

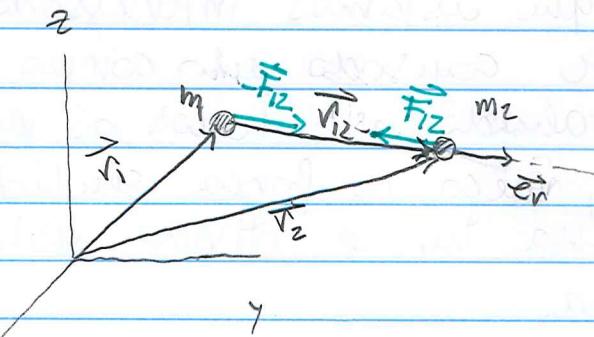
Capítulo 5 - Gravitação

Para a formulação da sua lei de Gravitação, publicada no Principia, Newton partiu dos argumentos que:

i) As leis de movimento seriam válidas não só para o movimento de corpos aqui na Terra, mas também para o movimento de planetas ao redor do Sol, ou da Lua ao redor da Terra, etc., e que;

ii) A origem da força que atrai objetos para o centro da Terra deveria ser a mesma que causa, por exemplo, a traição da Lua.

Então, comparando o movimento de queda livre (sob ação apenas desta força exercida pela Terra) e o movimento da Lua chega-se à forma que esta força gravitacional assume, para dois corpos pontuais de massa m_1 e m_2 :



$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}$$

Obs. 1: A forma da equação anterior se aplica apenas a partículas pontuais.

Obs. 2: A constante G é determinada experimentalmente, e foi medida com boa precisão inicialmente por Cavendish (1798).

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

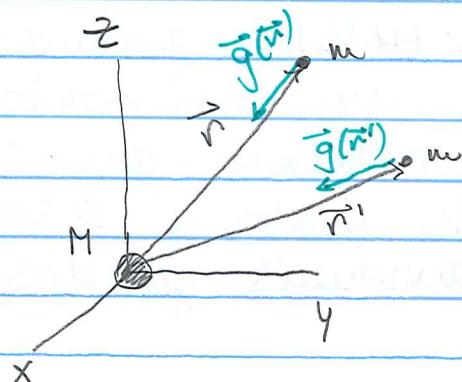
● CAMPO GRAVITACIONAL

A interação gravitacional entre corpos com massa pode ser interpretada utilizando o conceito de CAMPO:

Um corpo de massa M (ainda puntual) faz com que o espaço ao seu redor tenha uma propriedade tal que, quando um outro corpo de massa m é posto em algum lugar do espaço, este sente uma força.

No caso específico que estamos interessados, o CAMPO GRAVITACIONAL causado pelo corpo de massa M pode ser avaliado em todos os pontos do espaço. Para tal, mega a força sentida por um corpo de massa m e divide esta força por sua massa.

$\vec{g}(\vec{r})$, gerado pelo corpo de massa M , como:



$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m}$$

$$\boxed{\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{G M}{r^2} \hat{e}_r}$$

Obs. 1: O campo gravitacional é um campo VETORIAL, i.e., a cada ponto do espaço você define um VETOR.

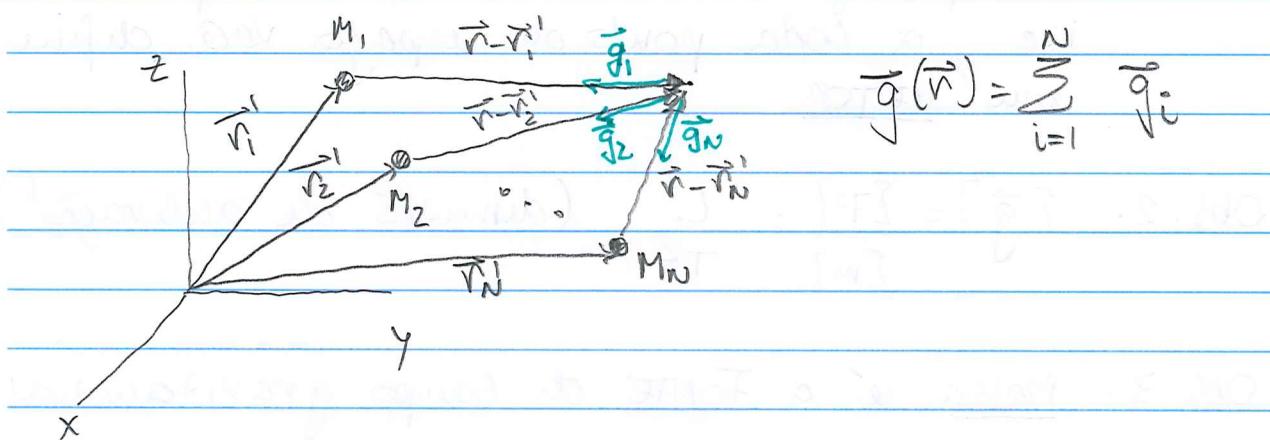
Obs. 2: $[\vec{g}] = [\vec{F}] = \frac{L}{T^2}$ (dimensões da aceleração!)

Obs. 3: Massa é a FONTE do campo gravitacional

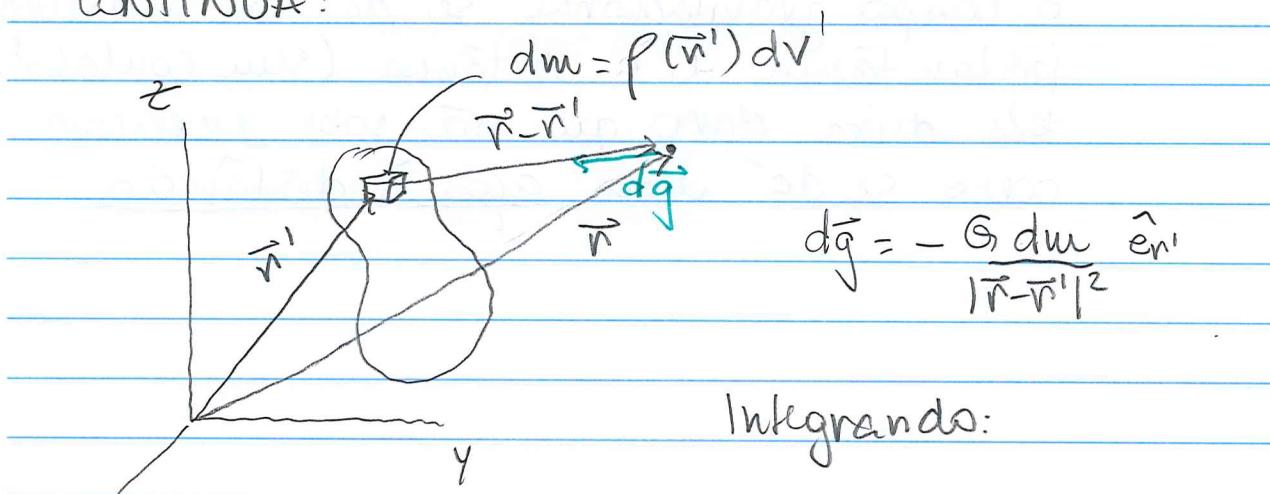
Obs. 4: Na descrição de Newton, a interação com o campo gravitacional se dá de maneira instantânea e à distância (sem contatos!) Ele deixa claro que não sabe explicar como se dá esta ação à distância.

Você pode assumir que este campo vetorial é um campo linear. De outra maneira, se há uma DISTRIBUIÇÃO DE MASSAS gerando um campo gravitacional em um ponto do espaço, então é correto assumir que o campo gravitacional neste ponto é a soma vetorial dos campos individuais gerados por cada contribuição.

Se a sua distribuição de massas é DISCRETA:



Se a sua distribuição de massas é CONTÍNUA:



$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') \hat{e}_n dv}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

Integral sobre
todo o volume
do corpo!

POTENCIAL GRAVITACIONAL

O campo gravitacional gerado por um partícula puntual de massa M varia com $1/r^2$, o que garante que \vec{g} (campo vetorial) possa ser escrito como \vec{g} gradiente de uma função escalar ϕ :

$$\boxed{\vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})}$$

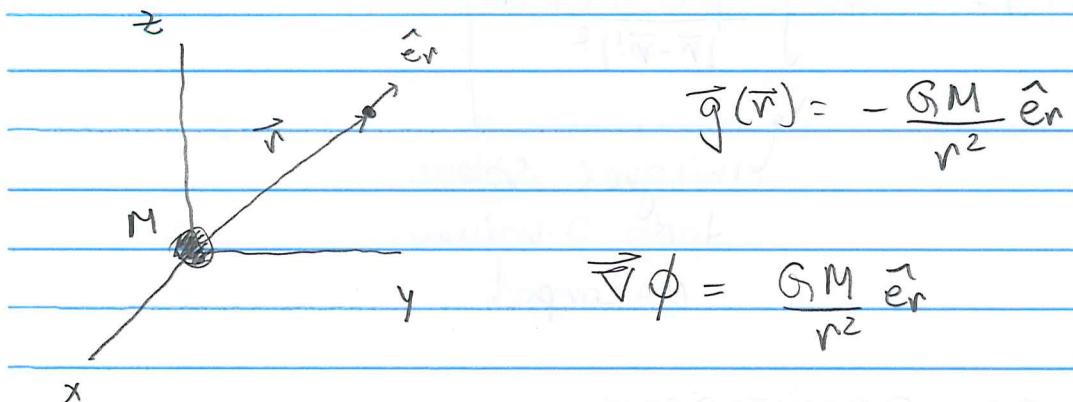
onde $\phi(\vec{r})$ fica definido como o potencial gravitacional

esta definição vem do fato de que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0 \quad e \quad \text{sempre temos que}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0}$$

Então, para massa M na origem:



Como só há dependência radial (r):

$$\nabla \phi = \frac{d\phi}{dr} \hat{e}_r = \frac{GM}{r^2} \hat{e}_r$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{GM}{r^2}$$

Integrando em limites correspondentes:

$$\int_0^{\phi} d\phi' = GM \int_{\infty}^r \frac{dr'}{r'^2}$$

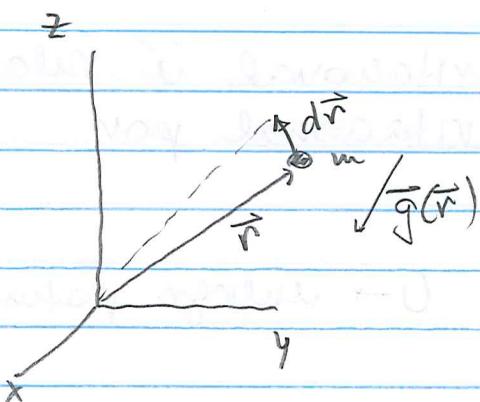
* Aqui, escolhi a condição de contorno

$$\phi(r \rightarrow \infty) = 0$$

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = -\frac{GM}{r}}$$

Obs.: Se o campo gravitacional é gerado por uma distribuição de massas, então o potencial gravitacional total no ponto \vec{r} pode ser obtido de uma soma escalar/integral!

O significado físico do potencial gravitacional fica evidente quando se calcula o trabalho por unidade de massa realizado por um agente externo para mover um corpo de massa m , na presença de campo gravitacional, de um deslocamento $d\vec{r}$:



$$\frac{dW}{m} = \vec{F}_g \cdot d\vec{r} \quad (\text{menos o trabalho da força gravitacional})$$

$$\frac{dW}{m} = -\vec{g} \cdot d\vec{r}$$

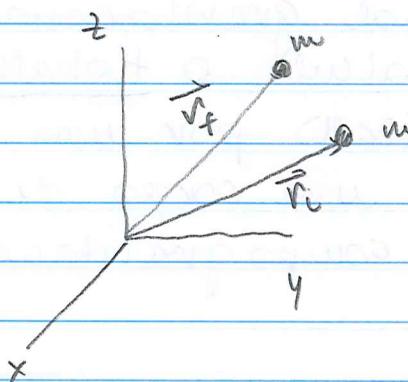
Inroduzindo o potencial gravitacional $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$:

$$\frac{dW}{m} = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r}$$

Mas: $\vec{\nabla} = \frac{\partial \vec{i}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{j}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{k}}{\partial z}$, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$$\frac{dW}{m} = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i = d\phi$$

Então, o trabalho por unidade de massa que precisa ser feito para mover um corpo na presença de um campo gravitacional é igual à diferença do potencial gravitacional nos pontos final e inicial:



$$\frac{W}{m} = \phi(\vec{r}_f) - \phi(\vec{r}_i)$$

Assim, o potencial gravitacional é relacionado à energia potencial gravitacional por:

$$U(\vec{r}) = m \phi(\vec{r})$$

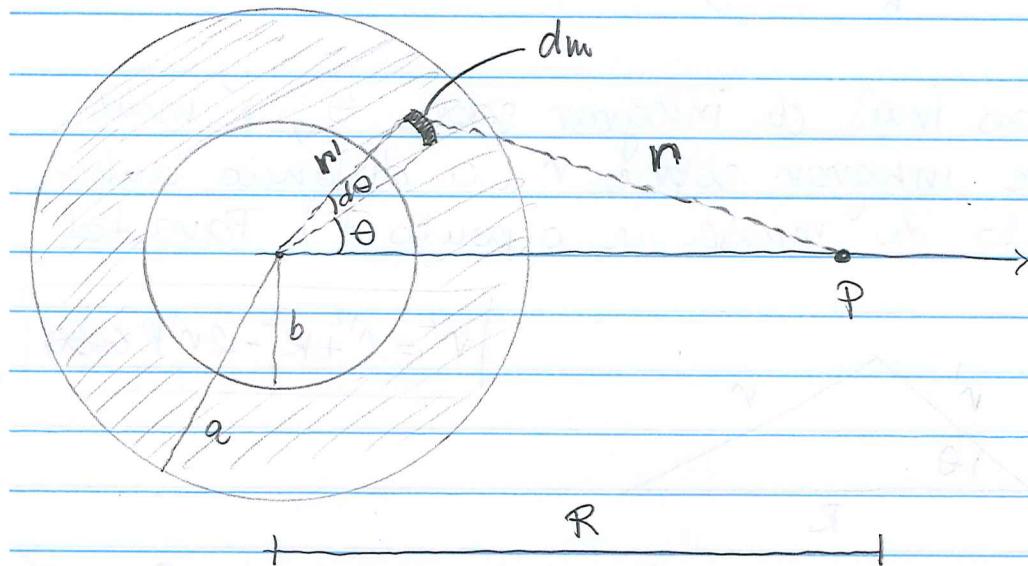
$U \rightarrow$ energia potencial

tal que:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \Rightarrow$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$$

Exemplo J.1) potencial em casca esférica uniforme de raio b e a ($b < a$)



O potencial dividido aos elementos de massa dm é:

$$d\phi = -G \frac{dm}{r}$$

Se a casca é uniforme: $dm = \rho dV'$, $\rho = \text{constante}$.

$$\phi = \int d\phi = -G\rho \int_{V'} \frac{dV'}{r} \quad \text{integral sobre todo o corpo!}$$

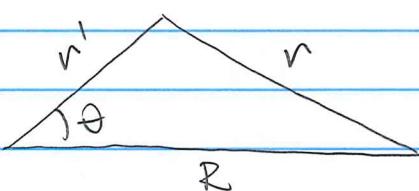
Aqui, o problema tem simetria esférica, então,

$$dV' = dx' dy' dz' = r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\psi$$

$$\phi = -G\rho \int_b^a r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{r} d\theta \int_0^{2\pi} d\psi$$

$$\phi = -2\pi \rho G \int_b^a r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r} d\theta$$

Aqui, ao invés de integrar sobre θ , é mais conveniente integrar sobre r (a distância entre o elemento de massa e o ponto P). Para tal, utilize:



$$r^2 = r'^2 + R^2 - 2r'R \cos \theta$$

Enquanto você varre θ , os tamanhos r' e R são constantes! Então, diferenciando:

$$2r dr = 2r'R \sin \theta d\theta \Rightarrow \left[\frac{\sin \theta d\theta}{r} = \frac{1}{R} \frac{dr}{r'} \right]$$

Substituindo:

$$\phi = -\frac{2\pi \rho G}{R} \int_b^a r'^2 dr' \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r}$$

Os limites de integração irão depender da onde está o ponto P!

o Para $R > a$ (fora da casca):

$$\begin{cases} r_{\min} = R - r' \\ r_{\max} = R + r' \end{cases}$$

$$\phi(R > a) = -\frac{2\pi G\rho}{R} \int_b^a r' dr' \int_{R-r'}^{R+r'} \frac{dr}{2r'}$$

$$\phi(R > a) = -\frac{4\pi G\rho}{R} \int_b^a r'^2 dr' \underbrace{\frac{a^3 - b^3}{3}}$$

$$\boxed{\phi(R > a) = -\frac{4\pi \rho G}{3} \frac{(a^3 - b^3)}{R}}$$

Mas: $M = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} (a^3 - b^3)$ (massa da casca)

Então:

$$\boxed{\phi(R > a) = -\frac{G M}{R}}$$

Para $R < b$ (druhs da casca)

$$\begin{cases} r_{\min} = r' - R \\ r_{\max} = r' + R \end{cases}$$

$$\phi(R < b) = -2\pi \rho G \int_R^a r' dr' \int_{r'-R}^{r'+R} \frac{dr}{2R}$$

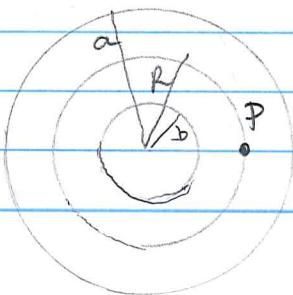
$$\phi(R < b) = -4\pi \rho G \int_b^a r' dr' \underbrace{\frac{a^2 - b^2}{2}}_{a^2 - b^2} = -2\pi \rho G (a^2 - b^2)$$

Ou, se $M = \rho \frac{4}{3}\pi (a^3 - b^3)$

$$\boxed{\phi(R < b) = -\frac{3}{2} GM \frac{(a^2 - b^2)}{(a^3 - b^3)}} \quad \text{constante!}$$

Para $b < R < a$ (na casca)

Agora você pode utilizar a soma de 2 contribuições:



Potencial = potencial fona
de casca com
raio b, R + potencial dentro
de casca com
raio a, R

$$\phi(b < R < a) = -\frac{4\pi\rho G}{3} \left(\frac{(R^3 - b^3)}{R} \right) - 2\pi\rho G \left(a^2 - R^2 \right)$$

$$= -\frac{4\pi\rho G}{3} \left[R^2 - \frac{b^3}{R} + \frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{2}R^2 \right]$$

Substituindo: $\frac{4\pi\rho}{3} = \frac{M}{(a^3 - b^3)}$

$$\boxed{\phi(b < R < a) = -\frac{GM}{(a^3 - b^3)} \left[\frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}R^2 - \frac{b^3}{R} \right]}$$

Asum:

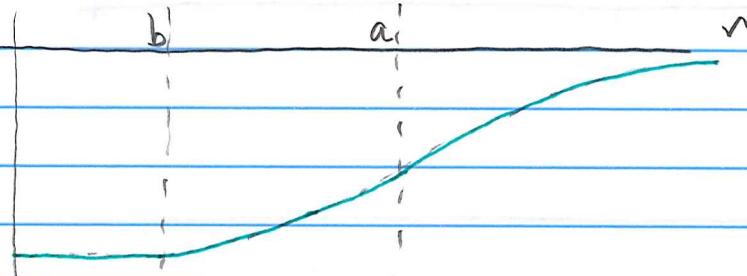
$$\phi(R) = \begin{cases} -\frac{GM}{R}, & R > a \\ -\frac{GM}{(a^3 - b^3)} \left[\frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}R^2 - \frac{b^3}{R} \right], & b < R < a \\ -\frac{3}{2} \frac{GM}{(a^3 - b^3)} \frac{(a^2 - b^2)}{R}, & R < b \end{cases}$$

Sabendo que $\phi = \phi(r)$, você obtém o campo gravitacional $\vec{g} = g \hat{r}$, tal que:

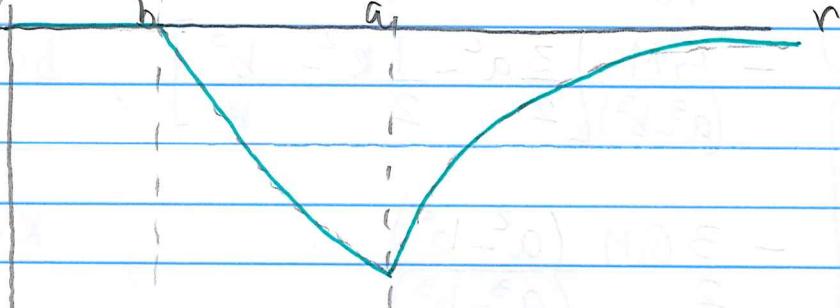
$$\boxed{g = -\frac{d\phi}{dr}}$$

$$g(r) = \begin{cases} -\frac{GM}{r^2}, & r > a \\ -\frac{GM}{(a^3-b^3)} \left[\frac{b^3}{r^2} - R \right], & b < r < a \\ 0, & r < b \end{cases}$$

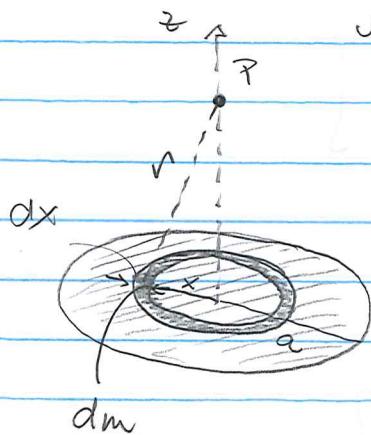
$\phi(r)$



$g(r)$



Exemplo 5.4) Disco fino e homogêneo de raio a .
Achar ϕ e \vec{r} em algum ponto no interior central.



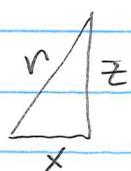
O potencial devido a pequenos anéis de raio x é:

$$d\phi = -\frac{\rho \, dm}{r}$$

Mas a massa pode ser escrita como:

$$dm = \rho \cdot (2\pi x \, dx)$$

E:



$$r = (x^2 + z^2)^{1/2}$$

então:

$$d\phi = -\frac{\rho \, 2\pi \rho \times dx}{(z^2 + x^2)^{1/2}}$$

Integrando sobre todo o corpo:

$$\phi(z) = -2\pi \rho G \int_0^a \frac{2x \, dx}{(x^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\phi(z) = -2\pi G \rho \left(\sqrt{x^2 + z^2} \right) \Big|_0^a$$

$$\phi(z) = -2\pi G \rho \left[(a^2 + z^2)^{1/2} - z \right]$$

Massa : $P = \frac{M}{\pi a^2}$

$$\phi(z) = -2\pi G \frac{M}{\pi a^2} \left[\sqrt{a^2 + z^2} - z \right]$$

$$\phi(z) = -\frac{2GM}{a^2} \left[\sqrt{a^2 + z^2} - z \right]$$

E o campo gravitacional:

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k}$$

$$\vec{g}(z) = -\frac{2GM}{a^2} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} - 1 \right] \hat{k}$$

Como ficam $\phi(z)$ e $\vec{g}(z)$ quando você está muito longe do disco? Utilize $z \gg a$ e

tilibra $(1+x)^n \approx 1+nx$ para x pequeno!

$$\textcircled{1} \quad \phi(z) = -\frac{2GM}{a^2} \left[z \sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}} - z \right]$$

↓ $(1+x)^{1/2}$

$$\phi(z) \approx -\frac{2GM}{a^2} \left[z \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2} \right) - z \right]$$

$$\approx -\frac{2GM}{a^2} \left[z + \frac{1}{2} \frac{a^2}{z} - z \right]$$

$\phi(z) \approx -\frac{GM}{z}$

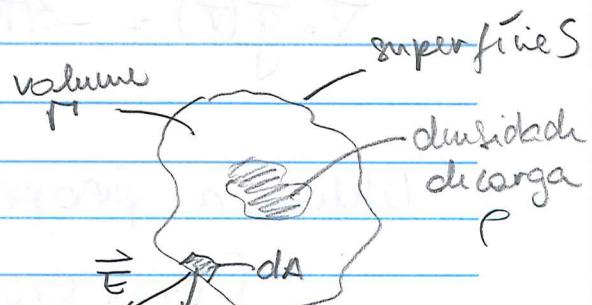
 $z \gg a$ (faz sentido?)

$\text{e } \vec{g}(z) \approx -\frac{GM}{z^2} \hat{k}$

• ALGO SIMILAR À LEI DE GAUSS (EXTRA)

No electromagnetismo, a lei de Gauss relaciona o fluxo do campo elétrico em uma superfície fechada à carga no volume interior à superfície. Isto pode ser escrito de duas maneiras:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V p(\vec{r}) dV$$



$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$d\vec{s} = \hat{n} dA$$

Você pode fazer o mesmo para o fluxo de campo gravitacional: suponha que seja uma densidade de massa $\rho(\vec{r}')$ dentro de uma superfície qualquer S que delimita um volume Γ . O campo gravitacional pode ser escrito como:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \int_{\Gamma} \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d\vec{r}'$$

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^3} = \frac{\hat{\vec{a}}}{|\vec{a}|^2} !$$

Tomando a divergência em ambos os lados:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{r}) = -G \int_{\Gamma} \rho(\vec{r}') \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) d\vec{r}'$$

$$\text{Mas } \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^3} \right) = 4\pi \delta(\vec{a}) \rightarrow \text{delta de Dirac}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{r}) = -4\pi G \int_{\Gamma} \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}'$$

Utiliza a propriedade da função delta:

$$\int f(x) \delta(x-x') dx = f(x')$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{g}(\vec{r}) = -4\pi G \rho(\vec{r})}$$

densidade
de massa!

Compare com

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{f}{\epsilon_0}$$

densidade
de carga!

Introduzindo o potencial gravitacional:

$$\vec{g} = -\nabla \phi$$

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = -4\pi G \rho(\vec{r})$$

$$\boxed{\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -4\pi G \rho(\vec{r})}$$

equação de Poisson

MAPES

A interação Terra-Lua sobre o grande corpo de água presente em nosso planeta leva os efeitos das marés.

O cálculo deve ser feito com cuidado, pois se queremos estimar este efeito, precisamos fazê-lo em um sistema de referência inercial (Terra, nem Lua, são referências inerciais)

Além disso, para obter um resultado mais simples, ponemos más informações, fomos uso de algumas aproximações.

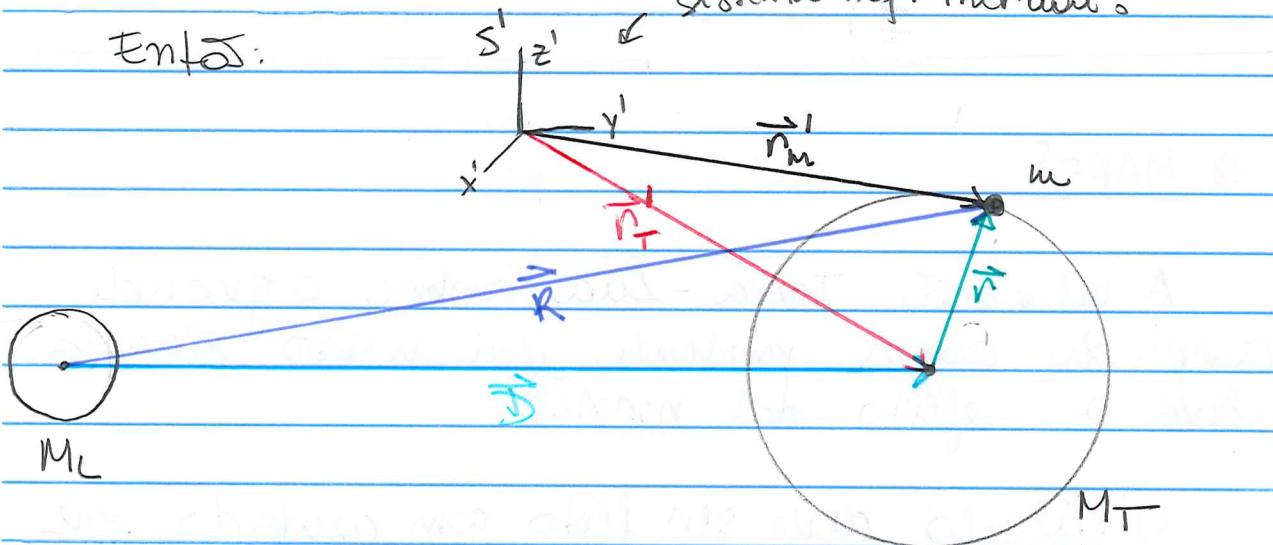
11

Suponha então que Terra e Lua são esferas homogêneas de massas M_T e M_L . A distância entre os centros destes corpos será definida D , e o raio da Terra será r , sabendo que

$$D \approx 60r$$

O que eu quero responder é o seguinte: qual o efeito da interação Terra + Lua em uma pequena partícula de massa m colocada na superfície da Terra? (essa partícula pode representar cada constituinte dos oceanos, por exemplo)

Então:



* aqui, vou ignorar a rotação da Terra
(comentos sobre esse efeito depois!)

O referencial S' pode utilizar $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ para a partícula de massa m e para a Terra.

$$m: \boxed{m \ddot{\vec{r}}_m^1 = -\frac{GM_T}{r^2} \hat{e}_r - \frac{GM_L}{R^2} \hat{e}_R}$$

Terra: $M_T \ddot{\vec{r}}_T^1 = -\frac{GM_L}{D^2} \hat{e}_D + \cancel{\frac{GM_T}{r^2} \hat{e}_r}$ muito pequeno! (força que m faz na Terra)

$$Mai: \vec{r}_m^1 = \vec{r}_T^1 + \vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{r} = \vec{r}_m^1 - \vec{r}_T^1}$$

Diferenciando 2x:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_m^1 - \ddot{\vec{r}}_T^1 \Rightarrow \boxed{m \ddot{\vec{r}} = m \ddot{\vec{r}}_m^1 - m \ddot{\vec{r}}_T^1}$$

Substituindo:

$$m \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_T}{r^2} \hat{e}_r - \frac{GM_L}{R^2} \hat{e}_R + \frac{GM_L}{D^2} \hat{e}_D$$

$$\boxed{m \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_T}{r^2} \hat{e}_r - GM_L \left(\frac{\hat{e}_R}{R^2} - \frac{\hat{e}_D}{D^2} \right)}$$

força no
corpo m

do ponto de
vista da
Terra

força devido
à Terra

(igual em
qualquer
ponto da
Terra)

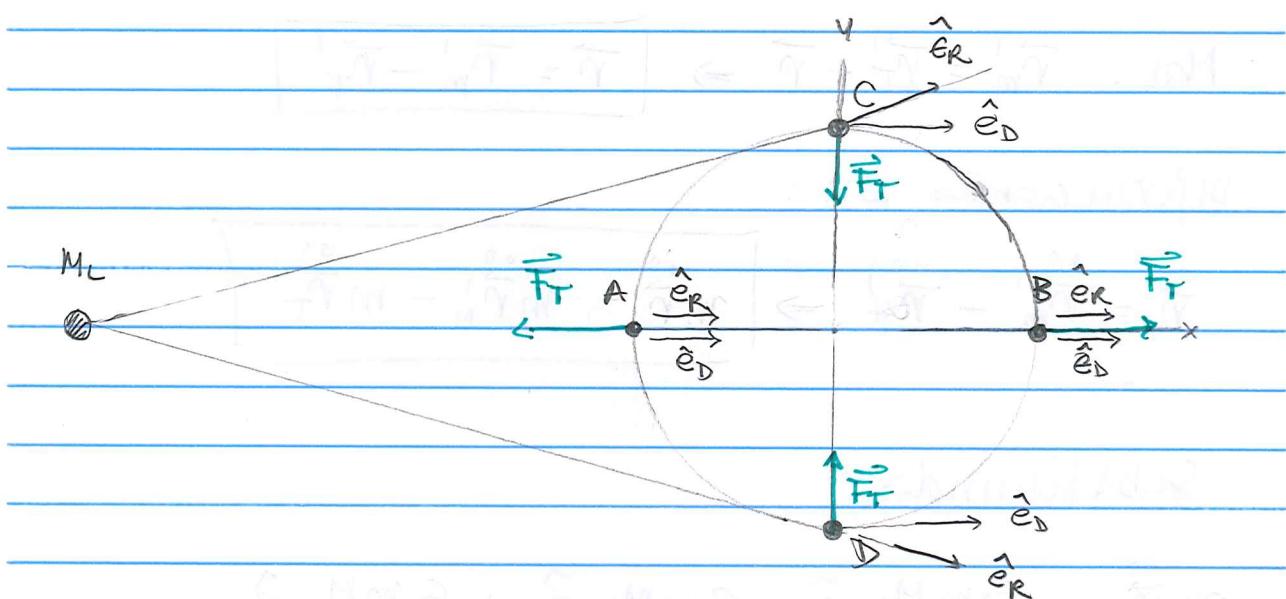
força da maré

Então, a força da maré \vec{F}_T :

$$\boxed{\vec{F}_T = -GmM_L \left(\frac{\hat{e}_R}{R^2} - \frac{\hat{e}_D}{D^2} \right)}$$

FORCA
DE MARÉ

Vamos analisar 4 pontos especiais sobre a Terra:



- Nos pontos A e B (mais próximos e mais afastados da Lua) \hat{e}_D e \hat{e}_R são colineares e a força da maré só tem componente horizontal:

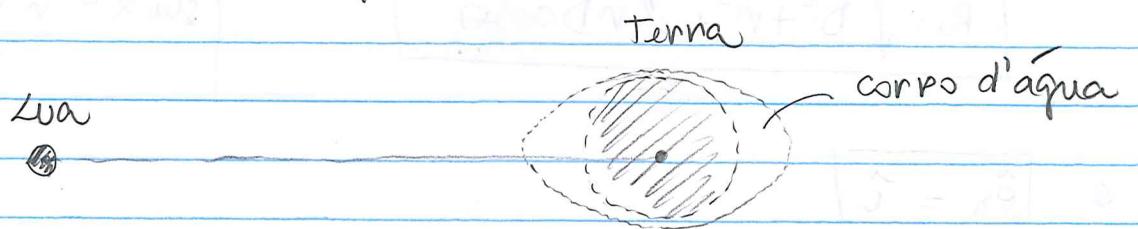
$$\boxed{F_{Tx} = -GmM_L \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{D^2} \right)}$$

- Como em A, $R < D$, então a força aponta para a Lua.

2) Como em B, RSD, a força aponta no sentido oposto à Lua.

• Nos pontos C e D, como $\frac{r}{R} \approx 0,02$, as componentes horizontais das forças se anulam (só quase idênticas!), restando apenas a componente vertical, que aponta para o centro da Terra!

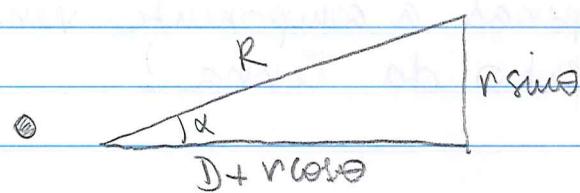
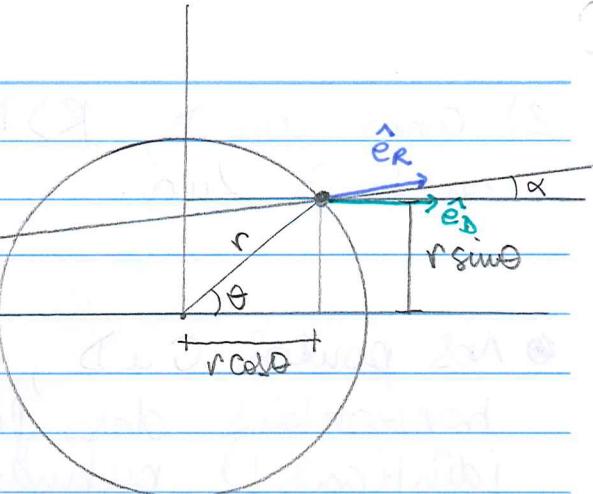
Desta discussão qualitativa, você já espera um "achatamento" de um grande corpo de água na superfície da Terra:



O que explica as duas marés altas/baixas diárias.

Mas você pode calcular a força em qualquer ponto da superfície da Terra, com o auxílio das coordenadas polares. Veja o que segue, para um ponto qualquer na superfície da Terra:

1 / 1



$$R = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta + (D + r \cos \theta)^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{D + r \cos \theta}{R}$$

$$R = \sqrt{D^2 + r^2 + 2rD \cos \theta}$$

$$\sin \alpha = \frac{r \sin \theta}{R}$$

$$\hat{e}_\theta = \hat{j}$$

$$\hat{e}_R = \cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j}$$

$$\hat{e}_R = \frac{D + r \cos \theta}{R} \hat{i} + \frac{r \sin \theta}{R} \hat{j}$$

Substituindo \hat{e}_θ e \hat{e}_R em \vec{F}_T :

$$\vec{F}_T = -G m M_L \left(\frac{\hat{e}_R}{R^2} - \frac{\hat{e}_\theta}{D^2} \right)$$

$$\vec{F}_T = -GmM_E \left[\frac{D + r\cos\theta}{R^3} \hat{i} + \frac{r\sin\theta}{R^3} \hat{j} - \frac{1}{D^2} \hat{i} \right]$$

Finalmente:

$$\boxed{\vec{F}_T = -GmM_E \left[\left(\frac{D + r\cos\theta - 1}{R^3} \right) \hat{i} + \frac{r\sin\theta}{R^3} \hat{j} \right]}$$

onde $R = \sqrt{D^2 + r^2 + 2rD\cos\theta}$

Obs.: veja sick do curso p/ saber como esta força atua em diferentes pontos da terra.

Obs. 2: aqui, ignorei o efeito da rotação da terra, que modifica levemente o eixo no qual este efeito é visto (veja Fig 5-13), e também outras interações, como a do sol, por exemplo.

Obs. 3: as equações 5.54 a-b do livro são formas aproximadas para as componentes x e y de \vec{F}_T . Você pode obtê-las da seguinte ali acima supondo $\frac{r}{D} \approx 0,02$ pequenos.

111

1. $\frac{1}{2} \times 200 + 2 \times 50 = 150$

2. $\frac{1}{2} \times 200 + 2 \times 50 = 150$

3. $\frac{1}{2} \times 200 + 2 \times 50 = 150$

4. $\frac{1}{2} \times 200 + 2 \times 50 = 150$

5. $\frac{1}{2} \times 200 + 2 \times 50 = 150$

6. $\frac{1}{2} \times 200 + 2 \times 50 = 150$

7. $\frac{1}{2} \times 200 + 2 \times 50 = 150$

8. $\frac{1}{2} \times 200 + 2 \times 50 = 150$

9. $\frac{1}{2} \times 200 + 2 \times 50 = 150$

10. $\frac{1}{2} \times 200 + 2 \times 50 = 150$

11. $\frac{1}{2} \times 200 + 2 \times 50 = 150$

12. $\frac{1}{2} \times 200 + 2 \times 50 = 150$

13. $\frac{1}{2} \times 200 + 2 \times 50 = 150$

14. $\frac{1}{2} \times 200 + 2 \times 50 = 150$

15. $\frac{1}{2} \times 200 + 2 \times 50 = 150$