LISTA DE EXERCÍCIOS #2 - ELETROMAGNETISMO II

1. Mostre que funções do tipo $f(x,t) = f(x \pm vt)$, onde v é o módulo da velocidade, são soluções da equação de onda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

2. Mostre que, para ondas eletromagnéticas propagando-se em vácuo, sem fontes, tem-se

$$\vec{\mathscr{B}} \perp \vec{k}$$

onde $\vec{k}$ é o vetor de propagação da onda.

3. Mostre que a lei de Ampère-Maxwell no vácuo, sem fontes,

$$\nabla \times \vec{\mathscr{B}} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathscr{E}}}{\partial t} = 0$$

fornece a mesma relação entre $\vec{\mathscr{E}}$ e $\vec{\mathscr{B}}$ que a lei de Faraday.

4. Obtenha todos os elementos do tensor de Maxwell das tensões $\overleftrightarrow{T}$ para uma onda plana monocromática propagando-se na direção $+z$ e vibrando em x.

5. Considerando a propagação de ondas em meios condutores, temos que

$$k = k_R + ik_I$$

onde k_R e k_I são as partes real e imaginária de k, dadas por

$$k_R = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{s}{\omega\epsilon}\right)^2}+1\right]^{\frac{1}{2}} \qquad k_I = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{s}{\omega\epsilon}\right)^2}-1\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

mostre que

(a) Se o meio é mau condutor, onde $s \ll \omega\epsilon$, temos, a partir de (1) (pode ser útil utilizar uma expansão em série de Taylor),

$$k_R = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \qquad k_I = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

de modo que a profundidade de penetração $\zeta = \frac{1}{k_I}$ independe da frequência ω, a menos que a condutividade s dependa. Em seguida, ache a profundidade de penetração em água pura.

(b) Mostre que a defasagem entre os campos elétrico e magnético, dada por

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{k_I}{k_R}$$

pode ser escrita como

$$\operatorname{tg}(2\phi) = \frac{s}{\omega\epsilon}$$

Pode ser útil a relação

$$\operatorname{tg}(2\gamma) = \frac{2\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}^2\gamma}$$

(c) Se o meio é bom condutor, onde $s \gg \omega\epsilon$, então, de (1),

$$k_R = k_I = \sqrt{\frac{\omega\mu s}{2}}$$

sendo que, agora, ζ depende da frequência. Mostre que $\zeta = \frac{\lambda}{2\pi}$, onde λ é o comprimento de onda dentro do condutor. Mostre também que a defasagem ϕ entre os campos elétrico e magnético tende a $\phi = \frac{\pi}{4}$ rad. Ache a razão entre suas amplitudes. Ache a profundidade de penetração para um metal com $s = 10^7$ S/m, $\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ sujeito a radiação na faixa visível ($\omega \simeq 10^{15}$ rad/s).

6. Considere uma onda plana propagando-se num condutor na direção z, estando o campo elétrico na direção x e o magnético na y.

   (a) Escreva as expressões para $\vec{\mathscr{E}}(z,t)$ e $\vec{\mathscr{B}}(z,t)$.

   (b) Calcule a densidade de energia u_{el} e o valor médio $\langle u_{el} \rangle$ para esta onda plana.

   (c) Obtenha a intensidade $I = \langle S \rangle$ da onda.

7. Se a frequência ω da onda incidente num meio está longe das frequências de ressonância ω_{0_j} deste meio, que ocorrem na região do UV ou acima, o índice de refração pode ser escrito como

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0_j}^2} + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0_j}^4} \tag{2}$$

que dá origem à fórmula de Cauchy

$$n = 1 + A\Big(1 + \frac{B}{\lambda^2}\Big) \tag{3}$$

Considere que a frequência de ressonância ω_{0_i} seja muito mais provável que qualquer uma das outras frequências, ou seja, $f_i \gg f_j$, $\forall j \neq i$. Nesse caso, mostre que, a partir da eq. (2), tem-se

$$A = \frac{Ne^2 \lambda_{0_i}^2 f_i}{8\pi^2 m\epsilon_0 c^2} \qquad B = \lambda_{0_i}^2 \qquad \lambda_{0_i} = \frac{2\pi c}{\omega_{0_i}}$$

8. O índice de refração para o gás hidrogênio, em 273 K e 1 atm, pode ser escrito de acordo com a fórmula de Cauchy

$$n = 1 + 1{,}360 \times 10^{-4} + \frac{1{,}05 \times 10^{-18}}{\lambda^2}$$

onde λ está medido em metros. Determine A, B, λ_{0_i} e ν_{0_i} associados com a ressonância. Em qual faixa de frequência está a frequência de ressonância do hidrogênio? Cai na região do UV ou acima desta? A partir do problema anterior, ache de forma literal a razão $\frac{A}{B}$. Em seguida, use essa razão, a equação de Clapeyron, a constante de Faraday F (produto do número de Avogadro N_A pela carga e do elétron, em módulo) e a massa do hidrogênio para determinar numericamente a razão $\frac{e}{m}$ para o elétron.

9. Um cristal de quartzo tem índices de refração $n_1 = 1{,}557$ e $n_2 = 1{,}547$ para $\lambda_1 = 410$ nm e $\lambda_2 = 550$ nm, respectivamente. Obtenha A e B da fórmula de Cauchy (3) e o índice de refração do quartzo em $\lambda_3 = 610$ nm.

10. Em 1871 Sellmeier obteve a expressão

$$n^2 = 1 + \sum_j \frac{A_j \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{0_j}^2} \tag{4}$$

onde os A_j são constantes e $\lambda_{0_j}\nu_{0_j} = c$, onde ν_{0_j} são as frequências naturais do meio. Esta equação é mais geral que a equação de Cauchy (3). Mostre que, nas regiões onde $\lambda \gg \lambda_{0_j}$, a equação (4) recai na equação de Cauchy (3). Sugere-se considerar apenas o primeiro termo na soma na eq. (4), expandir, tirar a raiz e expandir novamente.

11. Considerando que a velocidade de fase é dada, por exemplo, por

$$v = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu = \frac{\nu}{\kappa} \tag{5}$$

e de grupo por

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\nu}{d\kappa} \tag{6}$$

onde $k = 2\pi\kappa$ ($\kappa = \frac{1}{\lambda}$ é chamado de número de onda ou frequência espacial) e $\omega = 2\pi\nu$,

(a) Obtenha v e v_g para a relação de dispersão $\omega = ak^2$.

(b) Num plasma, há a relação de dispersão

$$\omega^2 = c^2k^2 + \omega_p^2$$

onde ω_p é a frequência de plasma. Mostre que $vv_g = c^2$.

(c) Usando $\frac{1}{v_g} = \frac{d\kappa}{d\nu}$, mostre que

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{v} - \frac{\nu}{v^2}\frac{dv}{d\nu}$$

e, no caso específico de ondas de ondas eletromagnéticas ($n = \frac{c}{v}$),

$$\frac{1}{v_g} = \frac{n}{c} + \frac{\nu}{c}\frac{dn}{d\nu}$$

(d) Mostre que

$$v_g = v\Big(1 + \frac{\lambda}{v}\frac{dv}{d\lambda}\Big)$$

Sabendo que ondas na superfície de um líquido se propagam com uma velocidade

$$v = \sqrt{\frac{g}{\lambda} + \frac{2\pi\Upsilon}{\varrho\lambda}}$$

desde que a profundidade seja muito maior que λ, e sendo Υ a tensão superficial, ϱ a densidade volumétrica e g o módulo da aceleração gravitacional, obtenha a velocidade de grupo de um pulso dessas ondas, ditas ondas de gravidade, no limite em que λ é grande.

(e) Dada a relação de dispersão

$$\omega(k) = 2\omega_0 \operatorname{sen}\Big(\frac{kl}{2}\Big)$$

obtenha v e v_g.