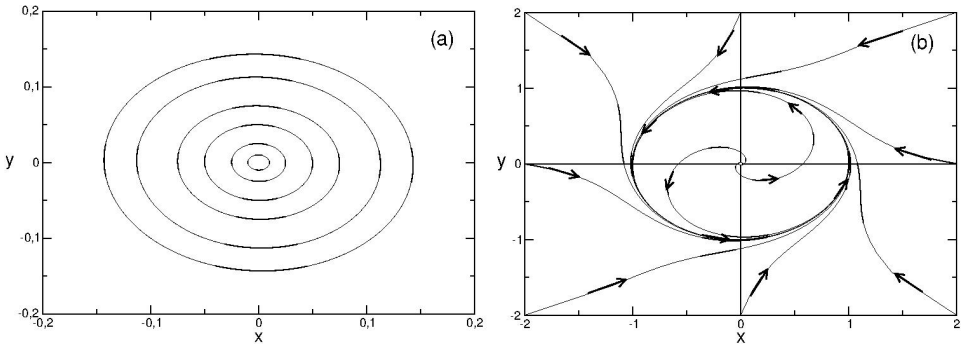

Figura 8.8: (a) Centro, (b) ciclo-limite atrativo.

3. se $E = 1$ temos uma separatriz que segrega as trajetórias fechadas das abertas. O período na separatriz é infinito. Os ramos da separatriz, nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio ($p^* = 0, \theta^* = \pm\pi$), coincidem com as direções estável e instável determinadas pela análise linear da estabilidade.

8.8 Trajetórias fechadas

Há dois tipos de trajetória fechada num fluxo bidimensional: (i) as trajetórias em torno de um centro; e (ii) os ciclos-limite. Em ambos os casos, elas correspondem à soluções periódicas do modelo que repetem-se ciclicamente após um dado período T:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t+T)$$

onde T é um número real, ao contrário de mapas, onde os períodos só podem ser inteiros não-negativos.

As trajetórias fechadas em torno de um centro não são isoladas, pois na vizinhança de uma trajetória sempre haverá outra, não importa o quão próximo elas estejam [Fig. 8.8(a)]. Os ciclos-limite, por outro lado, são trajetórias fechadas isoladas, para as quais convergem ou divergem trajetórias próximas a elas. Um ciclo-limite pode ser estável (instável), quando atrai (repele) as trajetórias que se originam de pontos na sua proximidade [Fig. 8.8(b)].

Um exemplo de ciclo-limite ocorre para o fluxo bidimensional

$$\frac{dx}{dt} = ax(1-x^2-y^2) - y, \tag{8.106}$$

$$\frac{dy}{dt} = ay(1-x^2-y^2) + x. \tag{8.107}$$

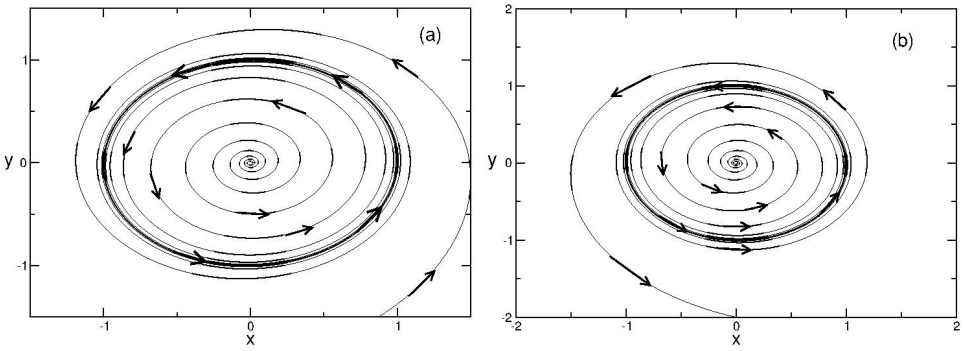

Figura 8.9: Ciclo-limite (a) estável ($a = 0,1$), (b) instável ($a = -0,1$).

Aqui será mais conveniente trabalharmos em coordenadas polares no plano (r,θ), relacionadas às coordenadas cartesianas como

$$x = r\cos\theta, \tag{8.108}$$
$$y = r\sin\theta, \tag{8.109}$$

que podem ser invertidas

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{8.110}$$

Derivando x e y em relação ao tempo, e levando em conta que ambas são funções das coordenadas r e θ, temos

$$\frac{dx}{dt} = \cos\theta\,\dot{r} - r\sin\theta\,\dot{\theta}, \tag{8.111}$$
$$\frac{dy}{dt} = \sin\theta\,\dot{r} + r\cos\theta\,\dot{\theta}. \tag{8.112}$$

Multiplicando (8.111) por $\cos\theta$, (8.112) por $\sin\theta$ e somando membro a membro, obtemos a primeira das seguintes equações

$$\frac{dr}{dt} = \cos\theta\,\dot{x} + \sin\theta\,\dot{y} = \frac{x}{r}\dot{x} + \frac{y}{r}\dot{y}, \tag{8.113}$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \cos\theta\,\frac{\dot{y}}{r} - \sin\theta\,\frac{\dot{x}}{r} = \frac{x}{r^2}\dot{y} - \frac{y}{r^2}\dot{x}, \tag{8.114}$$

sendo que a segunda pode ser obtida analogamente, multiplicando (8.111) por $-\sin\theta$, (8.112) por $\cos\theta$ e novamente somando as duas.

Após algumas manipulações algébricas o sistema (8.106)-(8.107) assume, então, a seguinte forma em coordenadas polares:

$$\frac{dr}{dt} = f(r) = ar(1-r^2), \tag{8.115}$$
$$\frac{d\theta}{dt} = 1. \tag{8.116}$$

onde $r \geq 0$. Nestas coordenadas a parte radial reduz-se a um fluxo unidimensional, tal que os pontos de equilíbrio de (8.115) são dados por $f(r^*) = 0$, que correspondem a $r^* = 0$ (ponto de equilíbrio na origem) e $r^* = 1$, que é ciclo-limite percorrido pelos pontos da trajetória com

$$\theta(t) = \theta(0) + t, \tag{8.117}$$

portanto no sentido anti-horário. Para determinar a estabilidade nós consideramos a derivada

$$f'(r) = a(1 - 3r^2), \tag{8.118}$$

de modo que $f'(r_1^* = 0) = a$ e $f'(r_2^* = 1) = -2a$. Portanto, se $a > 0$, $r_1^* = 0$ é ponto de equilíbrio repulsivo e $r_2^* = 1$ é um ciclo-limite atrativo [Fig. 8.9(a)]. Já se $a < 0$, $r_1^* = 0$ é ponto de equilíbrio atrativo e $r_2^* = 1$ é um ciclo-limite repulsivo [Fig. 8.9(b)].

8.9 Critérios para trajetórias fechadas

Há alguns critérios práticos para demonstrar a não-existência de trajetórias fechadas num fluxo bidimensional da forma

$$\dot{x} = f(x,y), \tag{8.119}$$
$$\dot{y} = g(x,y). \tag{8.120}$$

8.9.1 Critério de Bendixson

Considerando o campo vetorial

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \tag{8.121}$$

então a quantidade

$$D = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \tag{8.122}$$

pode ser interpretada como o divergente do campo vetorial, ou seja, $D = \div\mathbf{F}$.

Seja $\mathcal{D}$ uma região simplesmente conexa do plano de fase (isto é, se ela não tiver "buracos"). Pelo critério de Bendixson, se o divergente D não for identicamente nulo nem mudar de sinal na região $\mathcal{D}$, então o fluxo (8.119)-(8.120) não pode ter trajetórias fechadas que jazem inteiramente em $\mathcal{D}$ [8].

Como uma aplicação do critério de Bendixson, vamos considerar a equação de Duffing (8.123)-(8.124), para a qual

$$f(x,y) = y \tag{8.123}$$
$$g(x,y) = x - x^3 - \delta y. \tag{8.124}$$

O divergente do campo vetorial (8.122) é

$$D = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = -\delta \tag{8.125}$$

Como $\delta > 0$ então D não se anula nem troca de sinal no plano de fase, de modo que não haverá trajetórias fechadas. De fato, a linearização não revelou a presença de centros, que tornaram-se focos ou nós estáveis quando existe dissipação.

8.9.2 Critério de Dulac

Uma generalização (critério de Dulac) diz respeito à quantidade

$$D_B = \frac{\partial (Bf)}{\partial x} + \frac{\partial (Bg)}{\partial y}, \tag{8.126}$$

onde $B(x,y)$ é uma função contínua em D. Se D_B não for identicamente nulo nem mudar de sinal na região $\mathcal{D}$, então não podem existir trajetórias fechadas inteiramente em $\mathcal{D}$. Como um exemplo, seja o fluxo bidimensional

$$\dot{x} = y \tag{8.127}$$

$$\dot{y} = -x - y + x^2 + y^2 \tag{8.128}$$

para o qual escolhemos $B(x,y) = e^{-2x}$. Portanto

$$D_B = \frac{\partial (e^{-2x} y)}{\partial x} + \frac{\partial [e^{-2x}(-x - y + x^2 + y^2)]}{\partial y} = -2e^{-2x} y + e^{-2x}(-1 + 2y) = -e^{-2x} < 0,$$

de modo que não pode haver trajetórias fechadas neste caso.

8.9.3 Critério do índice

Outro critério que pode ser empregado na análise de trajetórias fechadas no plano de fase é o teorema do índice. Consideremos um caminho fechado Γ que não contém pontos de equilíbrio do fluxo bidimensional (não precisa ser uma trajetória do sistema). Em cada ponto do caminho Γ podemos associar uma flecha indicando o sentido do campo vetorial $\mathbf{F}(\mathbf{v}) = (f(x,y), g(x,y))$[Fig. 8.10]. Percorrendo Γ no sentido anti-horário, os vetores giram de um ângulo $2\pi k$, onde k é um número inteiro chamado o índice de Γ.

O ângulo ϕ (com o eixo x) formado pelos vetores em cada ponto de Γ é dado por

$$\tan \phi = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}. \tag{8.129}$$

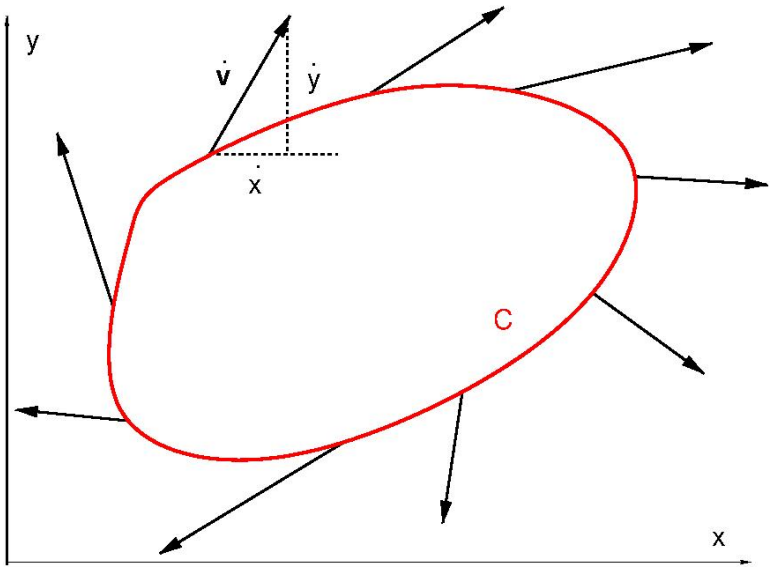

Figura 8.10: Definição do índice de uma curva fechada C no plano de fase.

Calculamos o índice de um caminho fechado Γ que não contém pontos fixos integrando (8.129) ao longo de Γ

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma d\phi = \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma d\left(\arctan\frac{g}{f}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma \frac{f\,dg - g\,df}{f^2+g^2} \end{aligned} \tag{8.130}$$

Por extensão, o índice de um ponto de equilíbrio $\mathbf{v}^*$ é o índice de uma curva fechada que envolve este (e somente este) ponto. Pode-se mostrar que:

- o índice de um nó, foco ou centro é $+1$;
- o índice de um ponto de sela é -1;
- o índice de uma trajetória fechada é $+1$
- o índice de uma curva fechada que não contém pontos de equilíbrio é 0;
- o índice de uma curva fechada é igual à soma dos índices dos pontos de equilíbrio no seu interior.

Consequentemente, qualquer trajetória fechada deve envolver um certo número de pontos de equilíbrio, cuja soma dos índices é igual a $+1$. Portanto, haverá sempre um ponto de equilíbrio no interior de qualquer tra-

jetória fechada no plano. Se só houver um único ponto de equilíbrio neste interior, ele não poderá ser um ponto de sela.

Um exemplo de aplicação deste critério é o fluxo

$$\dot{x} = xe^{-y}, \tag{8.131}$$

$$\dot{y} = 1 + x + y^2, \tag{8.132}$$

para o qual não há pontos de equilíbrio, pois se $x^* e^{-y^*} = 0$ então $x^* = 0$ e $y^* = \pm\sqrt{-1}$ não é real. Logo não podem existir trajetórias fechadas neste exemplo.

8.10 Teorema de existência e unicidade

Assim como no caso unidimensional, um teorema análogo de existência e unicidade vale para fluxos em qualquer número de dimensões, associados ao problema de valores iniciais

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{v}), \qquad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0. \tag{8.133}$$

Supondo que o campo vetorial $\mathbf{F}$ seja tal que tanto $f(x,y)$ e $g(x,y)$ como suas derivadas sejam contínuas para $\mathbf{v}$ pertencente ao domínio conexo $\mathcal{D}$. Então, para uma condição inicial $\mathbf{v}_0$ nesse domínio o problema de valor iniciais terá uma e somente uma solução $\mathbf{v}(t)$ em algum intervalo de tempo $(-\tau,\tau)$ em torno de $t = 0$.

O teorema garante, pois, a existência de uma única solução para o fluxo bidimensional, desde que o campo vetorial seja continuamente diferenciável. A sequência de valores $(x(t),y(t))$ para t crescente ou decrescente pode ser pensada como uma trajetória no espaço de fase que contém a condição inicial $(x(0),y(0))$. Os métodos de solução numérica vistos no início do capítulo podem ser generalizados para duas dimensões.

Uma consequência importante do teorema é que trajetórias diferentes nunca se interceptam. Caso ela se interceptassem num certo ponto P do espaço então poderíamos encarar P como uma condição inicial associada a duas soluções diferentes que emanam de P, o que violaria a unicidade.

Essa proibição de cruzamentos limita bastante o tipo de trajetórias que podem existir em duas dimensões. Se tivermos uma órbita fechada $\mathcal{C}$ no plano de fase, e uma condição inicial no seu interior, então a trajetória gerada a partir dessa condição inicial estará aprisionada no interior de $\mathcal{C}$.

Há duas situações possíveis nesse caso: se houver um ponto de equilíbrio atrativo $\mathbf{v}^*$ no interior de $\mathcal{C}$, a trajetória que emana da condição inicial irá convergir a $\mathbf{v}^*$ [Fig. 8.11(a)]. Mas se não houver ponto de equilíbrio atrativo no interior de $\mathcal{C}$ a trajetória originada lá dentro necessariamente irá tender

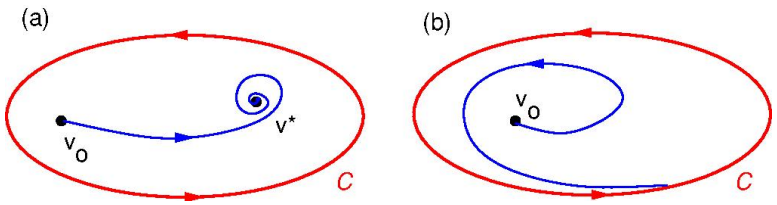

Figura 8.11: Trajetória fechada (a) com e (b) sem ponto de equilíbrio atrativo em seu interior.

à órbita fechada [Fig. 8.11(b)]. Essas limitações no comportamento das trajetórias são formalizadas pelo teorema de Poincaré-Bendixson: para campos vetoriais no plano, se uma trajetória é confinada a uma região fechada e limitada e se não houver pontos de equilíbrio atrativos nessa região, então a trajetória irá aproximar-se da órbita fechada.

8.11 Pontos fixos hiperbólicos

Os pontos de equilíbrio são hiperbólicos, no caso de fluxos contínuos, se forem diferentes de zero as partes reais dos autovalores da matriz Jacobiana, calculada no ponto de equilíbrio. Para pontos de equilíbrio hiperbólicos, a estabilidade é determinada pela sua linearização. Esse procedimento é formalizado pelo teorema de Hartman-Grobman para fluxos.

Se a matriz Jacobiana, calculada no ponto de equilíbrio $\mathbf{v}^*$, não tiver autovalores nulos ou com partes reais nulas, então existe um homeomorfismo $\mathbf{H}$ definido em alguma vizinhança $\mathcal{U}$ de $\mathbf{v}^*$ que associa localmente trajetórias do fluxo não-linear $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ a trajetórias do fluxo linearizado $\mathbf{J}(\mathbf{v}^*)\cdot\mathbf{v}$. O homeomorfismo $\mathbf{H}$ preserva os sentidos das trajetórias.

Caso o ponto de equilíbrio não seja hiperbólico, sua linearização não é suficiente para determinar sua estabilidade. Um exemplo é o "falso centro linear" exibido pelo fluxo bidimensional

$$\dot{x} = y, \tag{8.134}$$
$$\dot{y} = -x - \varepsilon x^2 y \tag{8.135}$$

que tem o ponto de equilíbrio na origem. A matriz Jacobiana

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-2\varepsilon xy & -\varepsilon x^2 \end{pmatrix}. \tag{8.136}$$

quando calculada no ponto de equilíbrio $(0,0)$ tem autovalores imaginários puros $\xi_1 = i$ e $\xi_2 = -i$, com parte real nula, logo o ponto de equilíbrio é não-hiperbólico. Pela classificação vista no caso linear, o ponto de equilíbrio corresponderia a um centro, ou seja, com estabilidade marginal.

No entanto, se considerarmos o efeito dos termos não-lineares, o que é feito tomando $\varepsilon \neq 0$, podemos ter dierentes comportamentos: se $\varepsilon > 0$ o ponto de equilíbrio torna-se um foco estável, e se $\varepsilon < 0$, ele será um foco instável. Então o centro linear é extremamente sensível à menor perturbação.

De maneira geral, os pontos de equilíbrio hiperbólicos são *robustos*, no sentido de que eles mantém sua estabilidade linear quando incluimos os termos não-lineares. Por outro lado, os pontos de equilíbrio não-hiperbólicos são *frágeis*, pois sua estabilidade é drasticamente alterada, mesmo para não-linearidade extremamente baixa ($\varepsilon \ll 1$ no exemplo dado).

8.12 Curvas invariantes

Um ponto de sela (hiperbólico) tem autovalores $\xi_1 < 0$ e $\xi_2 > 0$ com os autovetores correspondentes $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, que definem as direções estável e instável, respectivamente. Essas direções são invariantes e cruzam-se no ponto de equilíbrio.

Podemos definir, também, as chamadas curvas invariantes estável e instável que emanam do ponto de sela $\mathbf{v}^*$. A curva estável W^s é o conjunto de pontos que são invariantes sob a dinâmica do fluxo não-linear e que tendem ao ponto de equilíbrio com o passar do tempo:

$$W^s = \{\mathbf{v} \in \mathcal{U} | \mathbf{F}(\mathbf{v}(t)) \in \mathcal{U}\, \forall t \geq 0, \mathbf{F}(\mathbf{v}(t)) \to \mathbf{v}^*, t \to \infty\}. \tag{8.137}$$

Analogamente, a curva instável W^u é o conjunto de pontos que são invariantes e que tendem ao ponto de equilíbrio com o tempo revertido

$$W^u = \{\mathbf{v} \in \mathcal{U} | \mathbf{F}(\mathbf{v}(t)) \in \mathcal{U}\, \forall t \leq 0, \mathbf{F}(\mathbf{v}(t)) \to \mathbf{v}^*, t \to -\infty\}. \tag{8.138}$$

Pelo teorema das variedades invariantes, se $\mathbf{v}^*$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico, então existem curvas invariantes estável e instável $W^{s,u}$ que são tangentes às direções estável e instável $E^{s,u}$ e têm as mesmas dimensões que elas [Fig. 8.12].

Um exemplo onde as curvas invariantes podem ser determinadas analiticamente é o fluxo bidimensional

$$\dot{x} = x, \tag{8.139}$$

$$\dot{y} = -y + x^2 \tag{8.140}$$

cujo único ponto de equilíbrio é a origem $(0,0)$. A matriz Jacobiana é

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & -1 \end{pmatrix}, \tag{8.141}$$

cujos autovalores no ponto de equilíbrio são $\xi_1 = 1$ e $\xi_2 = -1$, correspondendo aos autovetores

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8.142}$$

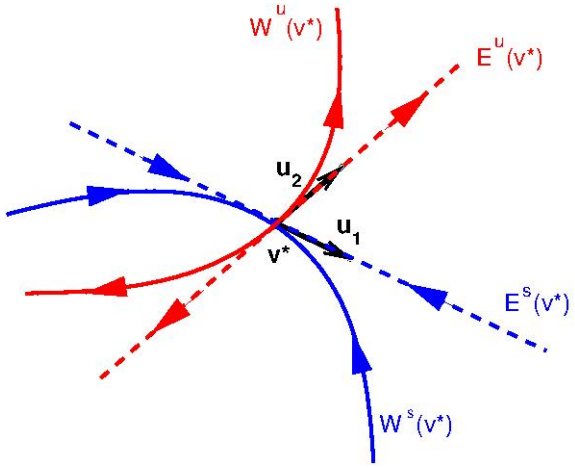

Figura 8.12: Curvas e direções invariantes para um ponto de sela do fluxo.

Reescrevendo as equações diferenciais na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-y+x^2}{x} = -\frac{y}{x} + x, \tag{8.143}$$

cuja solução é

$$y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}, \tag{8.144}$$

onde c é uma constante de integração.

Pelo teorema das variedades invariantes, a curva instável W^u é tangente à direção instável E^u na origem. Então, se W^u for representada pela curva $y = h(x)$, temos as condições $h(0) = h'(0) = 0$, que implicam em $c = 0$. A curva instável é, pois dada por $h(x) = x^2/3$, que é a parábola representada na Fig. 8.13. Se colocarmos a condição inicial exatamente na direção estável E^s, então $x(0) = 0$. Logo $\dot{x} = 0$ e $x(t) = 0$ para todos os tempos, donde a curva estável W^s coincide com a direção estável.

8.13 Trajetórias homoclínicas e heteroclínicas

O teorema de Poincaré-Bendixson impõe restrições severas ao tipo de trajetórias possíveis num fluxo bidimensional. Para tais sistemas os únicos tipos de dinâmica assintótica, ou seja, para $t \to \infty$, são

1. pontos de equilíbrio
2. órbitas fechadas (periódicas)
3. as uniões de pontos de equilíbrio com as trajetórias que as conectam.

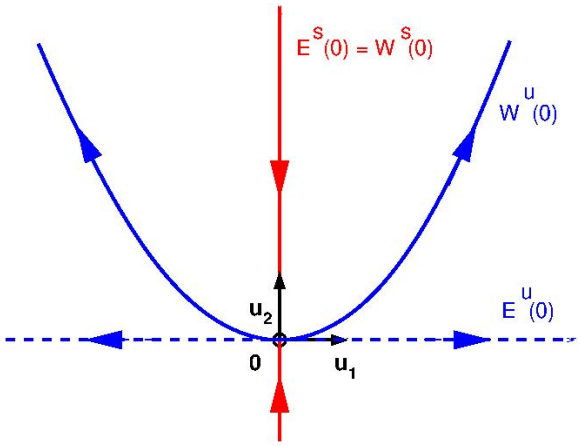

Figura 8.13: Curvas e direções invariantes para um ponto de sela.

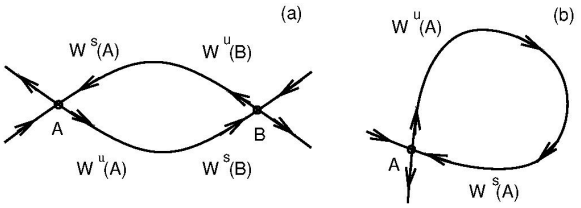

Figura 8.14: Órbitas (a) heteroclínicas, (b) homoclínicas.

Antes de mais nada, é importante enfatizar que esse teorema exclui, por exemplo, comportamento caótico. Uma diferença essencial entre mapas e fluxos é que, em mapas, caos já é possível no caso unidimensional. Já para fluxos, o comportamento caótico só é permitido para fluxos com três ou mais dimensões.

Se as trajetórias conectam diferentes pontos de equilíbrio, elas são ditas *órbitas heteroclínicas*, ao passo que as *órbitas homoclínicas* conectam o ponto de equilíbrio consigo mesmo. Como exemplos de órbitas heteroclínicas, temos os pontos de sela A e B na Fig. 8.14(a): a curva instável de B conecta-se suavemente com a curva estável de A, e a curva instável de A com a curva estável de B. Ambas conexões são órbitas heteroclínicas. Na Fig. 8.14(b) mostramos um exemplo de órbita homoclínica, que conecta as curvas estável e instável do mesmo ponto de equilíbrio A.

Continuando esse raciocínio baseado na física, podemos usar a conservação da energia total E da partícula, dada por

$$E = \frac{1}{2}v^2 + V(x) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4. \tag{8.145}$$

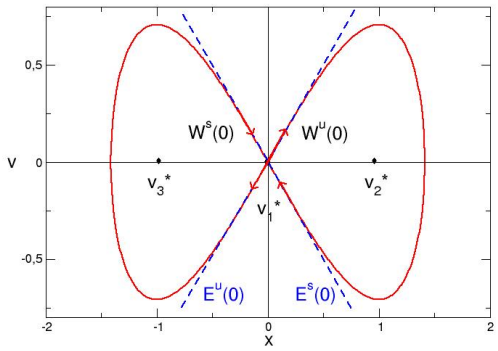

Figura 8.15: Trajetória homoclínica dupla.

Cada trajetória do sistema está associada a um dado valor da energia E, que pode ser expressa em termos das condições iniciais (x_0, v_0). Isolando a velocidade da partícula em função da posição temos uma equação para as trajetórias no plano de fase

$$v = \pm\sqrt{2E + x^2 - \frac{1}{2}x^4}. \tag{8.146}$$

A órbita homoclínica dupla que procuramos une ambos os ramos das curvas estável e instável que emanam do ponto de equilíbrio na origem. Pelo teorema das variedades invariantes, estas curvas devem ser tangentes às respectivas direções, cruzando-se na origem. Pondo $x = v = 0$ em (8.145) temos que a energia na origem é $E = 0$, de forma que a órbita homoclínica é obtida fazendo $E = 0$ em (8.146),

$$v = \pm x\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}. \tag{8.147}$$

que é mostrada na Fig. 8.15.

Algumas trajetórias dentro e fora da órbita homoclínica são mostradas na Fig. 8.16. As órbitas no interior são curvas fechadas que, ao aproximarem-se de $x = \pm 1$, são praticamente círculos, e a energia relacionada a elas é negativa. De fato, as órbitas $x = \pm 1$ são centros não-lineares, ou seja, são centros que sobrevivem aos termos não-lineares do fluxo. As órbitas fechadas fora da órbita homoclínica são associadas a energias positivas.

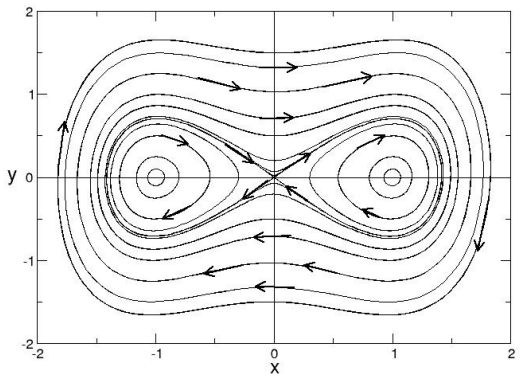

Figura 8.16: Trajetórias no plano de fase dentro e fora da órbita homoclínica.

8.14 Bifurcação de Hopf

Numa bifurcação de Hopf um ciclo-limite pode aparecer ou desaparecer, conforme um parâmetro é variado. A bifurcação de Hopf supercrítica transforma um ponto de equilíbrio atrativo num ciclo limite atrativo, ao mesmo tempo em que o ponto de equilíbrio torna-se repulsivo. Na bifurcação de Hopf os autovalores da matriz Jacobiana nos pontos de equilíbrio são complexos conjugados:

$$\xi_{1,2} = \mu \pm i\omega. \tag{8.148}$$

Se o ponto de equilíbrio for um foco estável então $\mu < 0$, e se for instável, $\mu > 0$.

O exemplo ilustrativo dessa bifurcação é, em coordenadas polares,

$$\dot{r} = \mu r - r^3, \tag{8.149}$$

$$\dot{\theta} = \omega + br^2 \tag{8.150}$$

Se transformarmos para coordenadas cartesianas, após algumas manipulações algébricas obteremos o sistema

$$\dot{x} = \mu x - \omega y + f(x,y), \tag{8.151}$$

$$\dot{y} = \omega x + \mu y + g(x,y), \tag{8.152}$$

onde $f(x,y)$ e $g(x,y)$ são termos cúbicos em x e y, cuja forma analítica não é necessária na presente discussão.

A matriz Jacobiana referente à parte linear do fluxo é

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}, \tag{8.153}$$

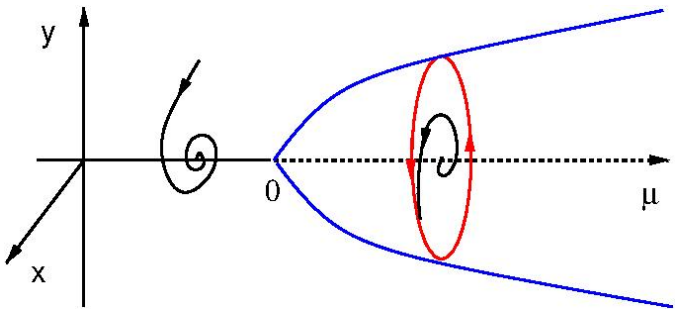

Figura 8.17: Diagrama de bifurcação de Hopf supercrítica.

cujos autovalores são $\xi_{1,2} = \mu \pm i\omega$.

As soluções de equilíbrio serão $r_1^* = 0$ e $r_2^* = \sqrt{\mu}$, sendo que a primeira é um ponto de equilíbrio, e a segunda um ciclo-limite. Se $\mu < 0$ só existe o ponto de equilíbrio, que é um foco estável. Se $\mu > 0$ o ponto de equilíbrio torna-se um foco instável, e surge um ciclo limite atrativo com raio $\sim \sqrt{\mu}$. O diagrama de bifurcações é esquematizado na Fig. 8.17.

8.15 Problemas

1. Considere os fluxos bidimensionais lineares a seguir. Para cada um deles: (a) determine a estabilidade de ponto de equilíbrio; (b) ache a solução, a partir das condições iniciais (x_0, y_0); (c) faça gráficos (não esboços) de $x(t)$, $y(t)$ e de $y(x)$.

   (a)
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

   (b)
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

   (c)
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

   (d)
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   (e)
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(f)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix},$$

(g)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(h)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(i)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix},$$

(j)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

2. Elabore um programa de computador ou use um software matemático de sua preferência para integrar, pelo método de Euler, o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + e^{-y}, \\ \dot{y} &= -y, \end{aligned}$$

com as condicoes iniciais $(x_0 = -1/2, y_0 = 1/4)$. Faça gráficos de $x(t)$, $y(t)$ e $y(x)$.

3. Considere o fluxo bidimensional não-linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -0,1x + 5y, \\ \dot{y} &= -\frac{20}{x} + 0,1y. \end{aligned}$$

(a) Determine os pontos de equilíbrio e sua estabilidade; (b) Ache as nulclinas e indique, no plano de fase, a direção do campo vetorial; (c) Resolva numericamente pelo método de Euler as equações para algumas condições iniciais e trace diagramas $y(x)$.

4. Idem para o sistema de equações

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(3 - x - 2y), \\ \dot{y} &= y(2 - x - y), \end{aligned}$$

5. Um fluxo bidimensional é chamado um *sistema gradiente* se tiver a forma $\dot{\mathbf{v}} + -\nabla V(\mathbf{r})$, ou seja, se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}. \end{aligned}$$

(a) Mostre que sistemas gradientes não possuem trajetórias fechadas (dica: suponha elas existam e mostre que isso leva a uma contradição);
(b) Mostre que o fluxos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(2x-y), \\ \dot{y} &= x(x-2y), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sin y, \\ \dot{y} &= x\cos y, \end{aligned}$$

são sistemas gradientes.

Notes

[7]Dizemos que $\mathbf{v}^*$ é estável no sentido de Lyapunov se, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para qualquer outra solução $\mathbf{v}(t)$ que satisfaz $d(0) < \delta$, então $d(t) < \varepsilon$ para todo $t > 0$. Já $\mathbf{v}^*$ é assintoticamente estável se é estável no sentido de Lyapunov e existe uma constante $b > 0$ tal que, se $d(0) < b$, então $\lim_{t\to\infty} d(t) = 0$.

[8]A demonstração dos critérios de Bendixson e Dulac pode ser encontrada em [**?**], seção 1.1.D

Capítulo 9

Fluxos tridimensionais

Nosso tratamento de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem chega ao caso tridimensional, ao contrário do que fizemos com mapas, porque a dinâmica de fluxos tridimensionais é bem mais rica, apresentando diversas características como comportamento caótico. De forma geral, o estudo de fluxos tridimensionais é uma generalização do caso bidimensional, mas há algumas peculiaridades que demandam uma atenção particular, razão pela qual apresentaremos este assunto *ab initio*.

9.1 Fluxos tridimensionais lineares

Um fluxo tridimensional linear é um sistema de trs equações diferenciais ordinárias de primeira ordem em relação ao tempo, na forma

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + cz + j, \tag{9.1}$$

$$\frac{dy}{dt} = dx + ey + fz + k, \tag{9.2}$$

$$\frac{dz}{dt} = gx + hy + iz + l, \tag{9.3}$$

onde (x, y, z) são as variáveis dependentes do tempo, e $a, \ldots l$ são constantes. Na notação vetorial adotada no Capítulo anterior, este fluxo é expresso como

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{B}, \tag{9.4}$$

onde o vetor das variáveis é

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{9.5}$$

e as matrizes dos coeficientes são

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix} \tag{9.6}$$

O ponto de equilíbrio deste fluxo é dado por (9.7)

$$\mathbf{v}^* = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}, \tag{9.7}$$

Assim como no Capítulo 8, podemos supor que $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ sem perda de generalidade, tal que

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \tag{9.8}$$

cujo ponto de equilíbrio é a origem $\mathbf{v}^* = \mathbf{0}$.

9.1.1 Estabilidade do ponto de equilíbrio na origem

Sabemos que a estabilidade do ponto de equilíbrio na origem pode ser determinada pelos autovalores da matriz dos coeficientes $\mathbf{A}$. Estes autovalores são as raízes da equação secular correspondente a (9.6)

$$\det(\mathbf{A} - \xi\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a-\xi & b & c \\ d & e-\xi & f \\ g & h & i-\xi \end{vmatrix} = 0, \tag{9.9}$$

Abrindo o determinante de terceira ordem, obtemos uma equação cúbica que podemos expressar na seguinte forma:

$$\xi^3 - \tau\xi^2 + \gamma\xi - \Delta = 0, \tag{9.10}$$

onde definimos

$$\tau = \operatorname{tr}\mathbf{A} = a + e + i, \tag{9.11}$$

$$\Delta = \det\mathbf{A} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - dbi, \tag{9.12}$$

$$\gamma = (ae - bd) + (ai - gc) + (ei - hf), \tag{9.13}$$

sendo o último termo a soma dos menores principais da matriz $\mathbf{A}$, ou seja, dos menores obtidos a partir dos elementos de sua diagonal principal.

Pelo teorema fundamental da álgebra, a equação secular (9.10) terá no máximo três raízes, reais ou complexas. Caso ela tenha uma raiz complexa, o seu complexo conjugado também será uma raiz. Há, então, três possibilidades:

- três raízes reais e distintas,
- uma raiz real e duas complexas conjugadas,

- duas raízes reais e iguais, e uma distinta.

Estudaremos cada um destes casos na próxima seção, do ponto de vista da solução do fluxo linear. Inicialmente iremos focalizar apenas o critério geral de estabilidade que, de forma similar ao Capítulo anterior, exige que todos os autovalores tenham partes reais negativas para que o ponto de equilíbrio na origem seja estável (atrativo). Não é necessário, com efeito, resolver a equação secular para essa determinação. O critério de Routh-Hurwitz (vide Apêndice D) estipula condições necessárias e suficientes para que as raízes da equação secular tenham partes reais negativas. No caso de fluxos tridimensionais, estas condições são

$$\tau < 0, \qquad \Delta < 0, \qquad \Delta - \gamma\tau > 0. \tag{9.14}$$

9.2 Sub-espaços invariantes

O conceito de direção invariante foi introduzido no estudo dos mapas e fluxos bidimensionais: são as direções no plano determinadas pelos autovetores da matriz dos coeficientes do sistema linear. No caso mais importante, que é o de ponto de sela, haverá uma direção estável e outra instável. Para fluxos, elas correspondem a autovalores com parte real negativa e positiva, respectivamente. Tais direções são invariantes pois quaisquer trajetórias iniciadas em pontos das retas que as indicam permanecem nestas retas para todos os tempos posteriores. Assim, uma condição inicial colocada exatamente sobre a direção estável (resp. instável) irá gerar uma trajetória que se aproxima (resp. afasta) da origem quando $t \to \infty$.

Esses conceitos podem ser generalizados para um fluxo tridimensional, que tem 3 autovalores (reais ou complexos), dos quais

- s autovalores têm partes reais negativas;
- u autovalores têm partes reais positivas;
- c autovalores têm partes reais nulas;

onde $s+u+c=3$. A estes autovalores estarão relacionados 3 autovetores correspondentes $\mathbf{u}_i$, $i=1,2,3$, que podem ser classificados da seguinte forma:

- s autovetores: $\mathbf{u}_1, \cdots \mathbf{u}_s$, que geral o sub-espaço estável E^s,
- u autovetores: $\mathbf{u}_{s+1}, \cdots \mathbf{u}_{s+u}$, que geral o sub-espaço instável E^u;
- c autovetores: $\mathbf{u}_{s+u+1}, \cdots \mathbf{u}_N$, que geral o sub-espaço central E^c ;

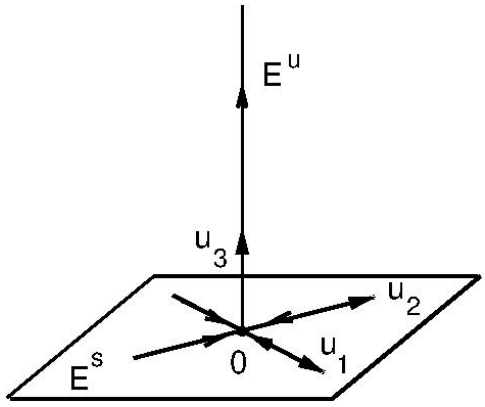

Figura 9.1: Sub-espaços estável e instável para o ponto de equilíbrio na origem.

Um exemplo é mostrado na Figura 9.5, para a qual $\xi_1 < 0$ e $\xi_2 < 0$, correspondendo aos autovetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, respectivamente. Estes dois autovetores geram o sub-espaço estável E^s, que é o plano que contém estes vetores. O sub-espaço instável E^u é a direção ao longo do autovetor $\mathbf{u}_3$, correspondente ao autovalor $\xi_3 > 0$. Não existe sub-espaço central E^c, neste caso.

Pode-se mostrar que os sub-espaços estável e instável são invariantes em relação ao fluxo tridimensional linear: se uma condição inicial $\mathbf{v}(0)$ for colocada exatamente em E^s (resp. E^u), a trajetória resultante permanecerá sempre nesse sub-espaço, e irá aproximar-se (resp. afastar-se) da origem quando $t \to \infty$. Assim, os sub-espaços estável e instável são generalizações diretas dos conceitos de direção estável e instável vistos para fluxos bidimensionais.

9.3 Solução do fluxo linear

A solução geral do fluxo linear

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \qquad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \tag{9.15}$$

é dada formalmente por

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 \exp(t\mathbf{A}), \tag{9.16}$$

onde a exponencial da matriz $\mathbf{A}$ pode ser entendida em termos de sua expansão em série

$$\exp(t\mathbf{A}) = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{1}{2!}t^2\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}t^3\mathbf{A}^3 + \ldots \tag{9.17}$$

A exponencial de uma matriz pode ser obtida de forma símples se ela estiver numa das chamadas formas de Jordan. Duas matrizes $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ são

ditas *semelhantes* se existir uma matriz inversível **T**, denominada "matriz de similaridade", tal que

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}, \tag{9.18}$$

Portanto, dada uma matriz **N**, podemos obter uma matriz semelhante **M**, por meio da seguinte *transformação de similaridade*.

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} \tag{9.19}$$

Matrizes semelhantes têm diversas propriedades interessantes. Por exemplo, pode-se mostrar que duas matrizes semelhantes têm autovalores idênticos. Na Álgebra Linear demonstra-se que uma matriz real **A** é semelhante a uma forma normal, dita *forma de Jordan*, dependendo da natureza de seus autovalores, como veremos a seguir.

9.3.1 Três autovalores reais e distintos

Suponhamos que a matriz **A** tenha três autovalores reais e distintos: ξ_1, ξ_2 e ξ_3, correspondendo aos autovetores linearmente independentes $\mathbf{u}_1$,$\mathbf{u}_2$, e $\mathbf{u}_3$, respectivamente. Podemos encontrar uma matriz de similaridade **T** que satisfaz

$$\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{D}, \tag{9.20}$$

tal que a matriz **A** é similar à seguinte forma de Jordan

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix}, \tag{9.21}$$

e que é uma matriz diagonal. Dizemos que a matriz **A** é diagonalizada por meio da transformação de similaridade **T**, que é obtida justapondo os três autovetores da matriz **A**, coluna a coluna.

$$\mathbf{T} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{array} \right). \tag{9.22}$$

A exponencial de uma matriz na forma de Jordan (9.21) é dada por

$$e^{t\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} e^{\xi_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\xi_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\xi_3 t} \end{pmatrix}. \tag{9.23}$$

Pode-se mostrar que matrizes semelhantes têm as mesmas potências. Como a exponencial de uma matriz nada mais é do que uma soma de um número infinito de potências, assim também se **A** é semelhante à matriz de Jordan (diagonal) **D**, então a matriz $e^{t\mathbf{A}}$ é semelhante a $e^{t\mathbf{D}}$.

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{T} \cdot e^{\mathbf{D}t} \cdot \mathbf{T}^{-1}, \tag{9.24}$$

Portanto, dada a solução geral (9.16) do fluxo linear (9.15), temos que

$$\mathbf{v}(t) = \left(\mathbf{T} \cdot e^{\mathbf{D}t} \cdot \mathbf{T}^{-1}\right) \cdot \mathbf{v}_0. \tag{9.25}$$

Definindo o vetor

$$\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{v}(t), \tag{9.26}$$

a Eq. (9.25) fica

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{D}t} \cdot \mathbf{z}(0), \tag{9.27}$$

cujas componentes são

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\xi_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\xi_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\xi_3 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ z_3(0) \end{pmatrix}, \tag{9.28}$$

o que desacopla as equações, fornecendo as soluções procuradas para o fluxo linear

$$z_1(t) = e^{\xi_1 t} z_1(0), \tag{9.29}$$
$$z_2(t) = e^{\xi_2 t} z_2(0), \tag{9.30}$$
$$z_3(t) = e^{\xi_3 t} z_3(0). \tag{9.31}$$

Desta maneira, podemos fazer uma classificação dos tipos de ponto de equilíbrio a partir dos valores (reais e distintos) dos autovalores da matriz **A**:

1. $\xi_1 < 0$, $\xi_2 < 0$, $\xi_3 < 0$: como os três fatores exponenciais $e^{\xi_i t}$ tendem a zero quando $t \to \infty$, então também $z_i(t) \to 0$, de modo que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. O sub-espaço estável E^s é, portanto, todo o espaço $\mathbb{R}^3$, não havendo sub-espaço instável. As trajetórias convergem para a origem [Fig. 9.2(a)].

2. $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$, e $\xi_3 > 0$: como as exponenciais divergem quando $t \to \infty$, assim também $z_i(t)$ tenderá ao infinito, e o ponto de equilíbrio na origem é instável ao longo das três direções, donde o sub-espaço instável E^u é todo o $\mathbb{R}^3$, e o sub-espaço estável E^s não existe [Fig. 9.2(b)].

3. $\xi_1 < 0$, $\xi_2 < 0$, $\xi_3 > 0$: tanto $z_1(t) \to 0$ como $z_2(t) \to 0$ quando t tende ao infinito, enquanto $z_3(t)$ diverge neste limite. O sub-espaço estável E^s é o plano gerado pelos autovetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ correspondentes a $\xi_{1,2}$; e o sub-espaço instável E^u é a direção definida pelo autovetor $\mathbf{u}_3$, correspondente a ξ_3. As trajetórias aproximam-se da origem ao longo de direções paralelas a E^s, e depois escapam ao longo de direções paralelas a E^u [Fig. 9.2(c)].

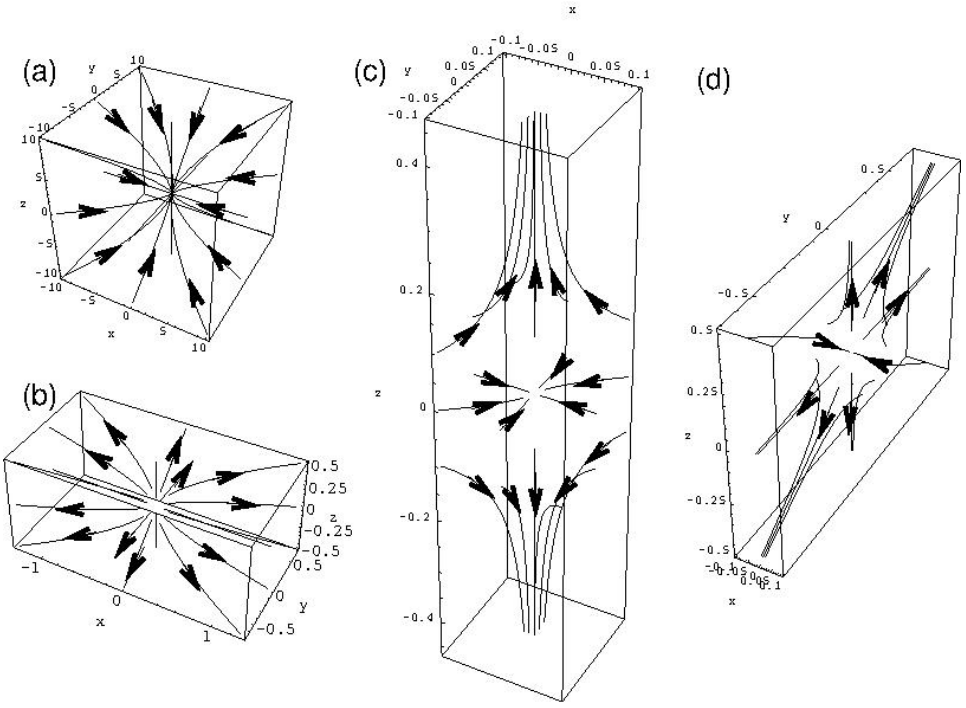

Figura 9.2: Trajetórias de um fluxo tridimensional linear para autovalores reais: (a) $\xi_1 = -0,8$, $\xi_2 = -0,6$, $\xi_3 = -0,5$; (b) $\xi_1 = 0,8$, $\xi_2 = 0,6$, $\xi_3 = 0,5$; (c) $\xi_1 = -0,8$, $\xi_2 = -0,6$, $\xi_3 = 0,5$; (d) $\xi_1 = -0,8$, $\xi_2 = 0,6$, e $\xi_3 = 0,5$.

4. $\xi_1 < 0$, $\xi_2 > 0$, $\xi_3 > 0$: o autovetor $\mathbf{u}_1$ gera o sub-espaço estável E^s, e $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$, o sub-espaço instável E^u, o qual é um plano. As trajetórias aproximam-se da origem ao longo de direções paralelas a $\mathbf{u}_1$ e afastam-se ao longo das outras direções [Fig. 9.2(d)].

Não existe sub-espaço central em nenhum destes casos. Além disso, apenas o primeiro caso corresponde a um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

9.3.2 Dois autovalores complexos e um real

Supomos, agora, que dois dos autovalores de $\mathbf{A}$ sejam complexos conjugados, dados por

$$\xi_1 = \mu + i\sigma, \qquad \xi_2 = \xi_1^* = \mu - i\sigma, \tag{9.32}$$

enquanto um terceiro autovalor ξ_3 é real. Neste caso, pode-se mostrar que a matriz $\mathbf{A}$ é similar a uma matriz diagonal em blocos de Jordan:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mu & -\sigma & 0 \\ \sigma & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix}, \tag{9.33}$$

onde o bloco 2×2 corresponde aos autovalores complexos e o elemento solteiro ao autovalor real.

A exponencial de um bloco de Jordan 2×2 relativo a um par de autovalores complexos pode ser efetuada a partir das séries de Taylor das funções seno e cosseno. Já a exponencial do elemento solteiro é semelhante ao caso anterior, de forma, a exponencial da matriz (9.33) fica

$$e^{\mathbf{D}t} = \begin{pmatrix} e^{\mu t}\cos(\sigma t) & e^{\mu t}\sin(\sigma t) & 0 \\ -e^{\mu t}\sin(\sigma t) & e^{\mu t}\cos(\sigma t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{\xi_3 t} \end{pmatrix}, \tag{9.34}$$

e que é, por sua vez, similar à matriz $e^{\mathbf{A}t}$.

Definindo o vetor $\mathbf{z}(t)$ como em (9.26), e substituindo (9.34), teremos para as suas componentes

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\mu t}\cos(\sigma t) & e^{\mu t}\sin(\sigma t) & 0 \\ -e^{\mu t}\sin(\sigma t) & e^{\mu t}\cos(\sigma t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{\xi_3 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ z_3(0) \end{pmatrix}, \tag{9.35}$$

ou seja,

$$z_1(t) = e^{\mu t}[\cos(\sigma t)z_1(0) + \sin(\sigma t)z_2(0)] \tag{9.36}$$

$$z_2(t) = e^{\mu t}[-\sin(\sigma t)z_1(0) + \cos(\sigma t)z_2(0)] \tag{9.37}$$

$$z_3(t) = e^{\xi_3 t}z_3(0), \tag{9.38}$$

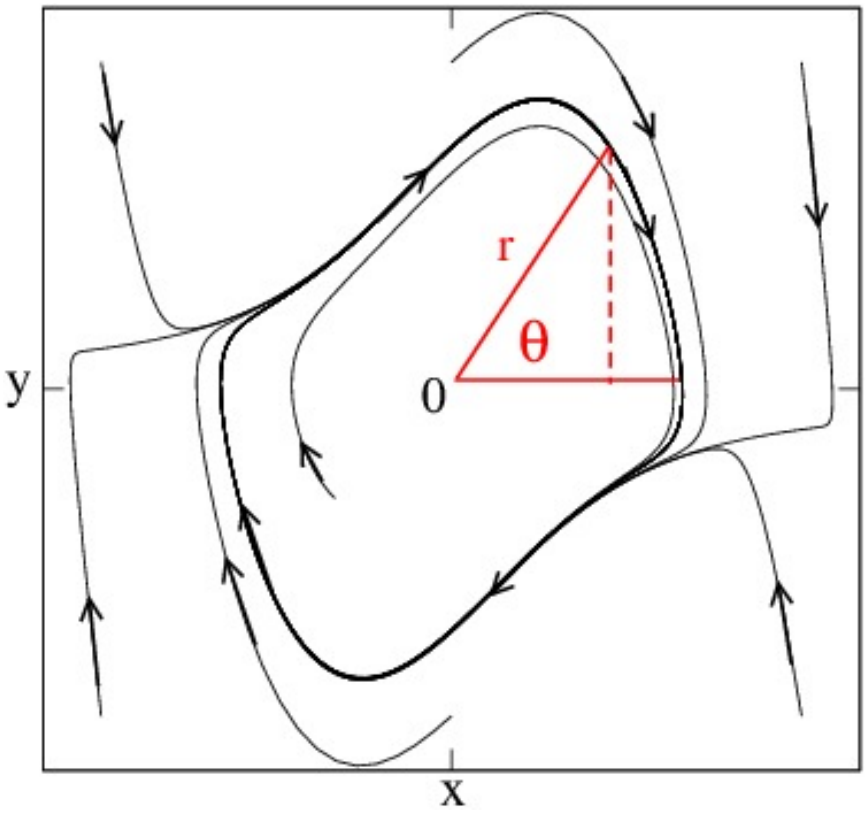

Figura 9.3: Trajetórias de um fluxo tridimensional linear para os seguintes autovalores: (a) $\mu = -0.5$, $\sigma = 3$, $\xi_3 = 0,3$; (b) $\mu = 0.5$, $\sigma = 3$, $\xi_3 = 0,3$; (c) $\mu = -0.5$, $\sigma = 3$, $\xi_3 = -0,3$; (d) $\mu = 0.5$, $\sigma = 3$, $\xi_3 = -0,3$

Os termos em seno e cosseno presentes na solução para z_1 e z_2 mostram uma rotação do vetor $\mathbf{z}(t)$ com frequência σ em torno da origem. A presença do termo exponencial, por sua vez, sugere que as trajetórias espiralam no plano determinado pelos autovetores $\mathbf{u}_{1,2}$. Combinando essa rotação com o movimento ao longo da direção determinada por $\mathbf{u}_3$ temos alguns casos de interesse:

1. $\mathrm{Re}(\xi_1) = \mathrm{Re}(\xi_2) = \mu < 0$, $\xi_3 > 0$: o sub-espaço estável E^s é o plano gerado por $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, e o sub-espaço instável E^u é a direção indicada por $\mathbf{u}_3$. O termo $e^{2\mu t}$ tende a zero quando $t \to \infty$, enquanto $e^{2\xi_3 t}$ aumenta indefinidamente. As trajetórias espiralam em direções paralelas a E^s e escapam na direção E^u [Fig. 9.3(a)].

2. $\mathrm{Re}(\xi_1) = \mathrm{Re}(\xi_2) = \mu > 0$, e $\xi_3 > 0$: o sub-espaço instável E^u é todo o $\mathbb{R}^3$ e não há sub-espaço estável. As trajetórias divergem para infinito tanto ao longo de $\mathbf{u}_3$ como por meio de espirais fugitivas [Fig. 9.3(b)].

3. $\mathrm{Re}(\xi_1) = \mathrm{Re}(\xi_2) = \mu < 0$, $\xi_3 < 0$: o sub-espaço estável E^s é todo o $\mathbb{R}^3$ e não há sub-espaço instável. As trajetórias serão combinações de espirais convergentes à origem com uma aproximação pela direção do autovetor [Fig. 9.3(c)].

4. $\mathrm{Re}(\xi_1) = \mathrm{Re}(\xi_2) = \mu > 0$, $\xi_3 < 0$: o sub-espaço instável E^u é gerado por $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, enquanto o sub-espaço estável E^s é a direção indicada por $\mathbf{u}_3$. As trajetórias aproximam-se ao longo de E^s mas têm espirais divergentes [Fig. 9.3(d)].

Dos quatro casos anteriores, apenas o terceiro corresponde a um ponto de equilíbrio estável.

9.3.3 Dois autovalores reais repetidos e outro distinto

Consideramos, agora, o caso onde há dois autovalores reais repetidos ($\xi_1 = \xi_2$) e um terceiro real porém distinto dos outros dois $\xi_3 \neq \xi_{1,2}$. A matriz $\mathbf{A}$ é similar a uma matriz diagonal em blocos de Jordan, com um elemento solteiro que refere-se ao terceiro autovalor real e diferente dos outros dois:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix}. \tag{9.39}$$

A exponencial de uma matriz-bloco de Jordan 2×2 da forma (9.39), é

$$e^{\mathbf{D}t} = \begin{pmatrix} e^{\mu t} & te^{\mu t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\xi_3} \end{pmatrix} \tag{9.40}$$

Da mesma forma que nos casos anteriormente abordados, as matrizes $e^{\mathbf{A}t}$ e $e^{\mathbf{D}t}$ são similares [vide Eq. (9.24)]. As componentes do vetor $\mathbf{z}(t)$ são obtidas substituindo (9.40) em (9.35):

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\mu t} & te^{\mu t} & 0 \\ 0 & te^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\xi_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ z_3(0) \end{pmatrix}, \tag{9.41}$$

ou seja,

$$z_1(t) = e^{\mu t} z_1(0) + te^{\mu t} z_2(0) \tag{9.42}$$
$$z_2(t) = e^{\mu t} z_2(0) \tag{9.43}$$
$$z_3(t) = e^{\xi_3 t} z_3(0) \tag{9.44}$$

Pela similaridade em muitos aspectos com a situação de autovalores reais e distintos, apresentaremos apenas dois casos dos vários possíveis:

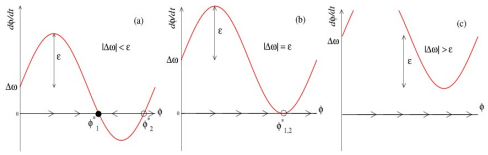

Figura 9.4: Trajetórias de um fluxo tridimensional linear para os seguintes autovalores: (a) $\mu = -0.8$, $\xi_3 = 0,5$; (b) $\mu = -0.8$, $\xi_3 = -0,5$

1. $\xi_1 = \xi_2 = \mu < 0$, e $\xi_3 > 0$: as trajetórias espiralam em convergindo para a origem mas escapam dela pela direção $\mathbf{u}_3$ [Fig. 9.4(a)].

2. $\xi_1 = \xi_2 = \mu < 0$, e $\xi_3 < 0$: as trajetórias convergem à origem em todas as direções [Fig. 9.4(b)].

9.4 Fluxos tridimensionais não-lineares

Nosso principal objeto, neste Capítulo, são os fluxos tridimensionais não-lineares, cuja forma geral é

$$\dot{x} = f(x,y,z), \tag{9.45}$$
$$\dot{y} = g(x,y,z), \tag{9.46}$$
$$\dot{h} = h(x,y,z), \tag{9.47}$$

onde f, g e h são expressões lineares nas variáveis x, y e z. Uma grande economia de notação é obtida usando-se a notação matricial do Capítulo anterior

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\mathbf{v}) \tag{9.48}$$

onde o vetor de variáveis e o campo vetorial são dados, respectivamente, por

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f(x,y,z) \\ g(x,y,z) \\ h(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{9.49}$$

Um caso particular importante que se enquadra nesta categoria são os fluxos bidimensionais não-autônomos.

$$\dot{x} = f(x,y,t), \qquad \dot{y} = g(x,y,t)$$

Definindo $z = t$ temos o fluxo tridimensional autônomo

$$\dot{x} = f(x,y,z), \qquad \dot{y} = g(x,y,z), \qquad \dot{z} = 1$$

Os pontos de equilíbrio do fluxo tridimensional (9.48), também denotados por $\mathbf{v}^*$, são tais que $\mathbf{F}(\mathbf{v}^*) = \mathbf{0}$. Assim como no caso bidimensional, a estabilidade dos pontos de equilíbrio $\mathbf{v}^*$ pode ser estudada investigando o comportamento das soluções nas proximidades de $\mathbf{v}^*$. Desde que a vizinhança do ponto de equilíbrio seja suficientemente pequena, podemos usar uma aproximação linear para o campo vetorial $\mathbf{F}$, de forma similar ao que fizemos no Capítulo 8. Estudamos, então, o comportamento dos desvios do equilíbrio $\mathbf{w}(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}^*$, cuja evolução é governada pelo fluxo linearizado

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{J}(\mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{w}, \tag{9.50}$$

onde $\mathbf{J}(\mathbf{v}^*)$ é a matriz jacobiana do fluxo não-linear, cujos elementos

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y & \partial f/\partial z \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y & \partial g/\partial z \\ \partial h/\partial x & \partial h/\partial y & \partial h/\partial z \end{pmatrix} \tag{9.51}$$

são calculados no ponto de equilíbrio e, portanto, são constantes.

Na sequência, analisamos os autovalores ξ_i ($i = 1, 2, 3$) e os autovetores $\mathbf{u}_i$ da matriz Jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{v}^*)$, satisfazendo as relações

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{u}_i = \xi_i \mathbf{u}_i \tag{9.52}$$

Como vimos no caso bidimensional, a aproximação linear permite determinar a estabilidade do ponto de equilíbrio $\mathbf{v}^*$ se este for hiperbólico, ou seja, se todos os autovalores ξ_i tiverem partes reais diferentes de zero. Se esta condição for satisfeita, podemos usar o critério de estabilidade (9.14)-(**??**) para o ponto fixo na origem do fluxo tridimensional linear, que reescrevemos como

$$\tau < 0, \tag{9.53}$$

$$\Delta - \gamma\tau > 0, \tag{9.54}$$

$$\Delta < 0, \tag{9.55}$$

onde definimos

$$\tau = \text{tr}\,[\mathbf{J}(\mathbf{v}^*)], \tag{9.56}$$

$$\Delta = \det[\mathbf{J}(\mathbf{v}^*)], \tag{9.57}$$

e γ é a soma dos menores principais da matriz $\mathbf{J}(\mathbf{v}^*)$

9.4.1 Variedades invariantes

Se o ponto de equilíbrio for hiperbólico, ou seja, caso não haja sub-espaço central a ele associado ($E^c = \emptyset$), o teorema de Hartman-Grobman também se aplica no caso tridimensional: se a matriz Jacobiana calculada no ponto

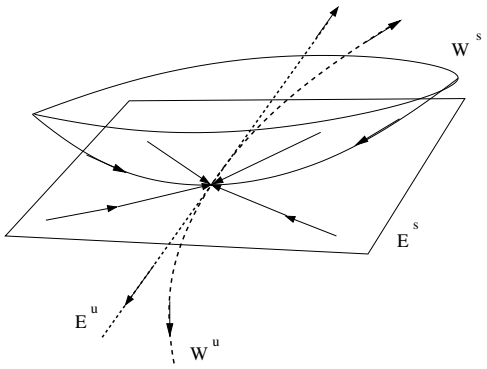

Figura 9.5: Variedades e sub-espaços estável e instável.

de equilíbrio, $\mathbf{J}(\mathbf{v}^*)$ não tiver autovalores nulos ou puramente imaginários, então existe um homeomorfismo, definido em alguma vizinhança do ponto de equilíbrio $\mathbf{v}^*$, que associa trajetórias do fluxo não-linear em trajetórias do fluxo linearizado nas vizinhanças do ponto de equilíbrio.

Uma consequência é que também podemos definir superfícies (também chamadas variedades) invariantes de um ponto de equilíbrio hiperbólico, que são as generalizações das curvas invariantes do caso bidimensional. Inicialmente consideramos as variedades locais, ou seja, que são definidas numa dada vizinhança U do ponto de equilíbrio hiperbólico $\mathbf{v}^*$. A variedade invariante local estável W^s_{loc} é o conjunto dos pontos $\mathbf{v}(t)$ que convergem ao ponto de equilíbrio $\mathbf{v}^*$ quando $t \to \infty$, tal que todos os pontos da trajetória $\mathbf{v}(t)$ pertencem a W^s_{loc}. A variedade invariante local instável W^u_{loc} é o conjunto dos pontos $\mathbf{v}(t)$ que convergem ao ponto de equilíbrio $\mathbf{v}^*$ para tempos negativos, no limite $t \to -\infty$, e tal que todos os pontos $\mathbf{v}(t)$ pertencem a W^u_{loc}. As variedades estável e instável globais são definidas, como para mapas, pela união das imagens diretas e inversas das variedades locais pelo fluxo não-linear.

No caso de pontos de equilíbrio hiperbólicos em três (ou mais) dimensões, pode-se demonstrar um teorema para as variedades invariantes, análogo àquele do caso bidimensional. Considerando o fluxo não-linear

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\mathbf{v}), \tag{9.58}$$

existem variedades locais invariantes estável W^s_{loc} e instável W^s_{loc} que emanam do ponto de equilíbrio hiperbólico $\mathbf{v}^*$ com as mesmas dimensões dos sub-espaços invariantes E^s e E^u do sistema linearizado

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{J}(\mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{w}, \tag{9.59}$$

tal que as variedades invariantes são tangentes aos respectivos sub-espaços no ponto $\mathbf{v}^*$ [Fig. 9.5]

9.4.2 O sistema de Rössler

Como exemplo, vamos considerar o chamado sistema de Rössler:

$$\dot{x} = -y - z, \tag{9.60}$$

$$\dot{y} = x + ay, \tag{9.61}$$

$$\dot{z} = b + z(a - c), \tag{9.62}$$

onde a, b e c são parâmetros positivos. Os pontos de equilíbrio deste sistema são

$$x^*_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \tag{9.63}$$

$$y^*_{1,2} = -\frac{1}{a}x^*_{1,2} = \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \tag{9.64}$$

$$z^*_{1,2} = -y^*_{1.2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}. \tag{9.65}$$

A matriz Jacobiana (**??**) deste sistema é

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x - c \end{pmatrix} \tag{9.66}$$

Calculando seus elementos nos pontos de equilíbrio $\mathbf{v}^* = (x^*, y^*, z^*)$, a equação secular correspondente é

$$-\xi^3 + \xi^2(a + x^* - c) + \xi(ac - ax^* - 1 - z^*) + (x^* - c + az^*) = 0. \tag{9.67}$$

Na sequência, vamos considerar os seguintes valores para os parâmetros do sistema: $a = 0,2$, $b = 0,2$ e $c = 5,7$, que fornecem os seguintes pontos de equilíbrio

$$v^*_1 : x^*_1 = 5,707, \qquad y^*_1 = -28,53, \qquad z^*_1 = 28,53, \tag{9.68}$$

$$v^*_2 : x^*_2 = -0,014, \qquad y^*_1 = 0,07, \qquad z^*_1 = -0,07. \tag{9.69}$$

Como $\mathbf{v}^*_2$ está próximo à origem, será chamado *ponto central*, ao passo que $\mathbf{v}^*_1$ será o *ponto excêntrico*.

Resolvendo numericamente a equação cúbica (9.67) para o ponto central $\mathbf{v}^*_2$, resultam os autovalores e respectivos autovetores:

$$\xi_1 = 0,09710 + 0,9957i, \qquad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0,07073 \\ -0,07278 - 0,7032i \\ 0,0042 - 0,0007i \end{pmatrix} \tag{9.70}$$

$$\xi_2 = 0,09710 - 0,9957i, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0,07073 \\ -0,07278 + 0,7032i \\ 0,0042 + 0,0007i \end{pmatrix} \tag{9.71}$$

$$\xi_3 = -5,687 \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0,1682 \\ -0,0286 \\ 0,9853 \end{pmatrix} \tag{9.72}$$

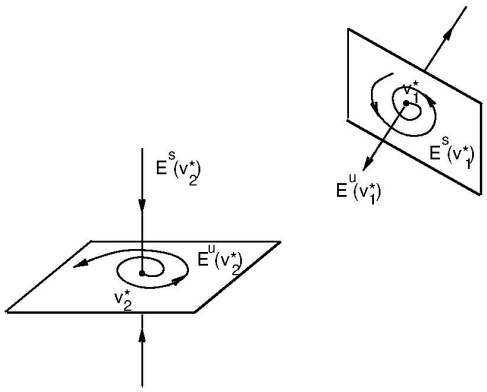

Figura 9.6: Pontos de equilíbrio e sub-espaços invariantes do sistema de Rössler

Como $\mathrm{Re}\xi_{1,2} = \mu > 0$ e $\xi_3 < 0$ então o sub-espaço instável $E^u(\mathbf{v}_2^*)$ é o plano gerado pelos autovetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, enquanto o sub-espaço estável $E^s(\mathbf{v}_2^*)$ é a direção do autovetor $\mathbf{u}_3$. O comportamento das trajetórias na vizinhança do ponto central é qualitativamente semelhante ao da Fig. 9.2.(d): elas descrevem espirais divergentes de $\mathbf{v}^*$ mas que tendem a se aproximar do plano E^u ao longo da direção E^s. Em outras palavras, o ponto de equilíbrio central é uma espécie de sela-nó instável [Fig. 9.6].

Para o ponto excêntrico $\mathbf{v}_1^*$, resultam os autovalores e respectivos autovetores:

$$\xi_1 = -0,00002 + 5,428i, \qquad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0,0002 + 0,1872i \\ 0,0944 - 0,0013i \\ 0,9817 \end{pmatrix} \tag{9.73}$$

$$\xi_2 = -0,00002 - 5,428i, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0,0024 - 0,1872i \\ 0,0344 + 0,0013i \\ 0,9817 \end{pmatrix} \tag{9.74}$$

$$\xi_3 = 0,1929 \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0,0049 \\ -0,7075 \\ 0,7066 \end{pmatrix} \tag{9.75}$$

Como $\mathrm{Re}\xi_{1,2} = \mu < 0$ e $\xi_3 > 0$ o sub-espaço estável é o plano gerado por $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, enquanto o sub-espaço instável é a direção do autovetor $\mathbf{u}_3$. O comportamento das trajetórias na vizinhança do ponto excêntrico é similar ao mostrado na Fig. 9.3(a): elas espiralam em direção ao ponto excêntrico, mas são dele repelidas ao longo da direção instável. Aqui, novamente, temos uma espécie de sela-nó instável, como esquematizamos na Fig. 9.6. A determinação das variedades invariantes local e global pode ser feita usando métodos análogos aos vistos no Capítulo 5 para mapas, porém não será tratada aqui.

9.5 Sistema de Lorenz

Mostramos, no Capítulo 1, o papel importante que o sistema de Lorenz

$$\dot{x} = \sigma(y-x), \tag{9.76}$$
$$\dot{y} = rx-y-xz, \tag{9.77}$$
$$\dot{z} = xy-bz, \tag{9.78}$$

teve no desenvolvimento da dinâmica no-linear a partir dos anos 1960 e 1970. Ele também é um exemplo de fluxo tridimensional não-linear com várias propriedades notáveis, e que justificam um tratamento a parte.

Uma peculiaridade do sistema de Lorenz é que as equações são simétricas mediante as seguintes permutas

$$x \to -x, \qquad y \to -y, \qquad z \to z, \tag{9.79}$$

de sorte que, se $\mathbf{v}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é uma solução do sistema, então $\mathbf{v}'(t) = (-x(t), -y(t), z(t))$ também será. Os pontos de equilíbrio são:

$$\mathbf{v}_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_{2,3}^* = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{b(1-r)} \\ \pm\sqrt{b(1-r)} \\ r-1 \end{pmatrix}. \tag{9.80}$$

que, analogamente ao sistema de Rössler, podem ser chamados ponto central e pontos excêntricos. A matriz Jacobiana do sistema de Lorenz é

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}. \tag{9.81}$$

9.5.1 Ponto de equilíbrio central

Os elementos da matriz Jacobiana no ponto de equilíbrio central $\mathbf{v}_1^* = (0,0,0)$ são

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}_1^*) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}, \tag{9.82}$$

cujos autovalores são

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{-\sigma - 1 \pm \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4r\sigma}\right\}, \tag{9.83}$$
$$\xi_3 = -b \tag{9.84}$$

A partir da motivação física para a dedução das equações de Lorenz, temos que $\sigma > 1$, $r > 0$ e $b > 0$. Assim o radicando em (9.83) é sempre não-negativo, de modo que os autovalores serão todos reais. Normalmente fixamos os valores de σ e b, mantendo apenas r como parâmetro variável. Assim temos dois casos possíveis:

1. se $0 < r < 1$ temos que

$$\sqrt{(\sigma-1)^2+4r\sigma} = \sqrt{(\sigma+1)^2+4(r-1)\sigma} < \sqrt{(\sigma+1)^2} = \sigma+1,$$

logo os autovalores $\xi_{1,2}$ são negativos, e $\xi_3 = -b < 0$. Esta situação é similar à mostrada na Fig. 9.2 (a), na qual as trajetórias convergem para o ponto de equilíbrio assintoticamente estável em todas as direções. O sub-espaço estável é todo o espaço $\mathbb{R}^3$ e o sub-espaço instável não existe.

2. se $r > 1$ então $\xi_1 > 0$ e $\xi_2 < 0$. Como $\xi_3 < 0$, os autovetores $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ geram o sub-espaço estável E^s e o autovetor $\mathbf{u}_1$ gera o sub-espaço instável E^u. Neste caso, o ponto de equilíbrio central torna-se instável para $r > 1$.

Em $r = 1$ há uma bifurcação do tipo forquilha supercrítica: o ponto de equilíbrio central, que é estável para $r < 1$, torna-se instável para $r > 1$. Ao mesmo tempo, emergem dois pontos de equilíbrio estáveis para $r > 1$.

No Capítulo 1, quando introduzimos o sistema de Lorenz a partir do modelamento da experiência de Bénard, vimos que $x(t)$ está relacionado à velocidade do fluido, e que $y(t)$ e $z(t)$ ao desvio da temperatura do fluido de um perfil linear [vide Eqs. (1.10) e (1.11)]. Sob este ponto de vista, o ponto de equilíbrio central $\mathbf{v}_1^* = (0,0,0)$ representa a ausência de convecção, ou seja, a transferência de calor por condução térmica pura, sem transferência de massa do fluido entre as duas placas paralelas.

Usando uma aproximação linear para as equações do modelo da experiência de Bénard, Lord Rayleigh estudou as condições de estabilidade do estado de condução térmica pura, a partir de um número adimensional R, chamado número de Rayleigh, e que é proporcional à diferença de temperatura ΔT entre as placas. Quando esta atinge um determinado valor crítico, então o estado de condução pura torna-se instável e começa a convecção do fluido. Sendo R_c o respectivo valor crítico do número de Rayleigh, é notável que no modelo de Lorenz o parâmetro r seja dado justamente pela razão R/R_c, de modo que, quando $r = 1$ então a condução térmica pura torna-se instável, exatamente a previsão que fizemos a partir da estabilidade do ponto de equilíbrio central!

9.5.2 Pontos de equilíbrio excêntricos

O par de pontos de equilíbrio fora da origem

$$\mathbf{v}_{2,3}^* = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{b(1-r)} \\ \pm\sqrt{b(1-r)} \\ r-1 \end{pmatrix}. \tag{9.85}$$

só existem para $r > 1$, o que concorda com a observação experimental que os rolos de convecção só existem se o número de Rayleigh for maior que seu valor crítico, como comentamos anteriormente. Podemos, assim, associar os valores de $x^*_{2,3} = \pm\sqrt{b(1-r)}$ às velocidades do fluido nos rolos de convecção: o valor positivo indica uma rotação no sentido anti-horário, enquanto o valor negativo, no sentido horário.

A matriz Jacobiana, calculada nos pontos de equilíbrio excêntricos, tem os seguintes elementos

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}^*_{2,3}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(1-r)} & \pm\sqrt{b(1-r)} & -b \end{pmatrix}, \tag{9.86}$$

cujos autovalores são as raízes de uma equação do terceiro grau

$$\xi^3 + (\sigma + b + 1)\xi^2 + b(\sigma + r)\xi + 2b\sigma(r-1) = 0. \tag{9.87}$$

Os pontos de equilíbrio excêntricos $\mathbf{v}^*_{2,3}$ são estáveis desde que todas as raízes da equação cúbica acima tenham partes reais negativas. Pelo critério de Routh-Hurwitz (9.53)-(9.55), a única condição não-trivial é (9.53), que fornece a inequação

$$(\sigma - b - 1)r < \sigma(3 + \sigma + b), \tag{9.88}$$

que pode ser expressa na forma $r < r^*$, onde definimos

$$r^* = \frac{\sigma(3 + \sigma + b)}{\sigma - b - 1}. \tag{9.89}$$

Consequentemente os pontos fixos fora da origem $\mathbf{v}^*_{2,3}$ são estáveis se $1 < r < r^*$ e instáveis se $r > r^*$. Fisicamente isso significa que, à medida em que aumenta a diferença de temperatura entre as placas (na experiência de Bénard), os rolos de convecção tornam-se instáveis se o parâmetro r atinge o valor crítico (9.89). Para os valores clássicos dos outros parâmetros ($\sigma = 10$ e $b = 8/3$) temos $r^* = 24,7368$.

9.5.3 Bifurcação de Hopf

Quando o parâmetro r atinge o valor crítico r^*, os elementos da matriz Jacobiana para os pontos de equilíbrio excêntricos $\mathbf{v}^*_{2,3}$ são

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r^* - z^*_{2,3} & -1 & -x^*_{2,3} \\ y^*_{2,3} & x^*_{2,3} & -b \end{pmatrix}. \tag{9.90}$$

Substituindo (9.85) e (9.89) em (9.128), obtemos os seguintes autovalores para a matriz Jacobiana correspondente

$$\xi_1 = -\sigma - b - 1, \tag{9.91}$$

$$\xi_{2,3} = \pm i\sqrt{\frac{2\sigma(\sigma+1)}{\sigma-b-1}} \tag{9.92}$$

estes últimos, supondo $\sigma > 1+b$, sendo imaginários puros. Assim, em $r = r^*$, ocorre uma bifurcação de Hopf subcrítica, para a qual os pontos fixos $\mathbf{v}^*_{2,3}$ tornam-se instáveis para $r > r^*$. Já para $r > r^*$ surgem ciclos-limite instáveis cujos raios são proporcionais a $\sqrt{r^* - r}$.

Como os raios destes ciclos-limite instáveis crescem com a distância entre r e o ponto de bifurcação r^*, eles acabarão colidindo com o ponto fixo instável na origem, no ponto $r_h = 13,926$, tornando-se órbitas homoclínicas. Para $r < r_h$ não haverá, portanto, ciclos-limite. Para $r > r^*$ os três pontos fixos são instáveis, mas haverá um atrator caótico. O atrator borboleta de Lorenz, obtido para $r = 28$, pertence a essa categoria.

9.6 Fluxos no espaço de fase

Para analisar a evolução de conjuntos de condições iniciais no espaço de fase tridimensional vamos considerar uma superfície fechada de área $A(t)$ que envolve uma região de volume $V(t)$, ambos no instante de tempo t. Usando os pontos dessa região como condições iniciais, evoluimos o fluxo tridimensional gerado por (9.49) por um intervalo de tempo dt, após o qual a superfície terá uma área $A(t+dt)$.

Denotaremos por $\hat{\mathbf{n}}$ um vetor unitário normal à superfície $A(t)$ e apontando para fora dela. Como as componentes do vetor $\dot{\mathbf{v}}$ podem ser interpretadas como a velocidade dos pontos no espaço de fase, então $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ será a componente normal da velocidade. Assim, após um intervalo de tempo dt, a distância percorrida pelos pontos na superfície é $(\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}})dt$, de maneira que a variação infinitesimal do volume é

$$dV = \int (\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dt)\,dA,$$

e sua taxa de variação

$$\frac{dV}{dt} = \int (\nabla\cdot\mathbf{F})\,dV \tag{9.93}$$

onde usamos o teorema do divergente, e

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \tag{9.94}$$

é o divergente do campo vetorial $\mathbf{F}$, que nada mais é do que o traço da matriz Jacobiana do fluxo:

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \operatorname{tr}\mathbf{J}. \tag{9.95}$$

Se o fluxo for dissipativo há uma diminuição dos volumes no espaço de fase com o passar do tempo, ou seja, $dV/dt < 0$. Supondo, por simplicidade, que o divergente é uma constante negativa

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\chi, \tag{9.96}$$

onde $\chi > 0$, integrando (9.93) obtemos uma expressão para o volume como função do tempo

$$V(t) = V(0)\, e^{-\chi t}, \tag{9.97}$$

de maneira que os volumes no espaço de fase tendem a zero quando $t \to \infty$. Um atrator do sistema é o conjunto aberto de volume nulo no espaço de fase, para o qual convergem todas as trajetórias pertencentes à bacia de atração respectiva. A definição mais formal de atrator que introduzimos no Capítulo 5 para mapas também se aplica a fluxos, com poucas modificações.

9.6.1 Atratores no sistema de Lorenz

Um exemplo importante de fluxo tridimensional é o sistema de Lorenz

$$\dot{x} = \sigma(y-x), \tag{9.98}$$
$$\dot{y} = rx - y - xz, \tag{9.99}$$
$$\dot{z} = xy - bz, \tag{9.100}$$

onde σ, r e b são parâmetros positivos. O divergente desse campo vetorial é

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\sigma - 1 - b = -(\sigma + 1 + b) < 0, \tag{9.101}$$

portanto o sistema de Lorenz é dissipativo para todos os valores dos parâmetros, os volumes diminuindo com o tempo a uma taxa constante $\chi = \sigma + 1 + b$. Para $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, e $r = 28$ - que produzem o atrator borboleta [Fig. 9.11] - temos que $\chi = 13,67$, de modo que o volume das regiões no espaço de fase tendem muito rapidamente a zero com o passar do tempo, indicando uma rápida convergência ao atrator.

O teorema de existência e unicidade aplica-se também para fluxos tridimensionais, desde que o campo vetorial tenha funções contínuas e diferenciáveis, o que é o caso das equações (9.98)-(9.100). Dada uma condição inicial $\mathbf{v}(0)$, este teorema garante a existência de uma, e somente uma, solução $\mathbf{v}(t)$ do sistema de Lorenz para um intervalo de tempo finito τ. No entanto, Lorenz mostrou que as soluções existem para quaisquer tempos por meio de um engenhoso raciocínio. Consideremos a função

$$U(x,y,z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z-2r)^2. \tag{9.102}$$

Derivando em relação ao tempo, temos que

$$\dot{U} = 2rx\dot{x} + 2\sigma y\dot{y} + 2\sigma z\dot{z} - 4\sigma r\dot{z}. \tag{9.103}$$

Usando (**??**)-(**??**) para as derivadas do campo vetorial, obtemos

$$\dot{U} = -2\sigma(rx^2 + y^2 + bz^2 - 2brz). \tag{9.104}$$

Como $\sigma > 0$ então $\dot{U} < 0$ se

$$rx^2 + y^2 + bz^2 - 2brz > 0, \tag{9.105}$$

que podemos reescrever como

$$rx^2 + y^2 + b(z-r)^2 > br^2. \tag{9.106}$$

Esta desigualdade define uma região elipsoidal $\mathcal{E}$ com centro no ponto $(x = 0, y = 0, z = r)$. Se a solução $\mathbf{v}(t)$ é tal que (9.106) seja verificada, então o ponto correspondente no espaço está fora da região $\mathcal{E}$, de modo que $\dot{U} \leq 0$.

Seja, agora, uma segunda região elipsoidal $\mathcal{T}$, centrada em $(0, 0, 2r)$, e definida pela desigualdade

$$U = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z-2r)^2 \leq C \tag{9.107}$$

para alguma constante $C > 0$. Esta constante será escolhida tal que o elipsóide $\mathcal{E}$ esteja contido no interior da região $\mathcal{T}$. Assim, qualquer condição inicial $\mathbf{v}(0)$ fora de $\mathcal{T}$ estará, assim, também fora de $\mathcal{E}$. Como $\dot{U} < 0$ neste caso, resulta que as trajetórias são atraídas para o elipsóide $\mathcal{E}$ até que elas estejam em seu interior. Como tais trajetórias não podem escapar para fora de $\mathcal{E}$, também não o podem para fora de $\mathcal{T}$ que é chamada uma *região de aprisionamento* para o sistema de Lorenz. A função $U(t)$ é chamada função de Lyapunov para o sistema.

A existência de uma região de aprisionamento para o sistema de Lorenz mostra que todas as suas soluções irão com o tempo penetrar numa região de volume finito, o que sugere a existência de um atrator limitado no espaço de fase. No Capítulo 1 utilizamos o sistema de Lorenz para exemplificar um atrator estranho, ao mesmo tempo fractal e caótico. Na Fig. 1.12 ilustramos a sensibilidade às condições iniciais exibida pelo atrator borboleta do sistema. Para quantificar esta propriedade, devemos introduzir os expoentes de Lyapunov para este tipo de sistema dinâmico.

9.7 Expoentes de Lyapunov

Num sistema tridimensional há três expoentes de Lyapunov λ_1, λ_2 e λ_3. Podemos defini-los de forma análoga à que empregamos para mapas bidimensionais. Considerando uma esfera de raio ε no instante inicial $t = 0$, evoluindo os pontos da mesma pelo fluxo tridimensional um tempo t, a esfera transforma-se num elipsóide de semi-eixos r_1, r_2 e r_3, dados por [Fig. 9.7]

$$r_1 = \varepsilon e^{\lambda_1 t}, \qquad r_2 = \varepsilon e^{\lambda_2 t}, \qquad r_3 = \varepsilon e^{\lambda_3 t}. \tag{9.108}$$

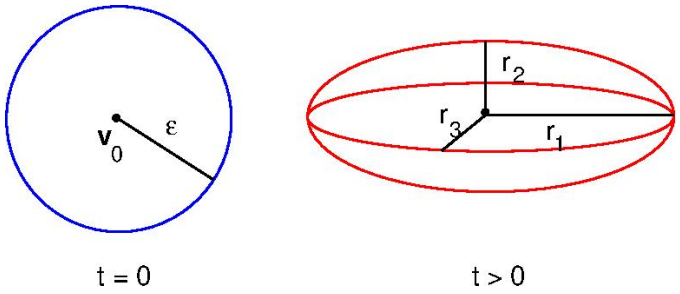

Figura 9.7: Definição dos expoentes de Lyapunov no espaço de fase tridimensional

O volume do elipsóide num instante t é

$$V(t) = \frac{4\pi}{3} r_1 r_2 r_3 = V(0)\, e^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}, \tag{9.109}$$

onde $V(0) = 4\pi\varepsilon^3/3$. Comparando com (9.97) obtemos a relação entre os expoentes de Lyapunov e a taxa de dissipação de volumes no espaço de fase

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \chi < 0. \tag{9.110}$$

onde $\chi = \nabla \cdot \mathbf{F}$ é o divergente do campo vetorial.

Há uma diferença significativa entre mapas e fluxos no que tange aos expoentes de Lyapunov. Se, num fluxo, a trajetória não converge para um ponto fixo atrativo, um dos expoentes de Lyapunov é sempre zero. Esse expoente corresponde à direção da respectiva trajetória no espaço de fase. Um argumento heurístico para explicar esse fato consiste em acompanhar a evolução de dois pontos muito próximos ao longo da mesma trajetória: $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{v}'(t)$. Como a trajetória é contínua, a distância entre esses pontos, ao longo da própria trajetória é constante, de maneira que o expoente de Lyapunov na direção da trajetória é sempre nulo. Assim, para um fluxo tridimensional, ao menos um dos expoentes de Lyapunov deve ser nulo.

Usuamente ordenamos os expoentes de Lyapunov tal que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Portanto, se que o sistema apresente caos, o expoente máximo será positivo: $\lambda_1 > 0$. Nesse caso, então, o segundo será nulo: $\lambda_2 = 0$ e, devido à dissipatividade do sistema, de (9.110), então o terceiro expoente será necessariamente negativo, e dado por

$$\lambda_3 = \chi - \lambda_1 < 0 \tag{9.111}$$

9.8 Determinação numérica dos expoentes de Lyapunov

A determinação numérica dos expoentes de Lyapunov para fluxos tridimensionais, ou de dimensão ainda maior, é uma adaptação do método visto no Cap. 4 para mapas bidimensionais. Seja, pois, o fluxo $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\mathbf{v})$, e a trajetória $\mathbf{v}(t)$ obtida pela sua integração, a partir da condição inicial $\mathbf{v}(0)$. Uma segunda condição inicial $\mathbf{v}'(0)$ irá produzir uma trajetória $\mathbf{v}'(t)$. Se esta segunda condição inicial for muito próxima à primeira, poderemos escrever

$$\mathbf{v}'(0) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{w}(0), \qquad (|\mathbf{w}(0)| \ll |\mathbf{v}(0)|). \tag{9.112}$$

onde $\mathbf{w}(0)$, o chamado vetor tangente, é a diferença entre as duas condições iniciais. Para um tempo t qualquer, essa expressão torna-se

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{w}(t), \qquad (|\mathbf{w}(t)| \ll |\mathbf{v}(t)|), \tag{9.113}$$

Linearizando o fluxo $\mathbf{F}$ em torno de $\mathbf{v}(t)$ resulta que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}' &= \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{F}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{v}) + \mathbf{J}(\mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{w} + \ldots, \end{aligned} \tag{9.114}$$

onde $\mathbf{J}(\mathbf{v}(t))$ é a matriz Jacobiana calculada nos pontos da trajetória. A evolução temporal do vetor tangente $\mathbf{w}(t)$ é governada pelo fluxo linearizado

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{J}(\mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{w}(t). \tag{9.115}$$

Observe que o fluxo linearizado tem coeficientes que variam com o tempo, de modo que devemos resolvê-lo numericamente na maioria das vezes, a partir da condição inicial $\mathbf{w}(0)$. Escrevemos, formalmente, a solução do fluxo linearizado na forma

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{M}(\mathbf{v}(0), t) \cdot \mathbf{w}(0), \tag{9.116}$$

onde $\mathbf{M}(\mathbf{v}_0, t)$ é a chamada matriz de monodromia do sistema, termo proveniente da teoria de Floquet para soluções de equações diferenciais com coeficientes dependentes do tempo. Fazendo $t = 0$ na expressão acima resulta que

$$\mathbf{M}(\mathbf{v}(0), 0) = \mathbf{I} \tag{9.117}$$

de modo que o valor inicial da matriz de monodromia é a matriz identidade.

Substituindo (9.116) no fluxo linearizado (9.115), temos que a matriz de monodromia satisfaz a seguinte equação diferencial linear (chamada equação variacional)

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{J}(\mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{M}(t), \tag{9.118}$$

que também será resolvida numericamente, tendo (9.117) como condição inicial.

Em analogia com o caso de mapas, o vetor unitário $\mathbf{w}(t)/|\mathbf{w}(t)|$ indica a direção do deslocamento infinitesimal da trajetória a partir de $\mathbf{v}(t)$, e $|\mathbf{w}(t)|/|\mathbf{w}(0)|$ é o fator pelo qual este deslocamento aumenta ou diminui com o passar do tempo. O expoente de Lyapunov para a trajetória definida pela condição inicial $\mathbf{v}(0)$ e na orientação do deslocamento infinitesimal dada pelo vetor unitário $\mathbf{u}(0) = \mathbf{w}(0)/|\mathbf{w}(0)|$ é definido como

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{v}(0),\mathbf{u}(0)) &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left(\frac{|\mathbf{w}(t)|}{|\mathbf{w}(0)|}\right)\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left(\frac{|\mathbf{M}(\mathbf{v}(0),t)\cdot\mathbf{w}(0)|}{|\mathbf{w}(0)|}\right)\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|\mathbf{M}(\mathbf{v}_0,t)\cdot\mathbf{u}(0)|\,. \end{aligned} \tag{9.119}$$

9.8.1 Caso de um fluxo tridimensional

Vamos particulizar as expressões anteriores para o expoente de Lyapunov para um fluxo tridimensional com equações da forma

$$\dot{x} = f(x,y,z), \tag{9.120}$$
$$\dot{y} = g(x,y,z), \tag{9.121}$$
$$\dot{h} = h(x,y,z), \tag{9.122}$$

para o qual a matriz Jacobiana é dada por (9.51). A matriz de monodromia (**??**), neste caso, é

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13}\\ M_{21} & M_{22} & M_{23}\\ M_{31} & M_{32} & M_{33}\end{pmatrix}, \tag{9.123}$$

de sorte que a equação variacional (9.118) implica em

$$\begin{pmatrix} \dot{M}_{11} & \dot{M}_{12} & \dot{M}_{13}\\ \dot{M}_{21} & \dot{M}_{22} & \dot{M}_{23}\\ \dot{M}_{31} & \dot{M}_{32} & \dot{M}_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y & \partial f/\partial z\\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y & \partial g/\partial z\\ \partial h/\partial x & \partial h/\partial y & \partial h/\partial z\end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13}\\ M_{21} & M_{22} & M_{23}\\ M_{31} & M_{32} & M_{33}\end{pmatrix}, \tag{9.124}$$

gerando 9 equações diferenciais lineares que podem ser resolvidas usando a condição inicial (9.117)

$$\mathbf{M}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{9.125}$$

Resumindo, temos de integrar numericamente um total de 12 equações diferenciais: 3 não-lineares (9.120)-(9.122) para o fluxo, e 9 equações lineares para os coeficientes da matriz de monodromia. Primeiro integramos as

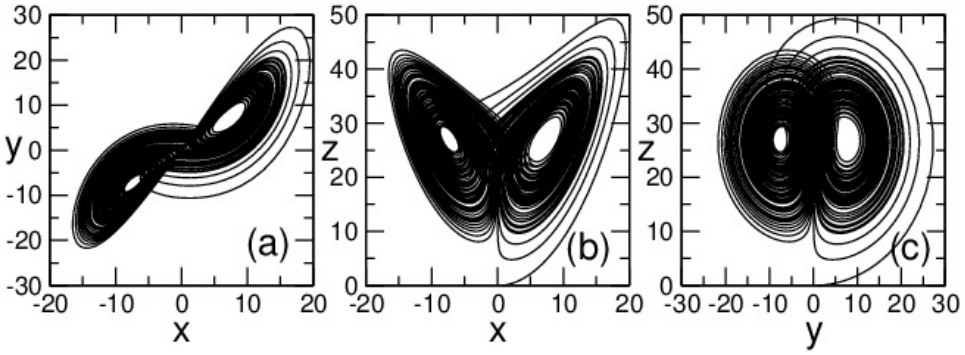

Figura 9.8: Diferentes projeções do atrator borboleta do sistema de Lorenz para $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$.

equações (9.120)-(9.122) para as condições iniciais $(x(0), y(0), z(0))$, obtendo os valores correspondentes num instante posterior t. Determinados os valores da matriz de monodromia para cada tempo t, com eles evoluimos o vetor tangente usando (9.116):

$$\begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \\ w_3(0) \end{pmatrix} \tag{9.126}$$

cujo módulo, presente na definição (9.119) para os expoentes de Lyapunov, é a distância euclidiana

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} \tag{9.127}$$

Assim como num mapa, para fluxos tridimensionais há três direções independentes para o vetor unitário $\mathbf{u}_0$, de modo que haverá três expoentes de Lyapunov, um para cada direção. Novamente, escolhemos um sistema de vetores unitários e ortogonais $(\mathbf{u}_1(0), \mathbf{u}_2(0), \mathbf{u}_3(0))$. Aplicando a matriz de monodromia sobre eles, evoluimos estes conjuntos por um tempo Δt, obtemos novas direções $(\mathbf{u}_1(\Delta t), \mathbf{u}_2(\Delta t), \mathbf{u}_3(\Delta t))$. Estes novos vetores, se forem ortogonais, indicarão as direções dos semi-eixos da elipsóide B_1, que é uma imagem da esfera B_0 após um tempo t. No entanto, as imagens do conjunto ortonormal original $(\mathbf{u}_1(0), \mathbf{u}_2(0), \mathbf{u}_3(0))$ não são ortogonais, em geral. Assim, também para fluxos será necessário usar o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, que descrevemos no Capítulo 5 para mapas bidimensionais.

Para o sistema de Lorenz (9.98)-(9.100) a matriz Jacobiana é

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}. \tag{9.128}$$

que inserimos em (9.124 para obter as equações variacionais, cujas soluções são os elementos da matriz de monodromia correspondentes. Resolvendo numericamente o sistema total de 12 equações diferenciais para os valores característicos do atrator borboleta ($\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$, cf. Fig. 9.8) obtemos os seguintes expoentes de Lyapunov após um tempo da ordem de $t = 10^6$

$$\lambda_1 = 0,904, \qquad \lambda_2 = 0,000, \qquad \lambda_3 = -14,570, \tag{9.129}$$

em conformidade com nossa suposição de um atrator caótico, e também com a hipótese de que pelo menos um dos expoentes é nulo (neste caso, o vetor tangente correspondente $\mathbf{w}_2(t)$ aponta sempre na direção da trajetória).

A soma dos expoentes de Lyapunov, nesse caso, é

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -13,67, \tag{9.130}$$

cujo valor coincide (dentro da precisão usada) com a taxa de contração dos volumes, que é $\chi = 13,67$, verificando pois, numericamente, a relação (9.110).

9.9 Tipos de atratores

Num fluxo tridimensional dissipativo (9.110) indica a seguinte relação entre os expoentes de Lyapunov: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$, que pode ser empregada como base para classificar os diferentes tipos de atratores, baseando-se nos sinais dos expoentes de Lyapunov:

1. Atratores pontuais ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ e $\lambda_3 < 0$): são os pontos fixos assintoticamente estáveis, como nós e focos atrativos;

2. Ciclos-limite atrativos ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$ e $\lambda_3 < 0$: são trajetórias fechadas no espaço de fase. O expoente de Lyapunov nulo é aquele ao longo da trajetória.

3. Atratores toroidais ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 < 0$): são trajetórias sobre toróides no espaço de fase, portanto têm duas direções independentes que parametrizam o movimento, associadas aos dois expoentes de Lyapunov nulos.

4. Atratores caóticos ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 < 0$): devido à sensibilidade às condições iniciais, o maior dos expoentes de Lyapunov é positivo. O segundo é sempre nulo, e o terceiro é portanto necessariamente negativo e de módulo tal que a soma dos três seja também negativa.

Já descrevemos atratores pontuais e ciclos-limite atrativos em fluxos bidimensionais. Os atratores caóticos, porém, só podem existir em fluxos a

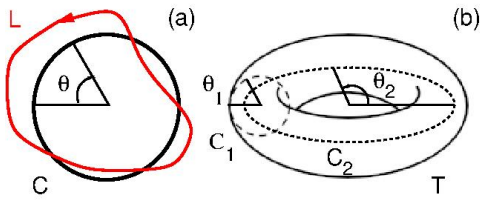

Figura 9.9: (a) Um ciclo-limite L e um círculo C. (b) Um toróide T.

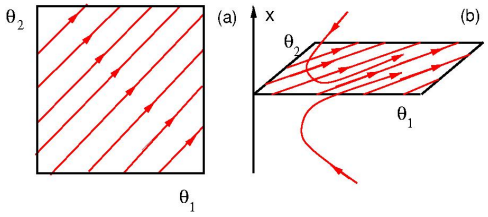

Figura 9.10: (a) Um quadrado periódico representando um toro. (b) Um toro-limite.

partir de três dimensões, assim como os atratores toroidais. Um atrator toroidal é uma espécie de versão bidimensional de um ciclo-limite. Um ciclo-limite L é uma curva fechada no espaço de fase que pode ser deformado continuamente até tornar-se um círculo C, que é parametrizado por um único ângulo θ [Fig. 9.10(a)]. Um atrator toroidal pode ser deformado até um toróide T, que é um produto cartesiano de dois círculos C_1 e C_2, associados a dois ângulos θ_1 e θ_2, respectivamente [Fig. 9.10(b)].

Para facilitar a visualização do toro T nós podemos retificar os círculos C_1 e C_2, de forma que o toro T seja representado por um quadrado periódico em ambos os lados [Fig. **??**(a)]. As trajetórias sobre o toro podem ser representadas por curvas no quadrado periódico que nunca fecham-se sobre si mesmas: elas dão um número infinito de revoluções ao longo dos círculos C_1 e C_2 preenchendo densamente o toro. A trajetória, neste caso, é chamada *quase-periódica*.

Uma trajetória limitada à superfície de um toróide tem duas direções periódicas independentes, ao longo dos círculos C_1 e C_2, e portanto os expoentes de Lyapunov ao longo dessas duas direções serão nulos. A terceira direção, que é transversal ao toróide, terá um expoente negativo, caracterizando o toro-limite como um atrator, ao qual convergem as trajetórias situadas em sua bacia de atração. Se representarmos o toro como um quadrado periódico, a terceira direção é transversal a ele, de modo que as trajetórias convergem ao toro com o passar do tempo [Fig. **??**(b)].

9.10 Atratores caóticos

O atrator clássico de Lorenz, além de caótico é também estranho, pois sua dimensão de contagem de caixas é fractal ($d = 2,06$). Podemos, também, determinar a dimensão de Lyapunov para esse atrator generalizando a fórmula de Kaplan-Yorke vista no Cap. 5 para o caso de N expoentes de Lyapunov $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_N)$. Seja k o máximo valor do índice tal que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k > 0.$$

A dimensão de Lyapunov é definida como

$$d_L = k + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k}{|\lambda_{k+1}|}. \tag{9.131}$$

No caso do sistema de Lorenz

$$d_L = 2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_3|}. \tag{9.132}$$

Usando os valores estimados para os expoentes de Lyapunov do atrator clássico de Lorenz temos a dimensão de Lyapunov

$$d_L = 2 + \frac{0,9 + 0}{14,57} = 2,06,$$

de acordo, portanto, com o valor da dimensão de contagem de caixas. Lembramos que, em geral, $d_L \leq d$.

Uma vez que o atrator borboleta de Lorenz é fractal, podemos procurar entender a sua estrutura. Por inspeção da Fig. 9.11, pode parecer que a trajetória no atrator cruza a si próprias repetidas vezes. No entanto, pelo teorema de existência e unicidade (Cap. 8) vimos que tais interseções são impossíveis. Logo as aparentes interseções resultam das projeções do atrator de Lorenz em duas dimensões. Se usamos um programa onde a trajetória é plotada em tempo real, ou seja, à medida em que seus pontos vão sendo determinados, veremos que uma trajetória que começa próximo à origem começa a espiralar na "asa direita" da borboleta, daí muda repentinamente para a "asa esquerda", continua a espiralar, e alterna repetidamente entre as duas asas, de forma imprevisível.

A estrutura fractal do atrator borboleta já havia sido intuída pelo próprio Lorenz, que deu uma explicação interessante para este fenômeno. Podemos associar duas superfícies representando as asas da borboleta, que parecem combinar-se na parte inferior do atrator. Mas isto é impossível, pelo argumento da unicidade das soluções que já usamos anteriormente. Na verdade, as superfícies apenas parecem combinar-se: cada uma é, na realidade, um par de superfícies que, quando parecem se combinar, mostram

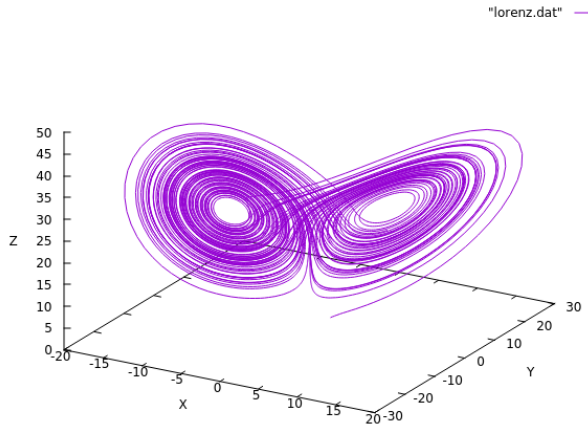

Figura 9.11: Atrator estranho para o sistema de Lorenz (1.38)-(1.40) com os valores $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, e $r = 28$.

ser na verdade quatro superfícies, e assim por diante. Então há infinitos pares de superfícies próximas umas às outras, levando a uma estrutura fractal que explica ser a dimensão $2+0,06$ pouco maior do que a de uma superfície Euclidiana.

Outra contribuição fundamental de Lorenz foi construir um mapa de retorno a partir das trajetórias obtidas por solução numérica das equações diferenciais, para os valores de parâmetros que geram o atrator borboleta: $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, e $r = 28$. Para isso Lorenz considerou os máximos locais sucessivos da variável $z(t)$. Dessa forma definiu uma variável discreva z_n como o n-ésimo máximo local da variável $z(t)$. O mapa de retorno é o gráfico de z_{n+1} em função de z_n.

Como mostra a Figura 9.12, esse mapa de retorno é, com boa aproximação, um mapa unidimensional $z_{n+1} = f(z_n)$, similar ao mapa da tenda estudado nos Capítulos 2 e 3. É notável que a inclinação o mapa de Lorenz é maior que 1, em módulo, o que sugere que não existem órbitas periódicas instáveis no mesmo. Em termos do fluxo tridimensional, esse resultado implicaria que quaisquer ciclos limites que possam existir sejam instáveis, tornando razoável a hipótese de que o atrator borboleta seja, de fato, caótico.

Outro exemplo notável de atrator estranho (caótico e fractal) num fluxo tridimensional ocorre para o sistema de Rössler

$$\dot{x} = -y - z, \tag{9.133}$$
$$\dot{y} = x + ay, \tag{9.134}$$
$$\dot{z} = b + z(a - c), \tag{9.135}$$

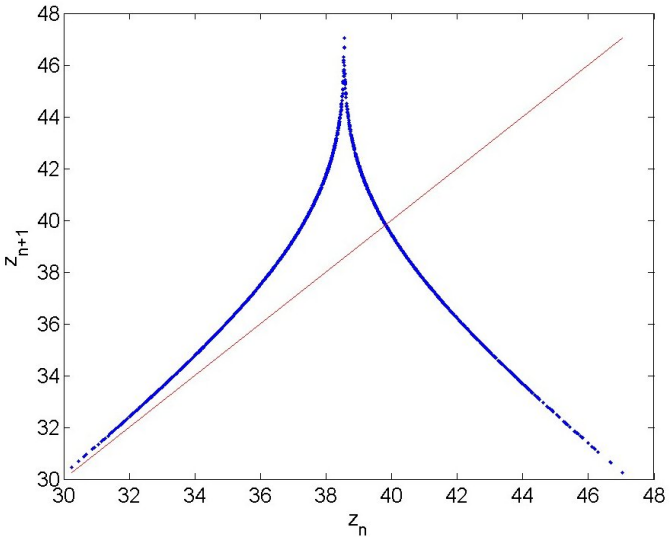

Figura 9.12: Mapa de retorno para os máximos locais da variável z no sistema de Lorenz (1.38)-(1.40) com os valores $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, e $r = 28$.

quando escolhemos os seguintes valores dos parâmetros: $a = 0,1$, $b = 0,1$ e $c = 14$. Integrando numericamente as equações acima por um longo tempo, da ordem de $t \sim 10^6$, obtemos os seguintes expoentes de Lyapunov

$$\lambda_1 = 0,0714, \qquad \lambda_2 = 0,0000, \qquad \lambda_3 = -13,795, \tag{9.136}$$

sugerindo tratar-se de um atrator caótico.

Com estes valores, estimamos a dimensão de Lyapunov do atrator usando (9.137)

$$d_L = 2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_3|} = 2 + \frac{0,0714}{13,795} = 2,0052, \tag{9.137}$$

que também indica tratar-se de um atrator fractal.

9.11 Mapas de Poincaré

Existe uma conexão entre fluxos e mapas que pode ser usada para estudar um sistema dinâmico, reduzindo sua dimensão no espaço de fase. Vamos considerar um fluxo tridimensional $\mathbf{F}(\mathbf{v})$, como os sistemas de Lorenz e Rössler, e uma dada trajetória no espaço de fase. Consideramos uma superfície de seção Σ, como um plano $z = const.$, e registramos as interseções da trajetória com o plano. No entanto, só registraremos as interseções que tenham uma determinada orientação: por exemplo, registramos os pontos em que a trajetória intercepta o plano Σ vindo "de cima para baixo", ou

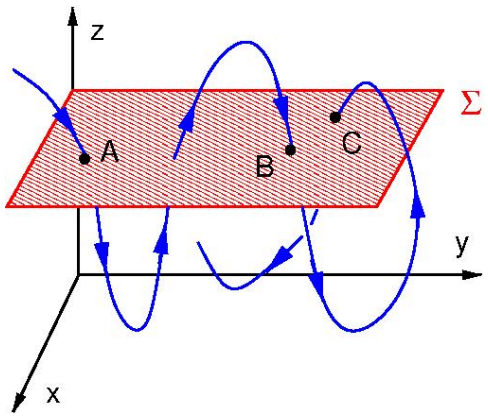

Figura 9.13: Superfície de seção de Poincaré para um fluxo tridimensional.

seja, quando z esteja decrescendo. Assim, na Fig. 9.13, nós registramos os pontos nomeados A, B, C, etc.

Devido ao teorema de existência e unicidade das equações diferenciais, como a trajetória que passa pelos pontos A, B, C, etc. é única, então as coordenadas do ponto B na superfície de seção Σ devem ser funções unívocas das coordenadas do ponto A,

$$x_B = M_x(x_A, y_A), \qquad y_B = M_y(x_A, y_A),$$

que representaremos simbolicamente por $B = \mathbf{M}(A)$. Analogamente, as coordenadas do ponto C serão funções unívocas das coordenadas de B, ou seja

$$C = \mathbf{M}(B) = \mathbf{M}(\mathbf{M}(A)) = \mathbf{M}^{[2]}(A),$$

e assim por diante. Portanto $\mathbf{M}$ representa um mapa bidimensional para as coordenadas dos pontos sobre a superfície de seção Σ. Nós chamamos $\mathbf{M}$ de mapa de Poincaré para o fluxo $\mathbf{F}$.

A vantagem do mapa de Poincaré é que podemos estudar várias propriedades do fluxo usando um mapa (que é mais fácil de resolver numericamente) em um número menor de dimensões. Por exemplo, vamos considerar um fluxo bidimensional que tenha um ciclo-limite atrativo, na forma de um círculo de raio R [Fig. 9.14]. A "superfície" de seção Σ será, nesse caso, uma semi-reta $0 \leq x < \infty$, pois desejamos registrar apenas os pontos da trajetória bidimensional que interceptam Σ no sentido anti-horário.

Inspecionando a Fig. 9.14 vemos que o ponto $P \in \Sigma$, com coordenada $x_P = R$, é um ponto fixo do mapa de Poincaré unidimensional $x_{n+1} = f(x_n)$, que corresponde portanto ao ciclo-limite do fluxo. A diferença básica é que o ciclo-limite é uma órbita de período T real, enquanto P é um ponto fixo com período inteiro. Além disso, na Fig. 9.14 mostramos uma trajetória

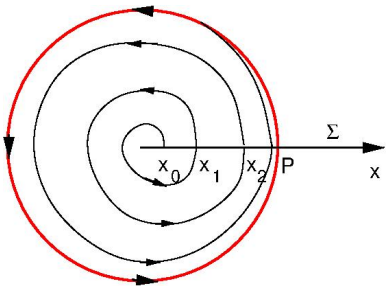

Figura 9.14: Mapa de Poincaré para um ciclo-limite atrativo.

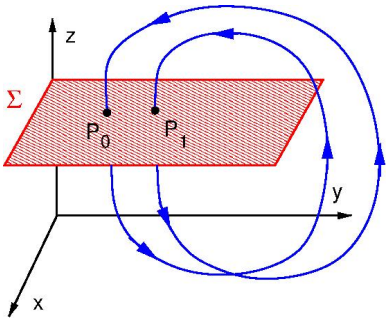

Figura 9.15: Superfície de seção de Poincaré para um fluxo tridimensional com uma órbita periódica.

que parte da condição inicial $x_0 \in \Sigma$ e espirala em direção ao ciclo-limite. Como os sucessivos pontos do mapa de Poincaré

$$x_1 = f(x_0), \qquad x_2 = f(x_1) = f^{[2]}(x_0),$$

aproximam-se do ponto fixo P, este é atrativo, e consequentemente o ciclo-limite também será. Dessa forma duas informações essenciais sobre o sistema bidimensional (a existência e estabilidade de uma órbita periódica) podem ser extraídas de um mapa unidimensional.

Um exemplo conexo a esse é a órbita periódica para um fluxo tridimensional mostrada na Fig. 9.15. Registrando apenas as interseções da mesma numa certa orientação, os pontos na superfície de seção Σ formam uma órbita de período 2 do mapa de Poincaré bidimensional:

$$P_1 = \mathbf{M}(P_0), \qquad P_0 = \mathbf{M}(P_1), \tag{9.138}$$

e assim por diante.

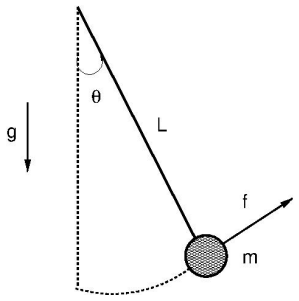

Figura 9.16: Esquema de um pêndulo forçado.

9.12 Mapas estroboscópicos

Vamos considerar um sistema bidimensional não-autônomo, ou seja, que depende explicitamente do tempo

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{v},t). \tag{9.139}$$

Em muitas aplicações físicas o termo dependente do tempo é um forçamento periódico do tipo harmônico. Como um exemplo, a equação de movimento do pêndulo amortecido e periodicamente forçado será [Fig. 9.16]

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + mg\sin\theta = F\cos(\omega t). \tag{9.140}$$

onde m é a massa da partícula, ℓ o comprimento da haste, e b é um coeficiente de amortecimento. Definindo as quantidades

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}, \qquad \nu = \frac{b}{m\ell}, \qquad f = \frac{F}{m\ell} \tag{9.141}$$

reescrevemos a equação de segunda ordem (9.140) como um sistema de duas equações de primeira ordem e não-autônomo

$$\frac{d\theta}{dt} = v, \tag{9.142}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\nu v - \omega_0^2\sin\theta + f\cos(\omega t). \tag{9.143}$$

Para esta classe de sistemas usamos uma variante do mapa de Poincaré chamada *mapa estroboscópico*: nós registramos os valores das variáveis θ e v apenas para os valores do tempo que sejam múltiplos inteiros do período $T = 2\pi/\omega$ da força externa, de modo a trabalhar com as variáveis discretas

$$\theta_n = \theta(t = nT), \qquad v_n = v(t = nT). \tag{9.144}$$

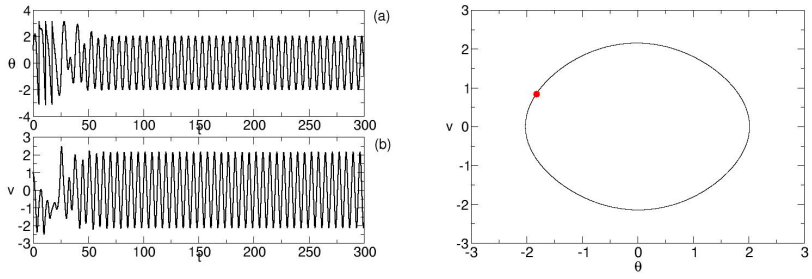

Figura 9.17: Evolução temporal da (a) posição angular e (b) velocidade angular de um pêndulo amortecido e forçado, com amplitude $f = 1,0$ e frequência $\omega = 1,0$. Os demais parâmetros são $\omega_0 = 1$ e $\nu = 0,22$. (c) Velocidade angular em função da posição angular.

Vamos resolver numericamente as equações (9.142)-(9.143), dadas as condições iniciais $(\theta(0) = 1, v(0) = 1)$ e fixando os seguintes valores para os parâmetros: $\nu = 0,22$, $\omega_0 = 1,0$, e $\omega = 1,0$, deixando a amplitude f do forçamento como parâmetro variável. Para $f = 1,0$, mostramos nas Figs. 9.17(a) e (b) a posição e velocidade angulares do pêndulo amortecido e forçado como funções do tempo, respectivamente. A evolução de ambas passa inicialmente por um transiente até que, por volta de $t = 50$ chega-se a oscilações estacionárias.

Observamos que o transiente depende das condições iniciais escolhidas, ao contrário do regime estacionário. Assim, um número infinitamente grande de valores de $(\theta(0), \dot{\theta}(0))$ levará às mesmas oscilações estacionárias. No plano de fase [Fig. 9.17(c)], essas oscilações são representadas por uma trajetória circular, assim como o caso sem forçamento e sem amortecimento ilustrado pela Fig. 8.99, e que é um exemplo de trajetória periódica, por se tratar de uma curva fechada.

Aumentando a intensidade do forçamento para $f = 2,0$, observamos um comportamento qualitativamente diferente do anterior [Fig. 9.18]. Os valores da posição angular do pêndulo mostram dois tipos de comportamento: uma pequena oscilação em torno da posição de equilíbrio estável em $\theta = 0$ e uma rotação que passa pelo ponto de equilíbrio instável em $\theta = \pi$. Como impomos que $-\pi < \theta \leq \pi$, quando o ângulo passa do valor $-\pi$ ele é reinjetado em $\theta = \pi$, o que explica os aparentes picos nas Figs. 9.18(a) e (b). Na verdade o pêndulo passa suavemente pelo ponto com $\theta = \pm\pi$. Esse comportamento é ilustrado, no plano de fase, pela trajetória mostrada na Fig. 9.18(c). Devido à periodicidade em θ a trajetória que chega a $\theta = -\pi$ é reinjetada em $\theta - \pi$, provocando a rotação. Uma visualização melhor da situação seria representar o plano de fase como um cilindro onde os pon-

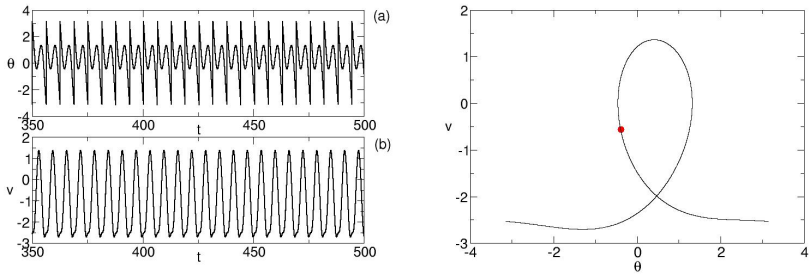

Figura 9.18: Evolução temporal da (a) posição angular e (b) velocidade angular de um pêndulo amortecido e forçado, com amplitude $f = 2,0$ e frequência $\omega = 1,0$. Os demais parâmetros são $\omega_0 = 1$ e $\nu = 0,22$. (c) Velocidade angular em função da posição angular.

tos $\theta = \pm\pi$ são identificados. O laço observado é reflexo da oscilação que ocorre nas proximidades de $\theta = 0$.

Aumentando novamente a intensidade do forçamento, para $f = 2,2$, o padrão de oscilações estacionárias é mais complicado que no caso anterior, mostrando a combinação de uma rotação com duas oscilações [Fig. 9.19(a)]. Embora θ esteja limitado ao intervalo $(-\pi, \pi]$ optamos por manter os valores das velocidades angulares livres dessa restrição [Fig. 9.19(b)]. O movimento do pêndulo no plano de fase apresenta dois laços e duas passagens por $\theta = \pm\pi$ por período completo [Fig. **??**(c)].

Um novo aumento da intensidade para $f = 2,5$ revela um padrão ainda mais complexo de oscilações. O atrator no plano de fase revela quatro laços e quatro passagens por $\theta = \pm\pi$ [Fig. 9.20]. Na dinâmica não-linear é costume reduzir algumas complicações fazendo uma amostragem de pontos da trajetória no plano de fase. No caso de sistemas periodicamente forçados, como o pêndulo visto aqui, registramos apenas os valores das variáveis $(\theta(t), v(t))$ a tempos que são múltiplos inteiros do período de forçamento $T = 2\pi/\omega$, ou seja, quando $t = t_n = nT$, onde n é um número inteiro. Este processo é conhecido como *mapa estroboscópico*, pela semelhança com a técnica de fotografia estroboscópica.

Obteremos, assim, um conjunto discreto de pontos, ao invés de curvas representando a solução do sistema para todos os tempos. Por exemplo, no caso da Fig. **??** obtemos assim um único ponto, representado pelo pequeno círculo em cor vermelha em $(-1,824, 0,836)$. Também o atrator do caso mostrado na Fig **??** é reduzido a um único ponto, de coordenadas $(-0,393, -0,560)$. No Capítulo 2 veremos que ambos são pontos fixos do mapa estroboscópico, e nos informam que a periodicidade básica dos respectivos atratores é igual a 1, mesmo que os atratores em si sejam bem

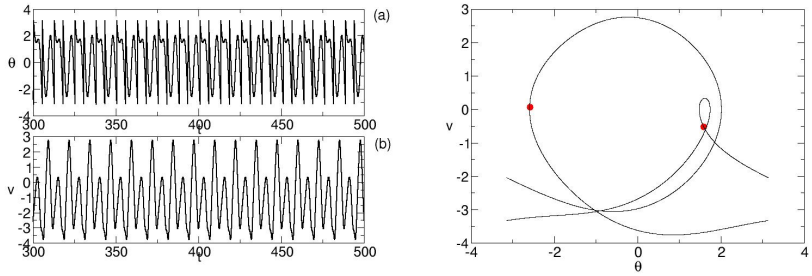

Figura 9.19: Evolução temporal da (a) posição angular e (b) velocidade angular de um pêndulo amortecido e forçado, com amplitude $f = 2,2$ e frequência $\omega = 1,0$. Os demais parâmetros são $\omega_0 = 1$ e $\nu = 0,22$. (c) Velocidade angular em função da posição angular.

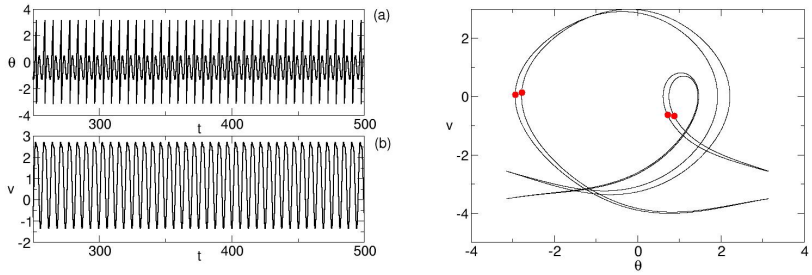

Figura 9.20: Evolução temporal da (a) posição angular e (b) velocidade angular de um pêndulo amortecido e forçado, com amplitude $f = 2,5$ e frequência $\omega = 1,0$. Os demais parâmetros são $\omega_0 = 1$ e $\nu = 0,22$. (c) Velocidade angular em função da posição angular.

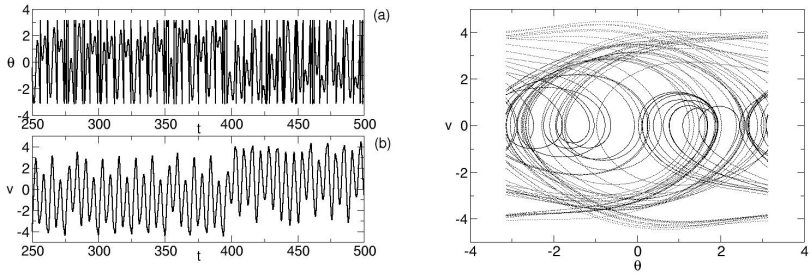

Figura 9.21: Evolução temporal da (a) posição angular e (b) velocidade angular (b) de um pêndulo amortecido e forçado, com amplitude $f = 2,7$ e frequência $\omega = 1,0$. Os demais parâmetros são $\omega_0 = 1$ e $\nu = 0,22$. (c) Velocidade angular em função da posição angular.

diferentes.

O atrator mostrado na Fig. **??** tem dois pontos no mapa estroboscópico, de coordenadas $(1,592, -0,524)$ e $(-2,590, 0,074)$. Estes formam uma órbita de período 2, pois a imagem de um ponto é o outro ponto, e vice-versa. Analogamente, o atrator mostrado na Fig. 9.20 tem quatro pontos em seu mapa estroboscópico, representando uma órbita de período 4.

O caso mostrado na Figura 9.21, obtido para $f = 2,7$, exemplifica um comportamento caótico, pois os valores de θ sucedem-se de maneira irregular ao longo do tempo sem uma periodicidade evidente. Essa mesma irregularidade é observada no plano de fase, onde um atrator contendo um grande número de laços e rotações é observado, sem que a trajetória pareça fechar-se sobre si mesma, como nos casos anteriores. Além disso, para a existência de caos, é necessário verificar a ocorrência de sensibilidade às condições iniciais, o que será visto em detalhes no Capítulo 9. No entanto, podemos ilustrar este fato considerando a evolução temporal da posição angular do pêndulo, para os mesmos parâmetros da Fig. 9.21, mas com duas condições iniciais muito próximas: $\theta(0) = 1,00000$ e $1,00001$. Na Fig. 9.22 observamos que, até aproximadamente o instante de tempo $t = 43$, ambas as evoluções são praticamente idênticas mas que, para $t > 43$ afastam-se de uma tal maneira que passam a descrever comportamentos totalmente distintos, ainda que ambos sejam igualmente aperiódicos.

Na Fig. 9.21 o comportamento caótico é observado até tempos da ordem de $t = 100$, o que poderia nos indicar um transiente de longa duração. Entretanto, o mesmo comportamento caótico persiste após milhares e até milhões de valores de t. Isto pode ser verificado no mapa estroboscópico correspondente, mostrado na Fig. 9.23, produzido com o software *Dynamics*, mencionado no Prefácio deste trabalho. No atrator da Fig. 9.23(a) os

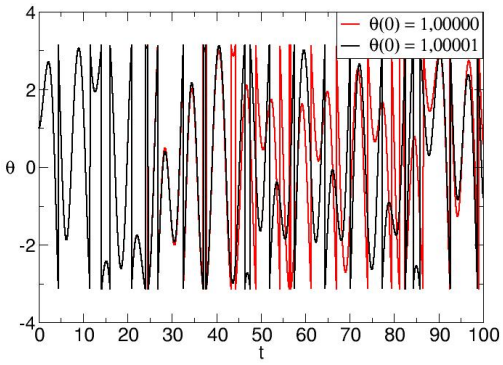

Figura 9.22: Evolução temporal da posição angular de um pêndulo amortecido e forçado para duas condições iniciais muito próximas: $\theta(0) = 1,00000$ e $1,00001$. Os demais parâmetros são $f = 2,7$, $\omega = 1,0$, $\omega_0 = 1$ e $\nu = 0,22$. (c) Velocidade angular em função da posição angular.

pontos não parecem exibir periodicidade alguma, mesmo após integrar as equações (**??**)-(**??**) até $t \sim 3 \times 10^6$.

9.13 Determinação analítica do mapa estroboscópico

Apenas em alguns casos particulares é possível determinar analiticamente a forma do mapa estroboscópico. Um exemplo importante consiste num rotor periodicamente pulsado por forças impulsivas modeladas pela função delta de Dirac. Um rotor consiste de uma partícula de massa m e que pode girar em torno de um eixo que passa por um ponto O, presa por uma haste sem massa de comprimento ℓ. O momento de inércia é, portanto, $I = m\ell^2$ [Fig. 9.24]

A posição do rotor é determinada pelo ângulo θ que a haste faz com o eixo horizontal. Supomos que haja: (i) um torque de atrito viscoso linear da forma $-b\dot{\theta}$, onde b é um coeficiente de amortecimento; (ii) um torque provocado por uma força externa dependente do tempo $F(t)$, agindo na direção tangencial ao movimento da partícula. A equação de movimento do rotor é

$$I\ddot{\theta} = -b\dot{\theta} + \ell F(t). \tag{9.145}$$

Vamos supor que a força externa consista de uma sequência de pulsos do tipo função delta de Dirac com período T e amplitude $F_0 f(\theta)$, onde f é

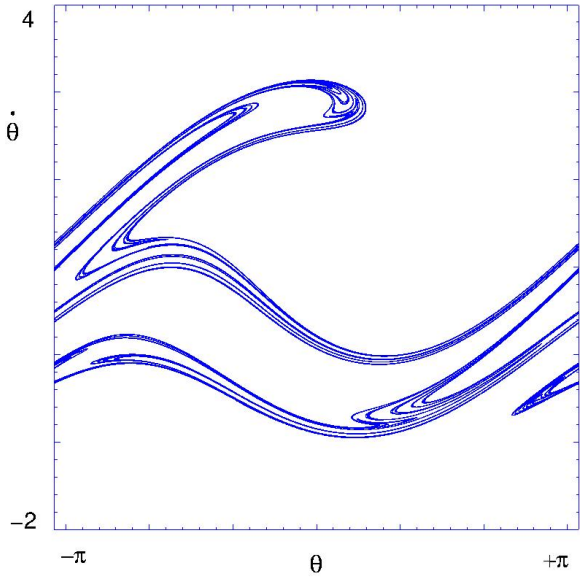

Figura 9.23: Velocidade angular em função da posição angular de um pêndulo amortecido e forçado, com amplitude $f = 1,0$ e frequência $\omega = 2,7$. Os demais parâmetros são $\omega_0 = 1$ e $\nu = 0,22$. Figura obtidas com o software *Dynamics* [1].

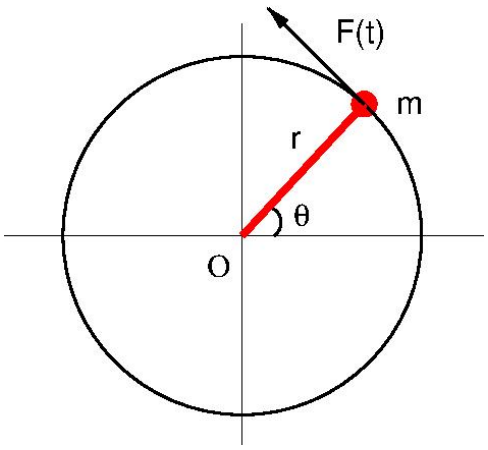

Figura 9.24: Figura esquemática de um rotor pulsado.

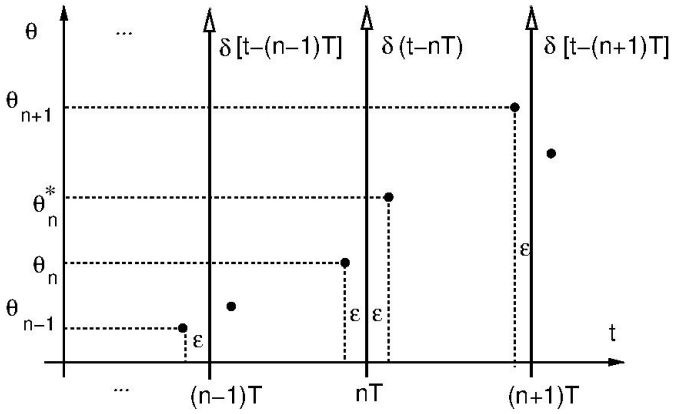

Figura 9.25: Definição das variáveis discretas para o rotor pulsado.

uma função arbitrária da posição.

$$F(t) = F_0 f(\theta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT), \tag{9.146}$$

de maneira que os pulsos são aplicados em instantes de tempo $t = 0, T, 2T, \ldots$. Substituindo (9.146) em (9.145) obtemos a equação

$$\ddot{\theta} + \Gamma\dot{\theta} = K f(\theta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT), \tag{9.147}$$

onde definimos as quantidades

$$\Gamma = \frac{b}{I}, \qquad K = \frac{\ell F_0}{I}. \tag{9.148}$$

9.13.1 Obtenção do mapa

A equação (9.148) pode ser expressa na forma de um fluxo bidimensional não-autônomo (dependente do tempo):

$$\dot{\theta} = \omega, \tag{9.149}$$

$$\dot{\omega} = -\Gamma\dot{\theta} + K f(\theta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT). \tag{9.150}$$

Para obter um mapa a partir deste fluxo definimos as seguintes variáveis

discretas [Fig. 9.25]

$$\theta_n = \lim_{\varepsilon\to 0}\theta(t = nT-\varepsilon), \tag{9.151}$$

$$\theta_n^* = \lim_{\varepsilon\to 0}\theta(t = nT+\varepsilon), \tag{9.152}$$

$$\omega_n = \lim_{\varepsilon\to 0}\omega(t = nT-\varepsilon), \tag{9.153}$$

$$\omega_n^* = \lim_{\varepsilon\to 0}\omega(t = nT+\varepsilon). \tag{9.154}$$

Integrando (9.149) no entorno da função delta aplicada em $t = nT$ temos

$$\int_{t=nT-\varepsilon}^{t=nT+\varepsilon} d\theta = \omega(t = nT-\varepsilon)[(nT+\varepsilon)-(nT-\varepsilon)] = 2\varepsilon\omega(t = nT-\varepsilon).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ e usando (9.151) e (9.152) obtemos

$$\theta_n^* = \theta_n. \tag{9.155}$$

Analogamente, para (9.150), resulta

$$\int_{t=nT-\varepsilon}^{t=nT+\varepsilon} d\omega = -2\Gamma\varepsilon\omega(t = nT-\varepsilon) + K\sum_{m=0}^{\infty}\int_{nT-\varepsilon}^{nT+\varepsilon} dt\, f(\theta(t))\delta(t-mT).$$

Usando a propriedade de filtragem da função delta de Dirac (A.5)

$$\int_{nT-\varepsilon}^{nT+\varepsilon} dt\, f(\theta(t))\delta(t-mT) = f(\theta(t = mT-\varepsilon))\delta_{mn},$$

onde δ_{mn} é a delta de Krönecker, que filtra na somatória apenas o termo para o qual $m = n$. Assim

$$\omega(t = nT+\varepsilon) - \omega(t = nT-\varepsilon) = -2\Gamma\varepsilon\omega(t = nT-\varepsilon) + Kf(\theta(t = nT-\varepsilon)).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ chegamos a

$$\omega_n^* = \omega_n + Kf(\theta_n). \tag{9.156}$$

Agora integramos (9.150) entre dois pulsos delta, ou seja, no intervalo $nT+\varepsilon < t' < t < (n+1)T-\varepsilon$. Como $K = 0$ nesse intervalo temos

$$\int_{nT+\varepsilon}^{t}\frac{d\omega}{\omega} = -\Gamma\int_{nT+\varepsilon}^{t} dt',$$

que fornece

$$\omega(t) = \omega(t = nT+\varepsilon)e^{-\Gamma(t-nT-\varepsilon)}, \tag{9.157}$$

ou, no limite $\varepsilon \to 0$, usando (9.154),

$$\omega(t) = \omega_n^* e^{-\Gamma(t-nT)}. \tag{9.158}$$

No caso em que $t = (n+1)T - \varepsilon$, teremos, no mesmo limite, que

$$\omega_{n+1} = \omega_n^* e^{-\Gamma T}. \tag{9.159}$$

Finalmente, para integrar a equação (9.149) no mesmo intervalo anterior, usamos (9.157) para escrever

$$\int_{nT+\varepsilon}^{t} d\theta = \omega_n^* \int_{nT+\varepsilon}^{t} e^{-\Gamma(t'-nT)} dt',$$

que resulta

$$\theta(t) - \theta(t = nT + \varepsilon) = -\frac{\omega_n^*}{\Gamma}\left\{e^{-\Gamma(t-nT)} - e^{-\Gamma\varepsilon}\right\}, \qquad (t < (n+1)T - \varepsilon).$$

Fazendo $t = (n+1)T - \varepsilon$ e tomando o limite $\varepsilon \to 0$ chegamos a

$$\theta_{n+1} = \theta_n^* = -\omega_n^* \frac{e^{-\Gamma T} - 1}{\Gamma}. \tag{9.160}$$

A forma final do mapa resulta quando substituimos (9.155) e (**??**) em (9.159) e (9.160):

$$\omega_{n+1} = e^{-\Gamma T}\left(\omega_n + K f(\theta_n)\right), \tag{9.161}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \left(\frac{e^{-\Gamma T} - 1}{\Gamma}\right)\left(\omega_n + K f(\theta_n)\right). \tag{9.162}$$

9.13.2 Casos particulares

Inicialmente vamos considerar os limites de forte dissipação ($\Gamma \to \infty$) e forte intensidade $K \to \infty$, mas desde que $\Gamma/K = 1$. Nesse caso $\omega_n = 0$ e o sistema se reduz ao mapa unidimensional

$$\theta_{n+1} = \theta_n + f(\theta_n). \tag{9.163}$$

Optando pela função

$$f(\theta) = \Omega - \frac{\varepsilon}{2\pi}\sin(2\pi\theta), \tag{9.164}$$

onde Ω e ε são parâmetros, teremos o chamado mapa do seno-círculo

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{\varepsilon}{2\pi}\sin(2\pi\theta_n). \tag{9.165}$$

Adotando a escolha

$$f(\theta) = (r-1)\theta - r\theta^2, \tag{9.166}$$

teremos o mapa logístico [1]

$$\theta_{n+1} = r\theta_n(1-\theta_n). \tag{9.167}$$

Outra situação interessante ocorre quando reescrevemos o mapa (9.161)-(9.162) na forma

$$\omega_{n+1} = e^{-\Gamma T}\left(\omega_n + Kf(\theta_n)\right), \tag{9.168}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \left(\frac{e^{-\Gamma T}-1}{\Gamma}\right)\omega_{n+1}. \tag{9.169}$$

Colocando ω_{n+1} em evidência em (9.169) e inserindo em (9.168) obtemos, após alguma álgebra,

$$\theta_{n+1} + e^{-\Gamma}\theta_{n-1} = (1+e^{-\Gamma})\theta_n + \left(\frac{1-e^{-\Gamma}}{\Gamma}\right)Kf(\theta_n),$$

onde fizemos $T = 1$. Definindo

$$\left(\frac{1-e^{-\Gamma}}{\Gamma}\right)Kf(\theta_n) = -(1+e^{-\Gamma})\theta_n + 1 - a\theta_n^2, \tag{9.170}$$

$$b = -e^{-\Gamma}, \tag{9.171}$$

obtemos

$$\theta_{n+1} = 1 - a\theta_n^2 + b\theta_{n-1}. \tag{9.172}$$

Redefinimos as variáveis como

$$X_n = \theta_n, \qquad Y_n = b\theta_{n-1}, \tag{9.173}$$

de modo que transformamos (9.172) num mapa bidimensional

$$X_{n+1} = 1 - aX_n^2 + Y_n, \tag{9.174}$$

$$Y_{n+1} = bX_n, \tag{9.175}$$

que é o mapa de Hénon na sua forma original (4.108)-(4.109) [38]. Embora a derivação tenha sido feita para $b < 0$, o mapa de Hénon é matematicamente definido para $-1 \leq b \leq 1$.

Outro caso particular aparece tomando o limite $\Gamma \to 0$ em (9.161)-(9.162), de forma que não existe atrito no sistema. Escolhendo, além disso, $T = 1$, obtemos o mapa conservativo

$$\omega_{n+1} = \omega_n + Kf(\theta_n), \tag{9.176}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega_n + Kf(\theta_n) = \theta_n + \omega_{n+1}. \tag{9.177}$$

Se, adicionalmente, fizermos $f(\theta) = -\sin\theta$ obteremos o mapa padrão, também chamado de mapa de Chirikov-Taylor:

$$\omega_{n+1} = \omega_n - K\sin\theta_n, \tag{9.178}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega_{n+1}. \tag{9.179}$$

[1] A rigor, devemos fazer aqui uma mudança de variável $\theta \to x$, tal que $x \in [0,1]$.

9.14 Problemas

1. Considere o sistema de Rössler

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c), \end{aligned}$$

Faça um programa de computador ou use um software numérico de sua preferência para obter a solução do sistema acima para os seguintes valores dos parâmetros

$$a = 0,2, \qquad b = 0,2, \qquad c = 4,7,$$

usando as condições iniciais

$$x(0) = -5, \qquad y(0) = z(0) = 5.$$

Faça os gráficos $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ e também as projeções no espaço de fase $x(y)$, $y(z)$ e $x(z)$. Se estiver disponível, procure também representar o atrator em três dimensões.

Notes

[7]Dizemos que $\mathbf{v}^*$ é estável no sentido de Lyapunov se, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para qualquer outra solução $\mathbf{v}(t)$ que satisfaz $d(0) < \delta$, então $d(t) < \varepsilon$ para todo $t > 0$. Já $\mathbf{v}^*$ é assintoticamente estável se é estável no sentido de Lyapunov e existe uma constante $b > 0$ tal que, se $d(0) < b$, então $\lim_{t\to\infty} d(t) = 0$.

[8]A demonstração dos critérios de Bendixson e Dulac pode ser encontrada em [**?**], seção 1.1.D

Apêndice A

A função delta de Dirac

A.1 Definição

A função delta de Dirac é definida por meio das seguintes propriedades:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} x \neq 0, \\ \infty, & \text{se} x = 0, \end{cases} \tag{A.1}$$

onde $-\infty < x < \infty$, e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \tag{A.2}$$

A função delta definida em (A.1)-(A.2) é aplicada em $x = 0$. Podemos generalizar para o caso em que é aplicada em $x = a$:

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0, & \text{se} x \neq a, \\ \infty, & \text{se} x = a, \end{cases}, \tag{A.3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) dx = 1, \tag{A.4}$$

A rigor $\delta(x)$ não é uma função, e sim o que chamamos de distribuição, ou função generalizada. Maiores detalhes sobre este ponto podem ser encontrados em referências específicas, como [**?**].

A.2 Propriedades

Seja $f(x)$ uma função arbitrária. Então vale a propriedade de filtragem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a). \tag{A.5}$$

A propriedade de filtragem vale também para sub-intervalos finitos da reta real. Se $c \leq a \leq b$ então

$$\int_{c}^{b} \delta(x-a) f(x) dx = f(a), \tag{A.6}$$

No entanto, se $a > b$ ou $a < c$, a função delta anula-se em todos os pontos do intervalo $[c,b]$, donde

$$\int_c^b \delta(x-a)f(x)dx = 0. \tag{A.7}$$

Essa é válida mesmo que $f(x)$ seja uma outra função delta. Por exemplo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\delta(y-a)dy = \delta(x-a). \tag{A.8}$$

Pode-se mostrar que a função delta é par, ou seja, que

$$\delta(x) = \delta(-x). \tag{A.9}$$

Este é um caso particular de uma propriedade mais geral: seja $a \neq 0$, então

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x). \tag{A.10}$$

A propriedade de escala (A.10), por sua vez, também pode assumir uma forma mais ampla. Seja $y(x)$ uma função de x que possua zeros símples nos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$, tal que $y(x_i) = 0$ e $y'(x_i) \neq 0$. Então

$$\delta[y(x)] = \sum_i \frac{1}{|y'(x_i)|}\delta(x-x_i), \tag{A.11}$$

onde o somatório se estende a todos os zeros de $y(x)$.

Como um exemplo de aplicação, considere a função $y(x) = x^2 - a^2$, que tem zeros símples nos pontos $x = \pm a$, já que $y'(x_i) = \pm 2a \neq 0$. Então, de (A.11) temos que

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{\delta(x-a)}{|y'(a)|} + \frac{\delta(x+a)}{|y'(-a)|} = \frac{1}{2a}\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right]. \tag{A.12}$$

A.3 Representações

É comum representarmos a função delta como o limite de uma sequência infinita de funções bem-comportadas a um parâmetro $\{\delta_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, quando o parâmetro tende a infinito: $\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(x)$. A rigor esse limite não existe por vários motivos (é infinito, não é unico, etc.); e só é bem-definido quando o entendemos dentro de uma integral envolvendo funções normais $f(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx. \tag{A.13}$$

Um exemplo de representação para a função delta é [Fig. A.1]

$$\delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x}, \tag{A.14}$$

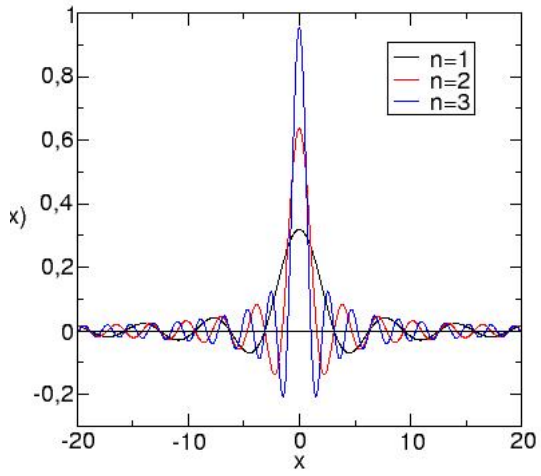

Figura A.1: Gráfico da representação (A.14) para a função delta para alguns valores do parâmetro n.

o que pode ser mostrado verificando as duas condições (A.1)-(A.2) para cada n.

Usando

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \tag{A.15}$$

na representação (A.14) temos, usando o teorema fundamental do cálculo integral, que

$$\delta_n(x) = \frac{1}{\pi x}\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{ix}e^{y}|_{-inx}^{+inx} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{ix}\int_{-inx}^{+inx} e^{y}dy.$$

Fazendo a transformação de variável $y = ikx$ temos que

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{ix}ix\int_{-n}^{+n} e^{ikx}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{+n} e^{ikx}dk,$$

que, no limite de n tendendo ao infinito, nos dá uma representação integral para a função delta

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk, \tag{A.16}$$

onde a integral deve ser tomada como valor principal de Cauchy, devido à singularidade existente em $x = 0$.

A representação integral (A.16) só pode ser usada com funções bem-comportadas $f(x)$ que sejam contínuas por partes em $(-\infty, +\infty)$, ou seja,

$f(x)$ pode ter um número finito ou infinito enumerável de pontos de descontinuidade $x_1, x_2, \ldots x_i$. Em cada um desses pontos de descontinuidade o valor da função $f(x)$ deve ser substituido pela média dos seus valores à direita e à esquerda da descontinuidade:

$$\frac{f(x_i - 0) + f(x_i + 0)}{2}.$$

Logo, $f(x)$ deve ser somável da mesma forma que exigimos para um desenvolvimento em série de Fourier. Em outras palavras, se $f(x)$ admite uma expansão em série de Fourier, então pode ser usada a representação integral (A.16).

Apêndice B

Espectros de potência

B.1 Transformada de Fourier

Um resultado central da análise de Fourier é que qualquer função do tempo $x(t)$ pode ser representada pela superposição de um certo número de componentes periódicas (senos e cossenos). A análise espectral visa a determinação da contribuição relativa de cada uma dessas componentes.

Se $x(t)$ for uma função periódica de período T, ou seja, se

$$x(t+T) = x(t),$$

podemos representar $x(t)$ como uma série de Fourier, que é uma combinação linear de oscilações cujas frequências são múltiplos inteiros da frequência característica $f = 1/T$.

Caso, porém, $x(t)$ não seja uma função periódica, devemos trabalhar com a sua transformada de Fourier, definida como

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, x(t)\, e^{-i2\pi ft}, \tag{B.1}$$

de modo que $X(f)$ representa o peso relativo com que as componentes de frequência f entram na composição da série temporal $x(t)$. Como $X(f)$ é um número complexo, é conveniente trabalhar com a chamada densidade espectral de potências

$$P(f) = X^*(f)X(f) = |X(f)|^2. \tag{B.2}$$

Costumamos chamar de espectro de potências o gráfico de $P(f)$ em função de f. O eixo das ordenadas é usualmente representado em escala logarítmica e os valores são expressos em unidades arbitrárias ou, às vezes, em decibéis.

Um exemplo simples consiste numa uma série temporal harmônica com uma única frequência f_0

$$x(t) = 2\cos(2\pi f_0 t) = e^{i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t}. \tag{B.3}$$

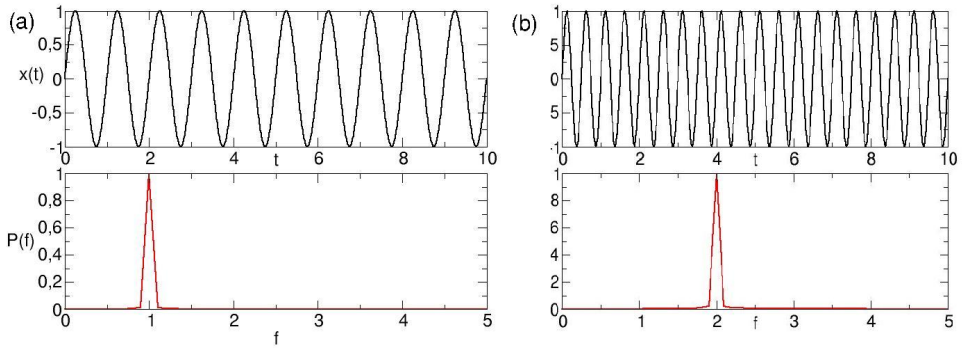

Figura B.1: Série temporal e espectro de potências para $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ com (a) $f = 1$; (b) $f = 2$.

Substituindo na definição (B.1) teremos

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, x(t)\, e^{-i2\pi(f-f_0)t} + \int_{-\infty}^{\infty} dt\, x(t)\, e^{-i2\pi(f+f_0)t}. \tag{B.4}$$

Usando a representação integral da função delta de Dirac (A.16) e a propriedade de escala (A.10), temos

$$X(f) = \delta(f - f_0) + \delta(f - f_0). \tag{B.5}$$

No Apêndice A encontra-se uma breve revisão das propriedades básicas da função delta de Dirac. Pela definição (A.3), a transformada de Fourier consiste em dois picos infinitamente altos e estreitos nas frequências $f = f_0$ e $f = -f_0$ (esta última é ignorada, se impomos que as frequências devam ser positivas).

Na prática, quando computamos numericamente a transformada de Fourier usamos um número finito de pontos, de modo que os picos de frequência têm larguras finitas, como mostram a Figuras B.1(a) e (b), onde mostramos as séries $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$, com $f_0 = 1$ e 2, bem como os respectivos espectros de potência.

Considerando, agora, uma soma de duas funções harmônicas

$$x(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t), \tag{B.6}$$

com frequências características $f_1 = 1$ e $f_2 = 2$ e amplitudes $A_1 = 1$ e $A_2 = 1/2$, o espectro de potências [Fig. B.2(a)] mostra dois picos de frequência cujas alturas são iguais às amplitudes do sinal, quantificando o peso relativo de cada componente. Trocando os pesos para $A_1 = 1/2$ e $A_2 = 1$, a mudança reflete-se no gráfico de $P(f)$ [Fig. B.2(b)]

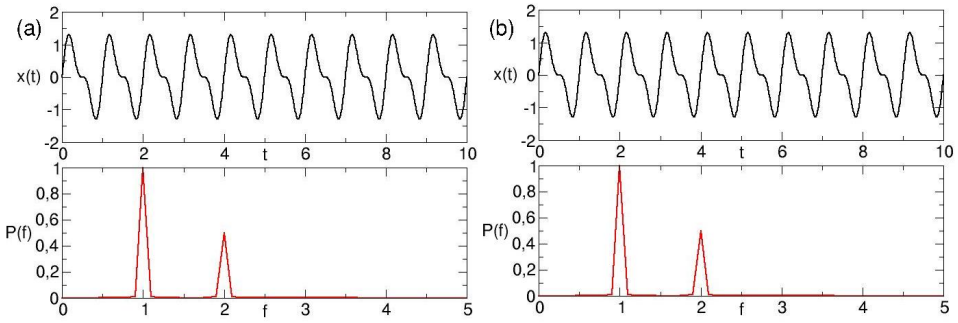

Figura B.2: Série temporal e espectro de potências para (B.6) com $f_1 = 1$, $f_2 = 2$ e (a) $A_1 = 1$ e $A_2 = 1/2$; (b) $A_1 = 1/2$ e $A_2 = 1$.

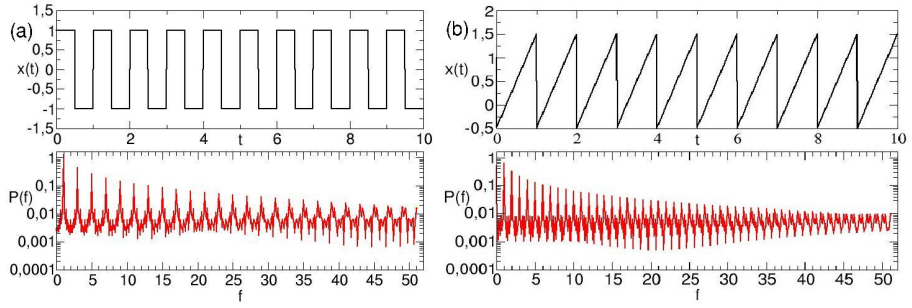

Figura B.3: Série temporal e espectro de potências para (a) (B.7) e (b) (B.8), ambas com $T = 1$.

Quando a série temporal é periódica, mas tem um conteúdo harmônico mais rico, pode haver um grande número de frequências relevantes, como no exemplo de uma onda quadrada de período $T = 1$:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < t < T/2, \\ -1, & \text{se } T/2 < t < T \end{cases} \tag{B.7}$$

Conforme mostrado na Fig. B.3(a), teremos picos de frequências em $f =$ 1, 3, 5, etc.; todos valores ímpares pois a função (B.7) é ímpar em $0 < t < T$ (a série de Fourier consiste apenas de senos). Observe que a intensidade dos picos decai exponencialmente com f. Já para a onda dente de serra de

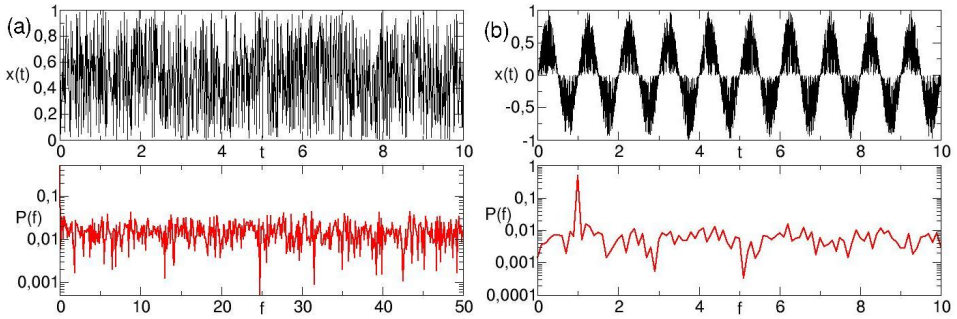

Figura B.4: Série temporal e espectro de potências para (a) ruído branco e (b) série senoidal com $f = 1$ corrompida por ruído branco.

mesmo período [Fig. B.3(b)]

$$x(t) = -\frac{1}{2} + 2t, \qquad (0 < t < 1), \tag{B.8}$$

que não é nem par nem ímpar, donde o espectro de potência contêm todas picos em todas as frequências inteiras.

Um processo estocástico pode gerar uma sequência de números pseudo-aleatórios $\{x_n\}$ que, apesar de ser aperiódica, não é caótica por não ser determinística. Há diversos processos estocásticos de interesse físico, como a desintegração radioativa de um núcleo, ou a posição de uma partícula em suspensão num líquido (movimento browniano). Do ponto de vista computacional, empregamos geradores de números pseudo-aleatórios que baseiam-se em algoritmos com maior ou menor grau de confiabilidade. Tais geradores são muito utilizados em simulações computacionais do tipo Monte Carlo.

O princípio básico destes geradores é que, a partir de um valor inicial x_0 (chamado "semente"), a sequência de números $\{x_n\}$ é aperiódica. Os valores são chamados pseudo-aleatórios pois, dado o mesmo valor da semente, obteremos a mesma série aperiódica. Tais variáveis obedecem a uma dada distribuição de probabilidade, que pode ser uniforme, Gaussiana, etc. num certo intervalo. As linguagens de programação têm funções pré-definidas para a geração de números pseudo-aleatórios, e há diversos algoritmos confiáveis existentes na literatura especializada [vide [27], Cap. 7, para uma discussão aprofundada].

Na Fig. B.4(a) mostramos a série temporal $\{x_n\}$ obtida a partir do gerador de números pseudo-aleatórios `ran1`, com distribuição de probabilidade uniforme no intervalo $[0,1]$ [cf. [27], seção 7.0], e que exibe uma evidente

aperiodicidade. O seu espectro de potência revela uma banda larga distribuída ao longo do intervalo de frequências. Por ser uma composição de um grande número de frequências, tais séries são comumente referidas como de *ruído branco*, lembrando que a cor branca resulta da mistura de todas as cores do espectro visível.

É interessante, também, investigar como fica o espectro de potências de um sinal periódico, como um seno, corrompido por ruído branco. Esta é uma situação bastante comum em processos físicos, uma vez que vários tipos de influências extrínsecas combinam-se para produzir um sinal ruidoso que se superpõe ao sinal determinístico. Na Fig. B.4(b) mostramos a série temporal

$$x(t) = A(t)\sin(2\pi f t), \tag{B.9}$$

onde os valores da amplitude $A(t)$ foram obtidas usando o gerador de números pseudo-aleatórios `ran1`. O espectro de potências mostra não só a banda larga característica da componente ruidosa, como também um pico na frequência característica $f = 1$ do sinal senoidal.

B.2 Transformada de Fourier discreta

Na prática, os pontos da função $x(t)$ formam sempre uma série temporal finita e discreta $\{x_n\} = x(t_n)$, onde $t_n = n\Delta t$, onde Δt é o intervalo de tempo utilizado na discretização. Chamamos $f_{max} = 1/\Delta t$ de frequência de amostragem. Se N é o número de pontos amostrados da série, então $t_{max} = N\Delta t$ é o tamanho da série.

A chamada *transformada de Fourier discreta* (DFT) da série $\{x_n\}$ é uma sequência de números complexos $\{X_k\}$, com $k = 0, 1, \ldots N-1$, dados por

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N}, \tag{B.10}$$

e a densidade espectral de potência será

$$P(f) = X_k^* X_k = |X_k|^2. \tag{B.11}$$

A frequência de amostragem f_{max} é a maior frequência da série discreta que pode ser resolvida. Por construção, o espectro de potências é simétrico em relação à chamada frequência de Nyquist $f_N = f_{max}/2$. Assim, no gráfico de $P(f)$ costuma-se registrar apenas os valores de frequência menores que f_N. Por exemplo, na onda quadrada mostrada na Fig. B.3(a) a frequência de amostragem é $f_{max} = 102,4$, de modo que o espectro de potências vai apenas de $f = 0$ até $51,2$.

A implementação numérica da definição (B.10) para uma série temporal amostrada com N pontos requer um tempo computacional da ordem de N^2. Cooley e Tukey, em 1965, criaram um algoritmo otimizado para o cálculo

numérico da transformada de Fourier (FFT), válido se $N = 2^p$ (onde p é um inteiro), e onde o tempo computacional aumenta com $N \ln N$, tornando o cálculo muito mais eficiente. Rotinas numéricas para o cálculo da FFT existem em vários softwares numéricos, bem como fazem parte de bibliotecas computacionais de uso corrente [para uma discussão pormenorizada vide [27], Cap. 13].

Referências Bibliográficas

[1] H. E. Nusse, J. A. Yorke, *Dynamics: Numerical Explorations*, 2nd. Ed. (Springer, New York, 1998).

[2] H. Goldstein, C. P. Poole, J. P. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd. Ed. (Addison Wesley, 2001).

[3] K. R. Symon, *Mechanics* 3rd. Ed. (Addison Wesley, 1971).

[4] I. Peterson, *Newton's Clock: Chaos in the Solar System* (Freeman, New York, 1993).

[5] P. Hagedorn, *Oscilações Não-Lineares* (Ed. Edgard Blücher, São Paulo)

[6] P. S. Laplace, *Essai Philosophique sur les Probabilités* (Courcier, Paris, 1814). Reproduzido de D. Ruelle *Acaso e Caos*, Trad. Roberto Leal Ferreira (Ed. UNESP, São Paulo, 1993).

[7] G. Sussman e J. Wisdom, Science **257**, 56-62 (1992).

[8] H. J. Poincaré, Acta Mathematica **13** (1890).

[9] J. Wisdom, S. J. Peale, and F. Mignard, Icarus **58**, 137-152 (1984).

[10] K. Alligood, T. Sauer, J. A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, (Springer Verlag, New York, 1997).

[11] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, *Studies of Nonlinear Problems*, Document LA-1940. (Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, 1955)

[12] E. N. Lorenz, Journal of the Atmospheric Sciences **20**, 130 (1963).

[13] Chandrasekhar, *Hydrodynamical and stability*

[14] T. Y. Li, J. A. Yorke, Amer. Math. Monthly **82**, 985 (1975).

[15] Yu. M. Svirezhev, D. O. Logofet, *Stability of Biological Communities* (Mir Publishers, Moscow, 1983).

[16] R. M. May, Nature **261**, 459 (1976).

[17] R. M. May, J. Theor. Biol. **51**, 511 (1975).

[18] S. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos* (Perseus Books, Reading, 1994).

[19] D. Gulick, *Encounters with Chaos* (McGraw Hill, New York, 1992).

[20] M. Feigenbaum, Journal of Statistical Physics **19**, 25–52 (1978).

[21] P. J. Myrberg, Journal de Mathématiques pures et appliquées **9**, 339-351 (1962).

[22] P. Cvitanovic, Acta Phys. Polonica **A65**, 203 (1984).

[23] A. Libchaber, C. Laroche, S. Fauve, Journal de Physique Lettres **43**, L211 (1982).

[24] A. Libchaber, C. Laroche, S. Fauve, Physica D, **7**, 73-84 (1983).

[25] A. Libchaber, *Experimental aspects of the period doubling scenario*. In: L. Garrido (editor), Dynamical System and Chaos. Lecture Notes in Physics, vol 179 (Springer, Berlin-Heidelberg, 1983).

[26] T. Kapitaniak, *Chaos for Engineers* (Springer, Berlin-Heidelberg, 2000).

[27] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vettering, e B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*, 2nd. Ed. (Cambridge University Press, 1995). Há, também, versões desta obra em Fortran e Pascal.

[28] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd ed. (Addison-Wesley, Redwood City, 1989).

[29] N. Metropolis, M. L. Stein, P. R. Stein, Journal of Combinatorial Theory A **15**, 25–44 (1973).

[30] M. V. Jakobson, Communications in Mathematical Physics **81**, 39-88 (1981).

[31] J. D. Farmer, Phys. Rev. Lett. **55**, 351 (1985).

[32] A. N. Sharkovski, Ukrainian Mathematical Journal **16**, 61-71 (1964).

[33] P. Manneville and Y. Pomeau, Communications in Mathematical Physics **74**, 189-197 (1980).

[34] P. Berge, Y. Pomeau and C. Vidal, *Order within Chaos: Towards a Deterministic Approach to Turbulence* (Wiley, New York, 2004).

[35] H. G. Schuster, *Deterministic Chaos: an Introduction*, 3rd. Ed. (Wiley-VCH, 1995).

[36] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, Physica D **7**, 181 (1983).

[37] M. W. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos* 2nd. Ed. (Elsevier, Amsterdam, 2004)

[38] M. Hénon, Communications in Mathematical Physics **50**, 69-77 (1976).

[39] R. Devaney, Z. Nitecki, Communications in Mathematical Physics **67**, 137-146 (1979).

[40] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields* (Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983).

[41] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1990).

[42] Y.-C. Lai, C. Grebogi, J. A. Yorke, S. C. Venkataramani, *Riddling Bifurcation in Chaotic Dynamical Systems*, Phys. Rev. Lett. **77**, 55 (1996).

[43] A. Wolf, A. Swift, B. Jack, H. L. Swinney, J. A. Vastano, Physica D. **16** 285–317 (1985).

[44] N. B. Tufillaro, T. Abbott, J. Reilly, *An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos* (Addison-Wesley, Redwood City, 1992).

[45] H. E. Nusse, J. A. Yorke, *Dynamics: Numerical Explorations*, 2nd. Ed. (Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1997).

[46] M. Benedicks, L. Carleson, Annals of Mathematics **133**, 73-169 (1991).

[47] L. Mora, M. Viana, Acta Mathematica **171**, 1-71 (1993).

[48] E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke, Phys. Rev. Lett. **64**, 1196 (1990).

[49] O. Biham, W. Wenzel, Phys. Rev. Lett. **63**, 819-822 (1989).

[50] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Rev. Ed. (Freeman, New York, 1983)

[51] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, 2nd. Ed. (Cambridge University Press, 2002).

[52] J. Kaplan, J. A. Yorke, *Chaotic behavior of multidimensional difference equations*. In H. O. Peitgen, H. O. Walther (eds.). Functional Differential Equations and the Approximation of Fixed Points. Lecture Notes in Mathematics 730. (Springer, Berlin, 1979). p. 204–227

[53] G. L. Baker, J. P. Gollub, *Chaotic Dynamics: an Introduction*, 2nd. Ed. (Cambridge University Press, 1998)

[54] L.-S. Young, Ergodic Theory and Dynamical Systems **2**, 109 (1982)

[55] F. Ladrappier, Communications in Mathematical Physics **81**, 229 (1981).

[56] S. W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, Physica D **17**, 125 (1985).

[57] J. Aguirre, R. L. Viana, and M. A. F. Sanjuan, Reviews of Modern Physics **81**, 333-386 (2009).

[58] G. Julia, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **8**, 47–245 (1918)

[59] P. Fatou, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **164**, 806-808 (1917); **165**, 992–995 (1917).

[60] H.-O. Peitgen, P. Richter, *The Beauty of Fractals* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1986).

[61] E. J. Kostelich, D. Armbruster, *Introductory differential equations: from linearity to chaos* (Addison Wesley, Reading, 1997).

[62] L. H. A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos* (Livraria da Física, São Paulo, 2002)

[63] N. Fiedler-Ferrara, C. P. C. do Prado *Caos: uma Introdução*, (Edgard Blücher, Sâo Paulo, 1994)

[64] F. C. Moon, P. J. Holmes, J. Sound Vibrat. **65**, 275 (1979).

[65] Z. You, E. Kostelich, J. A. Yorke, International Journal of Bifurcation and Chaos **1**, 605 (1991)

[66] H. Kantz, P. Grassberger, Physica D **17**, 75 (1985)

[67] H. E. Nusse, J. A. Yorke, Physica D **36**, 137 (1989)

[68] Benettin, Galgani, Strelcyn (1976)

[69] Benettin, Galgani, Giorgilli, Strelcyn (1980)