MECÂNICA CLÁSSICA II

KLEBER DAUM MACHADO

13 de setembro de 2021

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

2

Princípio de Hamilton

Neste capítulo introduzimos o princípio de Hamilton, que nos permitirá obter as equações de Lagrange por uma rota independente da formulação newtoniana, ao contrário do que ocorreu no capítulo **??**. quando obtivemos as equações a partir do princípio de d'Alembert. Com isso, tornamos a formulação lagrangeana independente da formulação newtoniana, sendo obtida agora a partir de um princípio bastante geral em Física. É interessante notar que, em ambos os casos, são feitas premissas que, sendo válidas, conduzem aos mesmos resultados. Estamos bem mais acostumados com a formulação newtoniana, e, por isso, possivelmente o desenvolvimento feito no capítulo **??** será, de início, mais intuitivo do que o que faremos a partir do princípio de Hamilton. No entanto, o princípio de Hamilton, que se baseia num princípio variacional, sendo chamado também de princípio variacional de Hamilton, é bastante geral e, por isso, uma vez entendido passa a ser mais relevante, pois pode ser aplicado em outras áreas de Física, não só em Mecânica Clássica.

Antes de apresentar o princípio de Hamilton, é interessante fazer uma introdução de ideias ligadas ao cálculo variacional, pois faremos uma transposição bastante direta dessas ideias para a formulação baseada no princípio de Hamilton.

2.1 Introdução ao Cálculo Variacional

Para desenvolver ideias, vamos começar introduzindo a ideia de funcional. Um funcional associa um número a uma função de um certo conjunto de funções. Como exemplo, suponha que temos uma curva $y = f(x)$ no plano xy. O comprimento de arco dessa curva é obtido a partir do elemento de arco em coordenadas retangulares, dado por

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{2.1}$$

que pode ser escrito como

$$d\ell = \sqrt{dx^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx \tag{2.2}$$

onde

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

A partir de (2.2), temos o comprimento da curva entre os pontos $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ (inicial) e $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ (final) mediante

$$L[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx \tag{2.3}$$

Assim, o funcional (2.3) associa um número, o comprimento da curva, a uma função, $y(x)$, que descreve a curva. Mudando-se a curva, seu comprimento pode vir a se alterar, de acordo com (2.3), mas o modo de calculá-lo continua o mesmo.

Um funcional importante é

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F[y(x), y'(x); x]\, dx \tag{2.4}$$

onde $y(x)$ é uma função diferenciável, e $F = F(y, y'; x)$ é uma função conhecida, que depende explicitamente de y, de sua derivada y' e, eventualmente, do parâmetro x. O foco do cálculo variacional está em determinar extremos de funcionais como os dados em (2.3) ou (2.4), ou seja, em determinar a função $y(x)$ que, dentre todas as possíveis funções que passem pelos pontos $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ e $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, ao ser colocada no funcional, faz com que ele adquira um valor extremo, que pode ser máximo ou mínimo. Nesse caso, a integral em (2.4) tem um valor estacionário, de modo que, se for feita uma variação infinitesimal em $y(x)$, ainda assim o valor da integral não se altera. Por hipótese, a função "correta" $y(x)$ que extremiza J e as outras funções y que diferem de y por valores infinitesimais devem ser tais que todas as curvas descritas por elas passem nos pontos extremos $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ e $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, de modo que nos extremos a variação de $y(x)$ é nula. A figura 2.1 ilustra a situação.

Podemos representar as curvas que se diferenciam da curva "correta" introduzindo um parâmetro α e uma função arbitrária $\beta(x)$ tal que podemos escrever

$$y(x; \alpha) = y(x; 0) + \alpha\beta(x) \tag{2.5}$$

Assim, quando $\alpha = 0$, temos a curva correta $y(x; 0) = y(x)$. A função $\beta(x)$ deve ser diferenciável, e deve ocorrer

$$\beta(x_1) = 0 \qquad\qquad \beta(x_2) = 0 \tag{2.6}$$

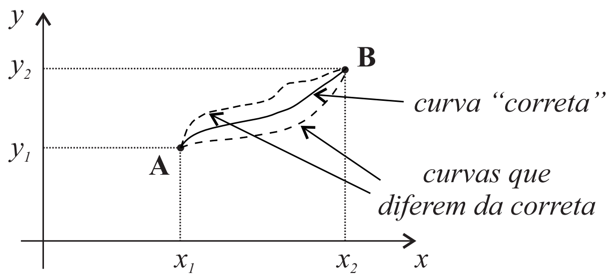

Figura 2.1: Gráfico apresentando a curva $y(x)$ "correta"(linha cheia), que extremiza o funcional, e as curvas que diferem dela mas que passam pelos extremos em A e B (linhas tracejadas).

pois as curvas $y(x;\alpha)$ devem todas ter variação nula nos pontos extremos. Assim, considerando especificamente o funcional (2.4), temos, substituindo (2.5),

$$J(\alpha) = J[y(x;\alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} F[y(x;\alpha), y'(x;\alpha); x]\, dx \tag{2.7}$$

Na forma (2.7), temos que J é entendido como função do parâmetro α, e o valor estacionário é obtido quando temos um extremo, ou seja, quando ocorre

$$\left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \tag{2.8}$$

Agora, de (2.7), temos

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\int_{x_1}^{x_2} F[y(x;\alpha), y'(x;\alpha); x]\, dx$$

ou

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{d\alpha}\right) dx \tag{2.9}$$

Considere o termo

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{d\alpha}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d^2 y}{d\alpha dx}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\alpha}\right) dx \tag{2.10}$$

Em seguida, fazemos uma integração por partes, definindo

$$u = \frac{\partial F}{\partial y'} \qquad\qquad du = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx \tag{2.11a}$$

$$dv = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\alpha}\right) dx \qquad\qquad v = \frac{dy}{d\alpha} \tag{2.11b}$$

Com isso, temos, usando (2.11) em (2.10),

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\alpha}\right) dx = \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy}{d\alpha}\right)_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \frac{dy}{d\alpha}\, dx \tag{2.12}$$

Considerando (2.5), temos que

$$\frac{dy}{d\alpha} = \beta(x) \tag{2.13}$$

Portanto, usando (2.13) em (2.12), achamos

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\alpha}\right) dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \beta(x)\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \frac{dy}{d\alpha}\, dx \tag{2.14}$$

Agora, usamos (2.6), de modo que obtemos

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\alpha}\right) dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \frac{dy}{d\alpha}\, dx \tag{2.15}$$

Voltando em (2.10) usando (2.15), ficamos com

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{d\alpha}\, dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \frac{dy}{d\alpha}\, dx \tag{2.16}$$

e, usando (2.16) em (2.9), temos

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \frac{dy}{d\alpha}\, dx \tag{2.17}$$

Continuando, substituindo (2.17) em (2.8), ficamos com

$$\left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \left.\frac{dy}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} dx = 0 \tag{2.18}$$

Temos que, de (2.13), $\frac{dy}{d\alpha}|_{\alpha=0} = \beta(x)$, onde $\beta(x)$ é uma função arbitrária de x. Assim, usando o lema fundamental do cálculo de variações, que estabelece que, dada um função contínua $f(x)$, onde $x \in [x_1, x_2]$, e uma função arbitrária e diferenciável $g(x)$, onde $x \in [x_1, x_2]$ e $g(x_1) = g(x_2) = 0$, se

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) g(x)\, dx = 0 \tag{2.19}$$

então deve ocorrer

$$f(x) \equiv 0\,, \qquad x \in [x_1, x_2] \tag{2.20}$$

Com isso, temos que o termo entre colchetes em (2.18) deve se anular, e obtemos a condição

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \tag{2.21}$$

A função $F = F(y, y'; x)$ no funcional J em (2.4) é uma função conhecida, e a "incógnita" do problema é a função "correta" $y(x)$, que extremiza o funcional, e que deve satisfazer a equação diferencial dada em (2.21). Ou, de outro modo, a solução de (2.21) é a função $y(x)$ procurada pelo cálculo variacional. Note a semelhança de (2.21) com as equações de Lagrange dadas em (**??**), onde o parâmetro x em (2.21) deve ser entendido como sendo t em (**??**). Com isso, recordando a ideia de variação infinitesimal virtual, que é feita quando t é fixo, podemos definir no presente contexto a variação infinitesimal virtual quando o parâmetro x é fixo, de modo que

$$\delta y = \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha \tag{2.22}$$

e, da mesma forma,

$$\delta J = \left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha \tag{2.23}$$

Com isso, podemos reescrever (2.18) na forma

$$\left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \left.\frac{dy}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} d\alpha\, dx = 0 \tag{2.24}$$

ou, usando (2.22) e (2.23) em (2.24),

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \delta y\, dx = 0 \tag{2.25}$$

Portanto, J é estacionária quando $\delta J = 0$. Para fixar ideias, vejamos agora alguns exemplos envolvendo cálculo variacional.

2.2 Exemplos de Aplicação de Cálculo Variacional

Nosso objetivo agora é apresentar alguns exemplos relativamente simples ligados ao uso do cálculo variacional em problemas de extremização.

Exemplo 2.1. *Determine a curva $y(x)$ que tem o menor comprimento entre dois pontos no plano xy.*

Este é um dos primeiros problemas relacionados ao cálculo variacional, que consiste em determinar qual curva deve ser seguida para obter a menor distância entre dois pontos em alguma superfície. Tais curvas são chamadas *geodésicas*, e nosso objetivo agora é determinar a geodésica no plano xy. Queremos, então, minimizar o comprimento de arco de uma curva $y(x)$, e o funcional correspondente é o dado em (2.3),

$$L[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx$$

Portanto, a função $F(y, y'; x)$ em (2.4) é

$$F(y, y'; x) = \sqrt{1 + y'^2} \tag{2.26}$$

De (2.21), precisamos de

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{2.27a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \tag{2.27b}$$

Note que, por causa de (2.27a), ao usar (2.27) em (2.21) obtemos

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\Big) = 0$$

ou seja,

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \tag{2.28}$$

onde c é uma constante. Reescrevendo (2.28), temos, elevando ao quadrado,

$$y'^2 = c^2(1 + y'^2)$$

ou

$$(1 - c^2)y'^2 = c^2$$

de modo que

$$y'^2 = \frac{c^2}{1 - c^2} = a^2$$

onde a é outra constante. Temos, então,

$$y' = \frac{dy}{dx} = a \tag{2.29}$$

Integrando (2.29), chegamos a

$$y(x) = ax + b \tag{2.30}$$

Logo, a curva geodésica que minimiza a distância entre dois pontos num plano é uma reta entre esses dois pontos.

■

Exemplo 2.2. *Determine a curva geodésica na superfície de uma esfera de raio R.*

Para determinar a curva geodésica na superfície de uma esfera, vamos precisar do elemento de arco em coordenadas esféricas, dado por

$$d\ell = \sqrt{dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2} \tag{2.31}$$

No caso da geodésica na superfície da esfera de raio R, temos que $r = R$, e $dr = 0$, e, nesse caso, a equação (2.31) fica

$$d\ell = R\sqrt{d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2} \tag{2.32}$$

ou, reescrevendo, considerando que $\phi = \phi(\theta)$,

$$d\ell = R\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\theta \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = R\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\theta\, \phi'^2}\, d\theta \tag{2.33}$$

A curva geodésica é obtida extremizando o funcional

$$L[\phi] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} R\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\theta\, \phi'^2}\, d\theta = R\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\theta\, \phi'^2}\, d\theta \tag{2.34}$$

Nesse caso, a função f em (2.4) é

$$F(\phi, \phi'; \theta) = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\theta\, \phi'^2} \tag{2.35}$$

Vamos precisar de

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = 0 \tag{2.36a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi'} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta\, \phi'}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\theta\, \phi'^2}} \tag{2.36b}$$

Ao usar (2.36) em (2.21), achamos

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta\, \phi'}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\theta\, \phi'^2}}\right) = 0$$

Logo,

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta\, \phi'}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\theta\, \phi'^2}} = c \tag{2.37}$$

onde c é uma constante. Reescrevendo e elevando (2.37) ao quadrado, temos

$$\operatorname{sen}^4\theta\, \phi'^2 = c^2(1 + \operatorname{sen}^2\theta\, \phi'^2)$$

ou

$$\operatorname{sen}^2\theta(\operatorname{sen}^2\theta - c^2)\phi'^2 = c^2$$

ou, ainda,

$$\phi'^2 = \frac{c^2}{\operatorname{sen}^2\theta(\operatorname{sen}^2\theta - c^2)}$$

ou, extraindo a raiz quadrada,

$$\phi' = \frac{c}{\operatorname{sen}\theta\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta - c^2}}$$

que pode ser reescrita como

$$\phi' = \frac{c}{\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{1 - c^2\operatorname{cossec}^2\theta}}$$

ou

$$\phi' = \frac{c\operatorname{cossec}^2\theta}{\sqrt{1 - c^2(1 + \operatorname{cotg}^2\theta)}}$$

ou, ainda,

$$\phi' = \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{c\operatorname{cossec}^2\theta}{\sqrt{(1 - c^2) - c^2\operatorname{cotg}^2\theta}} \tag{2.38}$$

De (2.38), tiramos

$$d\phi = \frac{c\operatorname{cossec}^2\theta}{\sqrt{(1 - c^2) - c^2\operatorname{cotg}^2\theta}}\,d\theta \tag{2.39}$$

e, integrando (2.39), achamos

$$\int d\phi = \int \frac{c\operatorname{cossec}^2\theta\,d\theta}{\sqrt{(1 - c^2) - c^2\operatorname{cotg}^2\theta}}$$

ou

$$\phi - \phi_0 = c\int \frac{\operatorname{cossec}^2\theta\,d\theta}{\sqrt{(1 - c^2) - c^2\operatorname{cotg}^2\theta}} \tag{2.40}$$

onde ϕ_0 é uma constante. Fazemos agora a substituição

$$u = \sqrt{\frac{c^2}{1 - c^2}}\operatorname{cotg}\theta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cotg}\theta = \sqrt{\frac{1 - c^2}{c^2}}\,u \tag{2.41a}$$

$$du = \sqrt{\frac{c^2}{1 - c^2}}\operatorname{cossec}^2\theta\,d\theta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cossec}^2\theta\,d\theta = \sqrt{\frac{1 - c^2}{c^2}}\,du \tag{2.41b}$$

Usando (2.41) em (2.40), ficamos com

$$\phi - \phi_0 = c \int \frac{\sqrt{\frac{1-c^2}{c^2}}\, du}{\sqrt{(1-c^2) - c^2 \frac{1-c^2}{c^2}\, u^2}}$$

ou

$$\phi - \phi_0 = \frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-c^2}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

ou, ainda,

$$\phi - \phi_0 = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \tag{2.42}$$

Fazemos agora a substituição

$$u = \operatorname{sen}\alpha \qquad du = \cos\alpha\, d\alpha \qquad \alpha = \operatorname{arcsen} u \tag{2.43}$$

Usando (2.43) em (2.42), obtemos

$$\phi - \phi_0 = \int \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}} = \int \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\cos\alpha} = \int d\alpha$$

Então, temos

$$\phi - \phi_0 = \alpha = \operatorname{arcsen} u$$

e, usando (2.41a),

$$\phi - \phi_0 = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}}\ \operatorname{cotg}\theta\right)$$

ou

$$\operatorname{sen}(\phi - \phi_0) = \sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}}\ \operatorname{cotg}\theta \tag{2.44}$$

Definindo uma nova constante mediante

$$D = \sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}}$$

temos que (2.44) fica

$$\operatorname{sen}\phi\cos\phi_0 - \cos\phi\operatorname{sen}\phi_0 = D\operatorname{cotg}\theta$$

Definindo outras duas constantes por meio de

$$A = \cos\phi_0 \qquad B = -\operatorname{sen}\phi_0$$

ficamos com

$$A \operatorname{sen}\phi + B\cos\phi = D \operatorname{cotg}\theta \tag{2.45}$$

Agora, para visualizar melhor o que (2.45) representa, multiplicamos esta equação por $R \operatorname{sen}\theta$, ou seja,

$$AR \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + BR \operatorname{sen}\theta \cos\phi = DR \operatorname{sen}\theta \operatorname{cotg}\theta$$

ou

$$AR \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + BR \operatorname{sen}\theta \cos\phi = DR \cos\theta \tag{2.46}$$

Neste ponto recordamos a transformação de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas, dada por (**??**),

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

Com isso, identificamos que (2.46) pode ser escrita como

$$Ay + Bx = Dz \tag{2.47}$$

com $r = R$, ou seja, temos uma equação de um plano, que passa na origem, e que intersecta a esfera de raio R nos pontos em que (2.47) é satisfeita. A curva que é dada por essa intersecção é a geodésica na esfera.

■

Exemplo 2.3. *Determine a trajetória mais rápida entre dois pontos* **P** *e* **Q** *que um objeto descreve quando parte do repouso sujeito apenas à ação gravitacional, considerando que os dois pontos não estejam na mesma linha vertical, como mostra a figura 2.2.*

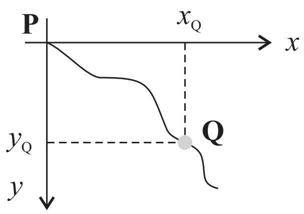

Figura 2.2: Curva baquistócrona entre dois pontos **P** e **Q**.

O problema de achar a trajetória mais rápida entre dois pontos dados é o mais conhecido envolvendo cálculo variacional, sendo conhecido como problema da *braquistócrona.*

Dados dois pontos **P** e **Q**, que não estão na mesma vertical, há uma trajetória entre eles que, se for seguida por um objeto sujeito apenas à ação do campo gravitacional, resulta no menor tempo entre os dois pontos. Trata-se, então, de minimizar o intervalo de tempo entre os dois pontos seguindo essa trajetória. Um intervalo de tempo infinitesimal pode ser escrito como

$$dt = \frac{d\ell}{v} \tag{2.48}$$

onde v é o módulo da velocidade no elemento de comprimento de arco $d\ell$, sendo que $\vec{v}$ é tangente ao vetor $\vec{d\ell}$. O funcional neste caso é o tempo total, dado por

$$\Delta t_{\mathbf{PQ}} = \int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{Q}} \frac{d\ell}{v} \tag{2.49}$$

Para determinar v, vamos supor que o campo gravitacional seja constante na região entre os pontos **P Q**, e que, no ponto **P**, onde por hipótese colocamos a origem dos eixos, a energia potencial é nula, de forma que, como ele parte do repouso, sua energia total também é nula. Como a única força agindo no sistema é a gravitacional, que é conservativa, podemos escrever, considerando um ponto genérico de coordenadas (x, y) ao longo da trajetória, e tendo cuidado com a orientação dos eixos na figura 2.2,

$$(T+U)_{\mathbf{P}} = (T+U) \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{mv^2}{2} - mgy$$

de onde sai

$$v = \sqrt{2gy} \tag{2.50}$$

Portanto, combinando (2.1) e (2.50) em (2.49), temos o funcional

$$\Delta t_{\mathbf{PQ}} = \int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{Q}} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}} \tag{2.51}$$

Note que aqui é mais interessante escrever (2.51) na forma de uma integral em y, mediante

$$\Delta t_{\mathbf{PQ}} = \int_0^{y_Q} \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_Q} \sqrt{\frac{1 + x'^2}{y}}\, dyq \tag{2.52}$$

onde $x' = \frac{dx}{dy}$, e aqui y é o parâmetro independente. Nesse caso, a função F em (2.4) é

$$F(x, x'; y) = \sqrt{\frac{1 + x'^2}{y}} \tag{2.53}$$

Vamos precisar de

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{2.54a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{y(1 + x'^2)}} \tag{2.54b}$$

Usando (2.54) em (2.21), achamos

$$\frac{d}{dy}\Big(\frac{x'}{\sqrt{y(1+x'^2)}}\Big) = 0$$

de modo que

$$\frac{x'}{\sqrt{y(1+x'^2)}} = c \tag{2.55}$$

onde c é uma constante. Agora, reescrevemos (2.55) como

$$\frac{x'^2}{1+x'^2} = c^2 y \tag{2.56}$$

Vamos introduzir a troca de variável

$$x' = \operatorname{tg} s \tag{2.57}$$

Com isso, usando (2.57), a equação (2.56) fica

$$\frac{\operatorname{tg}^2 s}{1+\operatorname{tg}^2 s} = c^2 y$$

ou

$$y = \frac{1}{c^2}\frac{\operatorname{tg}^2 s}{\sec^2 s} = a \operatorname{sen}^2 s \tag{2.58}$$

onde $a = \frac{1}{c^2}$. Agora, de (2.57), temos

$$x' = \frac{dx}{dy} = \operatorname{tg} s \quad \Rightarrow \quad dx = \operatorname{tg} s \, dy \tag{2.59}$$

A partir de (2.58), achamos

$$dy = 2a \operatorname{sen} s \cos s \, ds \tag{2.60}$$

Então, usando (2.60) em (2.59), obtemos

$$dx = 2a \operatorname{tg} s \operatorname{sen} s \cos s \, ds = 2a \operatorname{sen}^2 s \, ds \tag{2.61}$$

Podemos reescrever (2.61) usando

$$\operatorname{sen}^2 s = \frac{1-\cos(2s)}{2} \tag{2.62}$$

de modo que achamos

$$dx = 2a\frac{1-\cos(2s)}{2}\, ds = a[1-\cos(2s)]\, ds \tag{2.63}$$

Integrando (2.63), obtemos

$$\int dx = \int a[1 - \cos(2s)]\, ds$$

ou

$$x = a\left[s - \frac{\operatorname{sen}(2s)}{2}\right] + b \tag{2.64}$$

onde b é uma constante. Note que, como $y_P = 0$, temos, de (2.58),

$$y(0) = a \operatorname{sen}^2 s_0 \quad \Rightarrow \quad s_0 = 0 \tag{2.65}$$

Como $x_P(0) = 0$, temos, usando (2.64) e (2.65),

$$x_P = a\left[s_0 - \frac{\operatorname{sen}(2s_0)}{2}\right] + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \tag{2.66}$$

Assim, usando (2.62) e (2.66), obtemos, de (2.58) e (2.64),

$$x = a\left[s - \frac{\operatorname{sen}(2s)}{2}\right] \tag{2.67a}$$

$$y = a\frac{1 - \cos(2s)}{2} \tag{2.67b}$$

Definindo

$$A = \frac{a}{2} \qquad\qquad \theta = 2s \tag{2.68}$$

as equações (2.67) ficam

$$x(\theta) = A(\theta - \operatorname{sen}\theta) \tag{2.69a}$$

$$y(\theta) = A(1 - \cos\theta) \tag{2.69b}$$

que são equações paramétricas de uma cicloide em polares.

■

Continuando, vamos estender os resultados obtidos na seção 2.1 para incluir mais de uma função $y(x)$ em (2.4).

2.3 Fundamentos de Cálculo Variacional para Várias Funções da Variável Independente

Voltando ao desenvolvimento do formalismo de cálculo variacional, considere que agora temos n funções $y_i(x)$, onde x é um parâmetro, e temos um funcional do tipo

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F[y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x); x]\, dx \tag{2.70}$$

Correspondentemente, a variação em J é

$$\delta J = \delta \left\{ \int_{x_1}^{x_2} F[y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x); x]\, dx \right\} \tag{2.71}$$

Da mesma forma como antes, temos uma parâmetro α que representa curvas que se diferenciam infinitesimalmente das curvas "corretas", e funções auxiliares $\beta_i(x)$ tais que ocorre

$$y_1(x;\alpha) = y_1(x;0) + \alpha\beta_1(x) \tag{2.72a}$$
$$y_2(x;\alpha) = y_2(x;0) + \alpha\beta_2(x) \tag{2.72b}$$
$$\vdots = \vdots \tag{2.72c}$$
$$y_n(x;\alpha) = y_n(x;0) + \alpha\beta_n(x) \tag{2.72d}$$

e, quando $\alpha = 0$, temos as curvas "corretas" dadas por $y_i(x;0)$. Deve ocorrer também que, nos extremos,

$$\beta_i(x_1) = 0 \qquad\qquad \beta_i(x_2) = 0 \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.73}$$

Desenvolvendo (2.71) de forma similar ao feito antes, temos

$$\left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{dy_i}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial y_i'}\frac{dy_i'}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha\, dx \Big\} \tag{2.74}$$

Novamente manipulamos o termo

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y_i'}\frac{dy_i'}{d\alpha}\, d\alpha\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y_i'}\frac{d^2 y_i}{d\alpha dx}\, d\alpha\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y_i'}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy_i}{d\alpha}\right) d\alpha\, dx \tag{2.75}$$

Em seguida, fazemos uma integração por partes, definindo

$$u = \frac{\partial F}{\partial y_i'} \qquad\qquad du = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) dx \tag{2.76a}$$
$$dv = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy_i}{d\alpha}\right) dx \qquad\qquad v = \frac{dy_i}{d\alpha} \tag{2.76b}$$

Com isso, temos, usando (2.76) em (2.75),

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y_i'} \frac{d}{dx}\Big(\frac{dy_i}{d\alpha}\Big)\, d\alpha\, dx = \Big(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\frac{dy_i}{d\alpha}\Big)_{x_1}^{x_2} d\alpha - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\Big)\frac{dy_i}{d\alpha}\, d\alpha\, dx \tag{2.77}$$

Considerando (2.72), temos que

$$\frac{dy_i}{d\alpha} = \beta_i(x) \tag{2.78}$$

Consequentemente, aplicando (2.78) em (2.77), ficamos com

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y_i'} \frac{d}{dx}\Big(\frac{dy_i}{d\alpha}\Big)\, d\alpha\, dx = \Big[\frac{\partial F}{\partial y_i'}\beta_i(x)\Big]_{x_1}^{x_2} d\alpha - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\Big)\frac{dy}{d\alpha}\, d\alpha\, dx \tag{2.79}$$

De (2.73), achamos

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y_i'} \frac{d}{dx}\Big(\frac{dy_i}{d\alpha}\Big)\, d\alpha\, dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\Big)\frac{dy}{d\alpha}\, d\alpha\, dx \tag{2.80}$$

Agora, usamos (2.80) em (2.75), ou seja,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y_i'} \frac{dy_i'}{d\alpha}\, d\alpha\, dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\Big)\frac{dy}{d\alpha}\, d\alpha\, dx \tag{2.81}$$

e, usando (2.81) em (2.74), obtemos

$$\frac{dJ}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \Big\{\Big[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\Big)\Big]\frac{dy_i}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} d\alpha\Big\}\, dx \tag{2.82}$$

Note que, de (2.22), podemos escrever

$$\delta y_i = \Big(\frac{dy_i}{d\alpha}\Big)_{\alpha=0} d\alpha \tag{2.83}$$

de modo que, usando (2.23) e (2.83), escrevemos (2.82) como

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \Big\{\Big[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\Big)\Big]\delta y_i\Big\}\, dx \tag{2.84}$$

Vamos supor, inicialmente, que as funções $y_i(x)$ são todas independentes, de modo que todas as variações δy_i são independentes entre si. Neste caso, o extremo de J, caracterizado por $\delta J = 0$, ocorre quando temos

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\Big) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2.85}$$

Há uma equação (2.85) para cada y_i, e as equações são chamadas de equações de Euler-Lagrange. Note que para a obtenção de (2.85), supusemos, em (2.84), que as variações δy_i eram todas independentes. Podemos ampliar a validade do que obtivemos para incluir

1. Funções do tipo

$$F = F(y, y', y'', \ldots; x) \tag{2.86}$$

ou seja, funções F dependentes de derivadas de maior ordem da função $y(x)$, além da derivada primeira $y'(x)$.

2. Funções de mais de um parâmetro independente. Por exemplo, considerando dois parâmetros independentes x e t, temos funções do tipo

$$F = F[y(x,t), y'(x,t), \dot{y}(x,t), \ldots; x, t] \tag{2.87}$$

onde $y' = \frac{\partial y}{\partial x}$ e $\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t}$.

3. Problemas onde as variações δy_i não são todas independentes, o que ocorre, por exemplo, em alguns casos envolvendo vínculos não holonômicos.

Como exemplo do caso 2 apresentado acima, suponha que uma corda bem esticada esteja presa em seus extremos, e se estenda ao longo de uma dada direção, que pode ser representada pelo eixo x, conforme a figura 2.3.

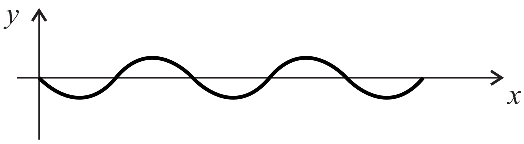

Figura 2.3: Uma corda esticada onde há ondas.

Nesta corda há a produção de ondas, e a altura de um dado ponto da corda é representada por uma função $y(x,t)$, de modo que temos dois parâmetros independentes, x e t. Nesse caso, o funcional J em (2.4) é escrito como

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F[y(x,t), y'(x,t), \dot{y}(x,t); x, t] \, dt dx \tag{2.88}$$

onde

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} \qquad \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} \tag{2.89}$$

Seguindo novamente as ideias já vistas, temos

$$\left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \frac{d\dot{y}}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha \, dt dx \tag{2.90}$$

Em seguida, temos que

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{d\alpha}\,d\alpha\,dtdx = \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{d\alpha}\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)\,d\alpha\,dtdx$$
$$= \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{dy}{d\alpha}\Big)\,d\alpha\,dtdx \quad (2.91)$$

e, fazendo como antes uma integração por partes,

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{d\alpha}\,d\alpha\,dtdx = \int_{t_1}^{t_2}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy}{d\alpha}\Big)_{x_1}^{x_2}d\alpha\,dt - \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\frac{dy}{d\alpha}\,d\alpha\,dtdx \quad (2.92)$$

Definindo, como antes,

$$y(x,t;\alpha) = y(x,t;0) + \alpha\beta(x,t) \quad (2.93)$$

com a restrição

$$\beta(x_1,t) = 0 \qquad \beta(x_2,t) = 0 \quad (2.94a)$$
$$\beta(x,t_1) = 0 \qquad \beta(x,t_2) = 0 \quad (2.94b)$$

temos que, usando (2.93) e (2.94a), obtemos para (2.92)

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{d\alpha}\,d\alpha\,dtdx = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\frac{dy}{d\alpha}\,d\alpha\,dtdx \quad (2.95)$$

Temos, também, que

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot y}\frac{d\dot y}{d\alpha}\,d\alpha\,dtdx = \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot y}\frac{d}{d\alpha}\Big(\frac{\partial y}{\partial t}\Big)\,d\alpha\,dtdx$$
$$= \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot y}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{dy}{d\alpha}\Big)\,d\alpha\,dtdx$$

e, fazendo novamente uma integração por partes,

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot y}\frac{d\dot y}{d\alpha}\,d\alpha\,dtdx = \int_{x_1}^{x_2}\Big(\frac{\partial F}{\partial \dot y}\frac{dy}{d\alpha}\Big)_{t_1}^{t_2}d\alpha\,dx - \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial F}{\partial \dot y}\Big)\frac{dy}{d\alpha}\,d\alpha\,dtdx$$

que fica, usando (2.93) e (2.94b),

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot y}\frac{d\dot y}{d\alpha}\,d\alpha\,dtdx = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial F}{\partial \dot y}\Big)\frac{dy}{d\alpha}\,d\alpha\,dtdx \quad (2.96)$$

Portanto, voltando em (2.90) e substituindo (2.95) e (2.96), achamos

$$\frac{dJ}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\Big[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\Big)\Big]\frac{dy}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} d\alpha\, dtdx$$

ou, considerando (2.22) e (2.23),

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\Big[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\Big)\Big]\delta y\, dtdx \tag{2.97}$$

Extremizando J, temos $\delta J = 0$, o que ocorre, de (2.97), quando

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\Big) = 0 \tag{2.98}$$

que é a equação que deve ser satisfeita para determinar $y(x,t)$. Vejamos agora a transposição do que vimos para o formalismo de Mecânica Clássica.

2.4 Princípio de Hamilton e Equações de Lagrange

Após estabelecer as equações (2.21), (2.85) ou (2.98) a partir do cálculo variacional, podemos fazer as devidas correspondencias para o nosso caso. O funcional que nos interessa é chamado ação, dado por

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q,\dot{q};t)\, dt \tag{2.99}$$

onde q representa o conjunto de n coordenadas generalizadas, ou seja, $q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, $\dot{q} = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n\}$ e $\mathcal{L} = T - U$ é a lagrangeana do sistema, e faz o papel da função $F(y, y'; x)$ em (2.4) ou (2.70). Com relação a esse funcional, o princípio de Hamilton estabelece que

Princípio de Hamilton: a ação $\mathcal{J}$, dada em (2.99), tem um valor estacionário entre t_1 e t_2 para a trajetoria "correta" descrita pelo sistema no espaço definido pelas coordenadas $q_1, q_2, \ldots, q_n$, chamado de espaço de configuração, ou seja, dentre todas as trajetorias possíveis neste espaço entre os instantes t_1 e t_2, o sistema segue aquela que mantém $\mathcal{J}$ estacionária. Com isso, deve ocorrer

$$\delta\mathcal{J} = \delta\Big\{\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q,\dot{q};t)\, dt\Big\} = 0 \tag{2.100}$$

para a trajetoria "correta" no espaço de configuração.

Considerando o que já vimos nas seções 2.1 e 2.3, e tendo em mente (2.100), notamos que podemos fazer as seguintes equivalencias diretas

$$x \to t \tag{2.101a}$$
$$y_i(x) \to q_i(t) \tag{2.101b}$$
$$F(y_i, y_i'; x) \to \mathcal{L}(q,\dot{q};t) \tag{2.101c}$$

Com isso, de forma bem direta temos, a partir de (2.85), considerando que as coordenadas q_i são todas independentes entre si, de modo que as variações δq_i são todas independentes, as equações de Lagrange na forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2.102}$$

onde aqui supomos que todas as forças, com exceção das forças de vínculo, podem ser obtidas a partir de alguma função energia potencial generalizada $U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; t)$. Note que (2.102), obtida agora a partir do princípio de Hamilton, coincide com (**??**), que foi determinada de forma independente a partir da suposição de validade do formalismo newtoniano, e do princípio de D'Alembert. Portanto, por dois modos distintos e independentes chegamos às mesmas equações que descrevem a dinâmica do sistema. Conforme dissemos no início deste capítulo, possivelmente a obtenção das equações (**??**) a partir de um formalismo que nos é mais familiar, ou seja, o formalismo newtoniano, é, neste momento, mais compreensível e nos deixa mais confortável do que a obtenção das equações (2.102) a partir do princípio de Hamilton, que é mais abstrato e menos familiar. No entanto, se pensarmos bem, o formalismo newtoniano baseia-se na suposição de que a segunda lei de Newton (**??**),

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

é válida, o que envolve, também, ideias abstratas envolvendo força, momento linear e referenciais inerciais. Podemos estar mais acostumados com essas grandezas, e o sucesso do formalismo newtoniano em fazer predições sobre diversos movimentos nos dá mais segurança sobre ele, mas o fato é que há abstrações tanto em um caso como no outro. E, do ponto de vista de desenvolvimento de aspectos formais em diversas áreas de Física, o princípio de Hamilton é mais apropriado. Note que já vimos em vários exemplos anteriores estudados no capítulo **??** que as EDM obtidas a partir de (2.102) ou (**??**) coincidem com aquelas determinadas empregando o formalismo newtoniano, indicando que o formalismo lagrangeano pode ser obtido do newtoniano. Supondo agora que as equações (2.102) ou (**??**) sejam válidas, e obtidas a partir do princípio de Hamilton, temos que elas permitem deduzir o formalismo newtoniano, bastando para isso seguir o caminho inverso ao adotado no capítulo **??**. Isso mostra a completa equivalência entre os dois formalismos, e o uso de um, ou de outro, depende basicamente do problema em estudo.

Quando há mais de um parâmetro independente, como ocorre no caso da corda apresentada na figura 2.3, teremos equações do tipo dado em (2.98). Especificamente no caso da corda, a ação fica

$$\mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \mathscr{L}[y(x,t), y'(x,t), \dot{y}(x,t); x, t]\, dx\, dt \tag{2.103}$$

onde $\mathscr{L}$ deve ser entendido como uma densidade de lagrangeana, sendo, neste caso, uma densidade linear. A equação (2.98) fica, então,

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y'}\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}}\Big) = 0 \tag{2.104}$$

onde a notação é

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} \qquad\qquad \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t}$$

Até o momento consideramos que as coordenadas q_i são independentes entre si, e, com isso, têm variações δq_i independentes. O próximo passo consiste em verificar o que ocorre quando há vínculos entre as coordenadas, de modo que nem todas são independentes. Em certos casos é possível investigar esses problemas modificando "levemente" o que já foi obtido, e, com isso, informações interessantes podem ser extraídas.

2.5 Inclusão de Vínculos e Extensão do Princípio de Hamilton

Em certos casos é possível incluir vínculos de uma forma relativamente simples no desenvolvimento feito anteriormente, modificando o princípio de Hamilton de forma "suave" (esse é o caso 3 da página (24). Isso ocorre quando os vínculos são holonômicos ou, então, quando são não holonômicos mas podem ser escritos de uma certa forma particular, que veremos em seguida. Com isso, algumas informações importantes podem ser obtidas, o que torna essa abordagem interessante. Note que, no caso de vínculos holonômicos, sempre é possível escolher um dado conjunto de coordenadas generalizadas que são independentes, de modo que a vantagem de usar a abordagem que apresentaremos consiste em justamente obter essas informações "extras" que podem ser determinadas. Para isso, precisamos utilizar a ideia de *multiplicadores de Lagrange*, vistos, usualmente, em cursos de Cálculo de várias variáveis. Vejamos, inicialmente, um exemplo.

Exemplo 2.4. *Temos uma função dada por*

$$F(x, y) = x^2 + 2y^2 \tag{2.105}$$

e queremos achar o ponto que extremiza essa função sujeito ao vínculo

$$y = x + 1 \tag{2.106}$$

Use o método de multiplicadores de Lagrange para resolver o problema.

Primeiro, note que há dois modos de resolver esse problema. O método direto consiste em usar (2.106) em (2.105) transformando F em uma função de uma variável apenas, e, em seguida, usando as ideias de extremos de função de uma variável, ou seja, basicamente derivando a função e igualando a zero para achar os pontos críticos. Esse modo fica como exercício para o leitor, como verificação do que faremos em seguida.

O segundo modo consiste em introduzir um parâmetro λ, que é um multiplicador de Lagrange, escrevendo uma função G na forma

$$G = x^2 + 2y^2 - \lambda(y - x - 1) \tag{2.107}$$

Note que, em (2.107), temos a função F dada em (2.105), e o vínculo dado em (2.106), de modo que, de fato, o termo entre parênteses se anula quando o vínculo é satisfeito. Portanto, achar extremos de G corresponde a achar extremos de F. Agora, supondo que x e y fossem variáveis independentes, extremos de G seriam obtidos de

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \tag{2.108}$$

A ideia é utilizar um valor para λ de forma que isso de fato ocorra, ainda que na linha definida pela equação de vínculo (2.106) isso não seja verdade. Com isso, temos o conjunto de equações

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \tag{2.109a}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 4y - \lambda = 0 \tag{2.109b}$$

$$y = x + 1 \tag{2.109c}$$

sendo que (2.109c) é a equação de vínculo entre x e y. De (2.109a), achamos

$$2x + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\lambda}{2} \tag{2.110}$$

De (2.109b), obtemos

$$4y - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\lambda}{4} \tag{2.111}$$

Por fim, de (2.109c), achamos, usando (2.110) e (2.111),

$$y = x + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{4} = -\frac{\lambda}{2} + 1$$

ou

$$\lambda = -2\lambda + 4$$

de modo que

$$\lambda = \frac{4}{3} \tag{2.112}$$

Portanto, usando (2.112) em (2.110) e (2.111), achamos o ponto crítico

$$x_c = -\frac{2}{3} \qquad y_c = \frac{1}{3} \tag{2.113}$$

onde F dada em (2.105) vale

$$F(x_c, y_c) = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + 2\frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \tag{2.114}$$

O leitor deve conferir que este é o resultado obtido usando o método direto comentado no início da resolução.

■

Voltando ao nosso problema, considere inicialmente que temos vínculos holonômicos, dados por funções do tipo dado em (**??**),

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n; t) = 0 \tag{2.115}$$

onde, aqui, nem todas as n coordenadas q_j são independentes, pois devem respeitar os vínculos dados em (**??**). Note que, nesse caso, seria possível escolher um conjunto de coordenadas s_j que seriam, de fato, independentes entre si. Se há m equações de vínculo do tipo (**??**), então há $n-m$ coordenadas independentes s_j. Entretanto, como dissemos, usar o procedimento que desenvolveremos dará outras informações relevantes. De (**??**), calculamos a diferencial total, ou seja,

$$df = \sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k}\, dq_k + \frac{\partial f}{\partial t}\, dt = 0 \tag{2.116}$$

Considerando que há m equações de vínculo, e representando cada uma por um dado valor do índice ℓ, $\ell = 1, \ldots, m$, podemos definir os coeficientes

$$c_{\ell k} = \frac{\partial f_\ell}{\partial q_k} \tag{2.117a}$$

$$c_{\ell t} = \frac{\partial f_\ell}{\partial t} \tag{2.117b}$$

onde os coeficientes $c_{\ell k}$ e $c_{\ell t}$ podem depender tanto do tempo t quanto das coordenadas q_j. Com isso, (2.116) pode ser escrita, usando (2.117), como

$$\sum_k c_{\ell k}\, dq_k + c_{\ell t}\, dt = 0\,, \qquad \ell = 1, \ldots, m \tag{2.118}$$

Outra forma de escrever (2.118) é considerar $\frac{df}{dt}$, o que resulta em

$$\sum_k c_{\ell k}\, \dot{q}_k + c_{\ell t} = 0\,, \qquad \ell = 1, \ldots, m \tag{2.119}$$

Suponha agora que os vínculos sejam não holonômicos, ou seja, não podem ser escritos na forma (2.115). Por exemplo, os vínculos podem ser expressos diretamemte em termos de velocidades, ao invés de coordenadas, por meio de equações do tipo (2.119), sendo que, nesse caso, os coeficientes $c_{\ell k}$ e $c_{\ell t}$ não são dados por (2.117), já que não há funções f_ℓ como as dadas em (2.115), pois os vínculos não são holonômicos. Neste caso, ainda que não holonômicos, eles poderão ser incorporados ao desenvolvimento que faremos em seguida. Sendo os vínculos dados na forma (2.119), sejam ou não holonômicos, eles podem ser transformados na forma (2.118) mediante a multiplicação por dt. Com isso, a variação virtual das equações de vínculo fica (com $dt = 0$),

$$\sum_k c_{\ell k}\,\delta q_k = 0\,, \qquad \ell = 1,\ldots,m \tag{2.120}$$

Sendo (2.120) válida, então

$$\lambda_\ell \sum_k c_{\ell k}\,\delta q_k = 0\,, \qquad \ell = 1,\ldots,m \tag{2.121}$$

também é válida. Em (2.121), λ_ℓ é um multiplicador de Lagrange a ser determinado. Continuando, a partir de (2.121), podemos escrever também, somando no índice ℓ,

$$\sum_\ell \Big[\lambda_\ell \sum_k c_{\ell k}\,\delta q_k\Big] = \sum_{k\ell} \lambda_\ell c_{\ell k}\,\delta q_k = 0 \tag{2.122}$$

e, por fim, integrando em t, achamos

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k\ell} \lambda_\ell c_{\ell k}\,\delta q_k\,dt = 0 \tag{2.123}$$

Agora, recordamos o desenvolvimento feito para obter as equações de Lagrange na seção 2.3. Chegamos à equação (2.84) e, só nesse ponto, fizemos a hipótese de que as variações δy_i eram todas independentes. Escrevendo (2.84) usando as correspondências (2.101), temos

$$\delta \mathfrak{I} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big)\Big]\,\delta q_i \right\} dt \tag{2.124}$$

O princípio de Hamilton é dado por (2.100) e, com o resultado dado em (2.123), podemos somar a integral em (2.123) (trocando o índice k por i) à expressão (2.124), obtendo

$$\delta \mathfrak{I} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big) + \sum_\ell \lambda_\ell c_{\ell i}\Big]\,\delta q_i \right\} dt \tag{2.125}$$

Com isso, o princípio de Hamilton (2.100) fica

$$\delta \mathfrak{I} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big) + \sum_\ell \lambda_\ell c_{\ell i}\Big]\,\delta q_i \right\} dt = 0 \tag{2.126}$$

Em (2.126) temos n coordenadas q_i, mas como há m vínculos, nem todas as coordenadas são independentes, havendo, de fato, apenas $n-m$ independentes. Assim, de início esta equação garante apenas que o termo entre chaves em (2.126) se anula, pois os δq_i não são todos independentes, e não é possível fazer cada termo da somatória (o termo entre colchetes) igual a zero. Há, também, m multiplicadores de Lagrange λ_ℓ, que estão à nossa disposição. Por hipótese, escolhemos as primeiras $n-m$ coordenadas para serem independentes, de modo que supomos que as coordenadas q_i, $i = 1,\ldots,n-m$, são aquelas que serão independentes entre si após a aplicação dos vínculos. Para que isso ocorra, escolhemos os multiplicadores de Lagrange de tal forma que cada termo entre colchetes em (2.126) se anule quando $i = n-m+1,\ldots,n$, resultando em

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big) + \sum_\ell \lambda_\ell c_{\ell i} = 0\,, \qquad i = n-m+1, \ldots, n \tag{2.127}$$

As m equações (2.127) definem os valores dos m multiplicadores de Lagrange λ_ℓ. Com isso, a soma no índice i em (2.126) ocorre até $i = n - m$, ou seja,

$$\delta \mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{n-m} \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big) + \sum_\ell \lambda_\ell c_{\ell i}\Big] \delta q_i \right\} dt = 0 \tag{2.128}$$

Como, por hipótese, as coordenadas q_i, $i = 1, \ldots, n-m$ são todas independentes, agora sim em (2.128) temos que cada termo entre colchetes deve se anular, pois os δq_i são todos independentes, e, portanto, deve ocorrer

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big) + \sum_\ell \lambda_\ell c_{\ell i} = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, n-m \tag{2.129}$$

onde, em (2.129), devemos usar os valores de λ_ℓ determinados por (2.127). Note que, apesar de idênticas em forma, as equações (2.127) e (2.129) são justificadas por argumentos diferentes. Reunindo estas equações, achamos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big) + \sum_\ell \lambda_\ell c_{\ell i} = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2.130}$$

que são as equações de Lagrange quando temos vínculos holonômicos ou não holonômicos que possam ser escritos nas formas (2.118) ou (2.119). Note que temos n equações em (2.130) e m equações em (2.118) ou (2.119), num total de $n+m$ equações. Temos, também, $n+m$ incógnitas, a saber, n coordenadas q_i e m multiplicadores de Lagrange λ_ℓ.

Temos alguns pontos importantes a ressaltar. Primeiro, há alguma interpretação para os multiplicadores de Lagrange λ_ℓ? De fato, sim. Para ver isso, suponha que os vínculos sejam removidos do problema mas que, para que a dinâmica do sistema não seja alterada, tenhamos que incluir, então, forças aplicadas não ligadas a vínculos para compensar a remoção das forças de vínculo. Pensando no que vimos no capítulo **??**, em particular na seção **??**, substituímos todas as forças de vínculo, que surgem no termo $\vec{f}_i^{\,v}$ na equação (**??**), por forças equivalentes não ligadas a vínculos, que entram no termo $\vec{F}_i^{\,nv}$, de modo que a força total $\vec{F}_i$ permaneça a mesma, mantendo, portanto, a mesma dinâmica para o sistema. Já que as forças resultantes não são alteradas, nem a dinâmica, as equações que governam esse sistema saem de (**??**),

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\Big) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \mathcal{Q}_j$$

ou, então, numa forma mais interessante no momento, de (**??**),

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \mathcal{Q}_j$$

onde $\mathcal{Q}_j$ representa as forças generalizadas não deriváveis de uma função escalar, dadas em (**??**),

$$\mathcal{Q}_j = \sum_i \vec{\mathcal{F}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Assim, reescrevendo (2.130) na forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum_\ell \lambda_\ell c_{\ell i}\,, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2.131}$$

vemos que, comparando (**??**) e (**??**), chegamos à conclusão que (atente para a troca de índice i por j)

$$\mathcal{Q}_j = \sum_\ell \lambda_\ell c_{\ell j}\,, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{2.132}$$

Portanto, os multiplicadores de Lagrange estão ligados às forças de vínculo, que, desse modo, podem, em princípio, serem determinadas. Essa é uma informação importante que não pode ser determinada usando o que foi visto no capítulo **??**, e que justifica o uso de um conjunto de coordenadas q_i que não seja independente no caso de vínculos holonômicos, onde sempre é possível usar um conjunto de coordenadas que é independente. Se isso for feito, perde-se a possibilidade de obter as forças de vínculo. Dependendo do problema isso pode ser relevante ou não, e em cada caso deve estar claro o que se quer obter.

Continuando, de (2.122), temos

$$\sum_{k\ell} \lambda_\ell c_{\ell k}\, \delta q_k = \sum_k \left[\sum_\ell \lambda_\ell c_{\ell k}\right] \delta q_k = 0 \tag{2.133}$$

Agora, de (2.132), temos que (2.133) fornece

$$\sum_k \left[\sum_\ell \lambda_\ell c_{\ell k}\right] \delta q_k = \sum_k \mathcal{Q}_k\, \delta q_k = 0 \tag{2.134}$$

e, tendo em vista a equação (**??**), vemos que (2.134) mostra que o trabalho virtual das forças de vínculo se anula, justificando a hipótese feita no capítulo **??** para a obtenção do princípio de D'Alembert. Vejamos agora alguns exemplos relacionados ao que foi visto até o momento.

2.6 Exemplos Envolvendo o Princípio de Hamilton

Considerando o que foi visto até o momento, vamos estudar alguns exemplos relevantes ao entendimento do que foi apresentado até o momento.

Exemplo 2.5. *Considere a corda apresentada na figura 2.3. Suponha que ela esteja bem esticada, sujeita a uma força de tração F, de modo que os deslocamentos na direção y são muito pequenos. Considerando que um dado elemento da corda tem um deslocamento dado por $y(x,t)$, onde x e t são parâmetros, e que a corda tem uma densidade linear de massa μ constante, determine a lagrangeana do sistema e a EDM.*

Primeiro, temos que a velocidade de um dado ponto situado numa posição x da corda é dada por

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} \tag{2.135}$$

Portanto, a energia cinética de um elemento de corda de massa dm e comprimento $d\ell$ é, usando (2.135),

$$dT = \frac{dm}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial t}\Big)^2 \tag{2.136}$$

Agora, considere a figura 2.4, que mostra uma corda e elementos relevantes ao problema. Cabe notar que a figura 2.4 apresenta elementos muito ampliados, para facilitar a visualização. O elemento de comprimento $d\ell$ vale, de acordo com (2.2),

$$d\ell = dx\sqrt{1+\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2} \tag{2.137}$$

A grandeza $\frac{\partial y}{\partial x}$ corresponde à tangente do ângulo θ apresentado na figura 2.4, que, por hipótese, é muito pequena. Então, podemos expandir (2.137) em uma série de Taylor, considerando apenas o termo relevante em uma dada situação. Assim, temos que

$$d\ell = dx\Big[1+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2+\cdots\Big] \tag{2.138}$$

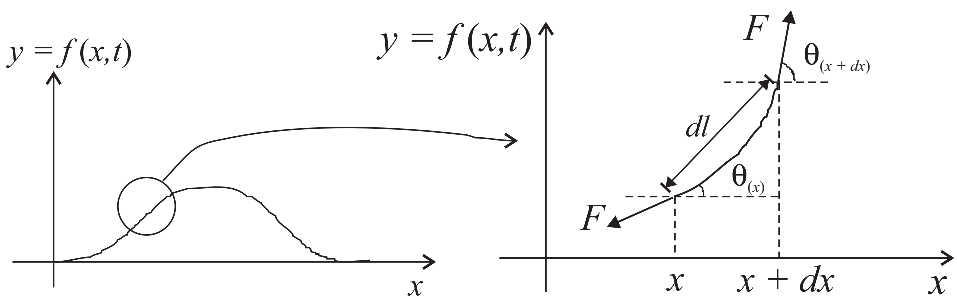

Figura 2.4: Uma corda esticada e uma ampliação de um elemento dessa corda.

Então, a energia cinética (2.136) fica, considerando que $\mu = \frac{dm}{d\ell}$,

$$dT = \frac{\mu\, d\ell}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial t}\Big)^2$$

ou, usando (2.138),

$$dT = \frac{\mu}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial t}\Big)^2 dx\Big[1+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2+\cdots\Big] \tag{2.139}$$

Assim, considerando apenas o termo mais relevante, já que $\frac{\partial y}{\partial x} \to 0$, a equação (2.139) fornece

$$dT = \frac{\mu}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial t}\Big)^2 dx \tag{2.140}$$

de modo que a energia cinética fica, supondo que a corda esteja esticada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$,

$$T = \int_0^L \frac{\mu}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial t}\Big)^2 dx \tag{2.141}$$

Para achar a energia potencial associada ao estiramento da corda quando a onda passa por ela, considere a ampliação mostrada na figura 2.4. Um elemento de corda inicialmente estático teria comprimento dx, e quando a onda passa por ele, o comprimento passa a ser $d\ell$. Assim, a força de tração F produz um trabalho sobre esse elemento que corresponde ao aumento de energia potencial que o sistema adquire. Esse aumento é

$$dU = F(d\ell - dx) \tag{2.142}$$

Agora, usamos (2.138) em (2.142), obtendo

$$dU = F\Big\{dx\Big[1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2 + \cdots\Big] - dx\Big\}$$

ou

$$dU = F\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2 + \cdots\Big]\, dx \tag{2.143}$$

e, considerando apenas o termo mais relevante em (2.143), temos

$$dU = \frac{F}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2 dx \tag{2.144}$$

Com isso, a energia potencial fica

$$U = \int_0^L \frac{F}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2 dx \tag{2.145}$$

Portanto, de (2.141) e (2.145) temos a lagrangeana

$$\mathcal{L} = \int_0^L \frac{\mu}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial t}\Big)^2 dx - \int_0^L \frac{F}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2 dx$$

ou

$$\mathcal{L} = \int_0^L \Big[\frac{\mu}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial t}\Big)^2 - \frac{F}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2\Big] dx \tag{2.146}$$

De (2.146), temos uma densidade linear de lagrangeana dada por

$$\mathscr{L} = \frac{\mu}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial t}\Big)^2 - \frac{F}{2}\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)^2 \tag{2.147}$$

Agora, usamos (2.147) em (2.104) para obter a EDM. Note que a notação é tal que

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} \qquad\qquad \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} \tag{2.148}$$

Precisamos de

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \tag{2.149a}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y'} = -F\frac{\partial y}{\partial x} \tag{2.149b}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} = \mu\frac{\partial y}{\partial t} \tag{2.149c}$$

Então, usando (2.149) em (2.104), ficamos com

$$0 - \frac{\partial}{\partial x}\Big(-F\frac{\partial y}{\partial x}\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\mu\frac{\partial y}{\partial t}\Big) = 0$$

ou

$$-F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

ou, ainda,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{2.150}$$

que tem a forma de uma equação diferencial de onda homogênea, como seria de se esperar, sendo a velocidade de propagação dada por

$$v_{onda} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{2.151}$$

■

Exemplo 2.6. *Suponha que a lagrangeana seja uma função do tipo*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, \ddot{q}; t) \tag{2.152}$$

ou seja, em $\mathcal{L}$ temos agora a possibilidade de aparecerem as derivadas segundas das coordenadas q_i, que seriam as acelerações generalizadas. Fazendo a hipótese de que as variações de q_i e também de $\dot{q}_i$ se anulam nos extremos, use as ideias de cálculo variacional e obtenha as equações de Lagrange neste caso a partir do princípio de Hamilton.

De (2.152), temos a ação

$$\mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, \ddot{q}; t)\, dt \tag{2.153}$$

Logo, o princípio de Hamilton estabelece que deve ocorrer

$$\delta\mathcal{I} = \delta\Big\{\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, \ddot{q}; t)\, dt\Big\} = 0 \tag{2.154}$$

para a trajetoria "correta" no espaço de configuração. Devemos agora desenvolver (2.154). Começamos definindo as funções auxiliares $\beta_i(t)$ e o parâmetro α, mediante

$$q_i(t;\alpha) = q_i(t;0) + \alpha\beta_i(t)\,, \qquad i = 1, \dots, n \tag{2.155}$$

e, quando $\alpha = 0$, temos as curvas "corretas" dadas por $q_i(t;0)$. Deve ocorrer também que, nos extremos,

$$\beta_i(t_1) = 0 \qquad\qquad \beta_i(t_2) = 0 \qquad i = 1, \dots, n \tag{2.156}$$

Agora, temos, de (2.154),

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} d\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\frac{dq_i}{d\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{d\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\frac{d\ddot{q}_i}{d\alpha}\Big)_{\alpha=0} d\alpha\, dt \tag{2.157}$$

Vamos manipular o termo

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\frac{d\ddot{q}_i}{d\alpha}\, d\alpha\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\frac{d^2\dot{q}_i}{d\alpha dt}\, d\alpha\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\frac{d}{dt}\Big(\frac{d\dot{q}_i}{d\alpha}\Big)\, d\alpha\, dt \tag{2.158}$$

Fazemos uma integração por partes, definindo

$$u = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i} \qquad\qquad du = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\Big)\, dt \tag{2.159a}$$

$$dv = \frac{d}{dt}\Big(\frac{d\dot{q}_i}{d\alpha}\Big)\, dt \qquad\qquad v = \frac{d\dot{q}_i}{d\alpha} \tag{2.159b}$$

Então, usando (2.159) em (2.158), temos

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\frac{d}{dt}\Big(\frac{d\dot{q}_i}{d\alpha}\Big)\, d\alpha\, dt = \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{d\alpha}\Big)_{t_1}^{t_2} d\alpha - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\Big)\frac{d\dot{q}_i}{d\alpha}\, d\alpha\, dt \tag{2.160}$$

Conforme a hipótese feita de que a variação de $\dot{q}_i$ nos extremos também se anula, temos, de (2.155),

$$\dot{q}_i(t;\alpha) = \dot{q}_i(t;0) + \alpha\dot{\beta}_i(t)\,, \qquad i = 1, \dots, n \tag{2.161}$$

onde $\dot{\beta}_i = \frac{d\beta_i}{dt}$. Então, nos extremos, ocorre

$$\dot{\beta}_i(t_1) = 0 \qquad \dot{\beta}_i(t_2) = 0 \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.162}$$

Além disso, de (2.161), temos

$$\frac{d\dot{q}_i}{d\alpha} = \dot{\beta}_i(t)\,, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2.163}$$

Com isso, usando (2.162) e (2.163) em (2.160), ficamos com

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i} \frac{d}{dt}\Big(\frac{d\dot{q}_i}{d\alpha}\Big)\, d\alpha\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\Big) \frac{d\dot{q}_i}{d\alpha}\, d\alpha\, dt$$

ou

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i} \frac{d}{dt}\Big(\frac{d\dot{q}_i}{d\alpha}\Big)\, d\alpha\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\Big) \frac{d}{dt}\Big(\frac{dq_i}{d\alpha}\Big)\, d\alpha\, dt \tag{2.164}$$

Fazemos agora nova integração por partes, mediante

$$u = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\Big) \qquad du = \frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\Big)\, dt \tag{2.165a}$$

$$dv = \frac{d}{dt}\Big(\frac{dq_i}{d\alpha}\Big)\, dt \qquad v = \frac{dq_i}{d\alpha} \tag{2.165b}$$

Então, usando (2.165) em (2.164), achamos

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i} \frac{d}{dt}\Big(\frac{d\dot{q}_i}{d\alpha}\Big)\, d\alpha\, dt = -\Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\Big)\frac{dq_i}{d\alpha}\Big]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\Big) \frac{dq_i}{d\alpha}\, d\alpha\, dt \tag{2.166}$$

De (2.155), temos

$$\frac{dq_i}{d\alpha} = \beta_i(t)\,, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2.167}$$

Logo, usando (2.156) e (2.167) em (2.166), ficamos com

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i} \frac{d}{dt}\Big(\frac{d\dot{q}_i}{d\alpha}\Big)\, d\alpha\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\Big) \frac{dq_i}{d\alpha}\, d\alpha\, dt \tag{2.168}$$

Então, usando (2.168) em (2.158), achamos

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i} \frac{d\ddot{q}_i}{d\alpha}\, d\alpha\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\Big) \frac{dq_i}{d\alpha}\, d\alpha\, dt \tag{2.169}$$

Devemos manipular também o termo

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{d\alpha}\, d\alpha\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d^2 q_i}{d\alpha dt}\, d\alpha\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}\Big(\frac{dq_i}{d\alpha}\Big)\, d\alpha\, dt \tag{2.170}$$

Usando uma integração por partes e considerando as variações nulas nos extremos, chegamos a (verificação a cargo do leitor)

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{d\alpha}\, d\alpha\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big) \frac{dq_i}{d\alpha}\, d\alpha\, dt \tag{2.171}$$

Portanto, substituindo (2.169) e (2.171) em (2.157), temos

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} d\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big) + \frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\Big)\Big] \frac{dq_i}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} d\alpha\, dt$$

ou

$$\delta\mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \Big\{\sum_i \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big) + \frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\Big)\Big]\delta q_i\Big\}\, dt \tag{2.172}$$

De acordo com o princípio de Hamilton (2.154), devemos ter, de (2.172),

$$\delta\mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \Big\{\sum_i \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big) + \frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\Big)\Big]\delta q_i\Big\}\, dt = 0 \tag{2.173}$$

Considerando que as variações da coordenadas q_i são todas independentes, a equação (2.173) fornece, com uma pequena troca de ordem,

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}\Big) - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \tag{2.174}$$

que são as equações de Lagrange nesse caso.

■

Exemplo 2.7. *Considerando o resultado obtido no exemplo 2.6, obtenha a EDM para a lagrangeana*

$$\mathcal{L} = -\frac{mq\ddot{q}}{2} - \frac{kq^2}{2} \tag{2.175}$$

Para obter a EDM, vamos precisar de

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{m\ddot{q}}{2} - kq \tag{2.176a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{2.176b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}} = -\frac{mq}{2} \tag{2.176c}$$

Então, usando (2.176) em (2.174), obtemos

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(-\frac{mq}{2}\Big) - \frac{d}{dt}(0) - \frac{m\ddot{q}}{2} - kq = 0$$

ou

$$-\frac{m\ddot{q}}{2} - \frac{m\ddot{q}}{2} - kq = 0$$

que fica

$$m\ddot{q} + kq = 0 \tag{2.177}$$

que é a EDM de um oscilador harmônico simples.

■

Exemplo 2.8. *Conforme já dissemos anteriormente, o princípio de Hamilton é muito importante em termos de desenvolvimento de formalismo. Isso vale não somente em Mecânica Clássica. Para ver isso, vamos fazer uma aplicação em Mecânica Quântica. Considere que, em Mecânica Quântica não relativística, a equação que descreve a dinâmica de um sistema é a equação de Schrödinger, dada, em uma dimensão, por*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + U(x)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{2.178}$$

onde $U(x)$ é a energia potencial do sistema, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h é a constante de Planck, e a função de onda $\Psi(x,t)$ é uma função complexa que descreve o estado físico do sistema. Tomando o complexo conjugado da equação (2.178), *temos*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2} + U(x)\Psi^* = -i\hbar\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} \tag{2.179}$$

Podemos agora aplicar o princípio de Hamilton à Mecânica Quântica. Para isso, considere que Ψ e Ψ^* sejam coordenadas generalizadas. Suponha que a ação seja dada por

$$\mathcal{I} = \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(\Psi, \Psi^*, \Psi', \Psi^{*\prime}, \dot{\Psi}, \dot{\Psi}^*; x, t)\, dtdx \tag{2.180}$$

onde a notação é tal que

$$\Psi' = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \qquad \dot{\Psi} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{2.181a}$$

$$\Psi^{*\prime} = \frac{\partial\Psi^*}{\partial x} \qquad \dot{\Psi}^* = \frac{\partial\Psi^*}{\partial t} \tag{2.181b}$$

Supondo que o princípio de Hamilton seja válido, ache as equações de Lagrange para esse caso, e determine a forma da função $\mathscr{L}$ que dá origem às equações de Schrödinger (2.178) *e* (2.179) *quando usadas nas equações de Lagrange obtidas.*

Para achar as equações de Lagrange, notamos que $\mathscr{L}$ em (2.180) é uma função de dois parâmetros independentes, x e t, e envolve duas coordenadas Ψ e Ψ^*, além de suas derivadas em relação a x e a t. Sendo assim, ela corresponde à função $\mathscr{L}$ dada em (2.103), com a diferença que há duas coordenadas, ao invés de uma. Com isso, as equações de Lagrange são obtidas adaptando-se (2.104), e ficam

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi'}\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\Psi}}\Big) = 0 \tag{2.182a}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi^*} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi^{*\prime}}\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\Psi}^*}\Big) = 0 \tag{2.182b}$$

Agora, para obter $\mathscr{L}$ de modo que as equações (2.178) e (2.179) sejam obtidas ao usá-la em (2.182), notamos que a estrutura desta função deve ser tal que temos algo como

$$\mathscr{L} = a\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} + bU(x)\Psi\Psi^* + c\Psi\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + d\,\Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{2.183}$$

onde a, b, c e d são constantes a serem determinadas. Como $\mathscr{L}$ deve ser uma função real, assim como $U(x)$, ao passo que Ψ é uma função complexa, assim como suas derivadas, outros termos além dos apresentados são eliminados (veja o exercício 2.**??**). Além disso, considerando o complexo conjugado de (2.183), temos

$$\mathscr{L}^* = a^*\frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + b^*U(x)\Psi^*\Psi + c^*\Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial t} + d^*\,\Psi\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \tag{2.184}$$

Como $\mathscr{L}$ é real, $\mathscr{L}^* = \mathscr{L}$, de modo que, comparando as equações (2.183) e (2.184), obtemos

$$a = a^* \qquad b = b^* \qquad c = d^* \qquad d = c^* \tag{2.185}$$

Portanto, a e b são reais. Usando (2.185) em (2.183), temos

$$\mathscr{L} = a\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} + bU(x)\Psi\Psi^* + c\Psi\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + c^*\,\Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{2.186}$$

Agora, para usar (2.182), vamos precisar de

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi} = bU(x)\Psi^* \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi^*} = bU(x)\Psi \tag{2.187a}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi'} = a\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi'^*} = a\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{2.187b}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\Psi}} = c^*\Psi^* \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\Psi}^*} = c\Psi \tag{2.187c}$$

Substituindo (2.187) em (2.182a), achamos

$$bU(x)\Psi^* - \frac{\partial}{\partial x}\Big(a\frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(c^*\Psi^*\Big) = 0$$

ou, reescrevendo,

$$-a\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2} + bU(x)\Psi^* = c^*\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} \tag{2.188}$$

Comparando agora (2.179) e (2.188), achamos

$$a = \frac{\hbar^2}{2m} \qquad b = 1 \qquad c^* = -i\hbar \tag{2.189}$$

Como verificação, vamos substituir (2.187) em (2.182b), achando

$$bU(x)\Psi - \frac{\partial}{\partial x}\Big(a\frac{\partial\Psi}{\partial x}\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(c\Psi\Big) = 0$$

ou

$$-a\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + bU(x)\Psi = c\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{2.190}$$

De (2.178) e (2.188), obtemos

$$a = \frac{\hbar^2}{2m} \qquad b = 1 \qquad c = i\hbar \tag{2.191}$$

em acordo com o determinado em (2.189). Com isso, usando (2.189) e (2.191) em (2.186), ficamos com

$$\mathscr{L} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} + U(x)\Psi\Psi^* + i\hbar\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} - i\hbar\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

ou

$$\mathscr{L} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} + U(x)\Psi\Psi^* + i\hbar\Big(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}\Big) \tag{2.192}$$

■

Exemplo 2.9. *Suponha que uma partícula de massa m se mova no plano xy de forma que haja um vínculo dado por*

$$\dot{y} + ax = 0 \tag{2.193}$$

onde a é uma constante. Não há energia potencial nesse caso. Investigue o movimento obtendo as EDMs e a força de vínculo.

O vínculo dado em (2.193) é do tipo não holonômico, e este problema serve para ilustrarmos o procedimento a ser adotado neste caso. Ele está escrito na forma (2.119), de modo que temos $m = 1$ neste caso (um vínculo, e então $\ell = 1$ apenas), $n = 2$, duas coordenadas (x e y, e então $k = 1, 2$), e

$$c_{1x} = 0 \qquad c_{1y} = 1 \qquad c_{1t} = ax \tag{2.194}$$

A lagrangeana é

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{2.195}$$

Com isso, de (2.195), temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{2.196a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \tag{2.196b}$$

Então, usando (2.194) e (2.196a) em (2.130), obtemos, para $i = 1$,

$$0 - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \lambda_1 \times 0 = 0$$

ou

$$m\ddot{x} = 0 \tag{2.197}$$

A solução de (2.197) é imediata e vale

$$x = x_0 + v_0 t \tag{2.198}$$

onde x_0 e v_0 são constantes. Usando agora (2.194) e (2.196b) em (2.130), com $i = 2$, achamos

$$0 - \frac{d}{dt}(m\dot{y}) + \lambda_1 = 0$$

ou

$$m\ddot{y} = -\lambda_1 \tag{2.199}$$

Agora, substituímos (2.198) em (2.193), ou seja,

$$\dot{y} + a(x_0 + v_0 t) = 0$$

ou

$$\dot{y} = -ax_0 - av_0 t \tag{2.200}$$

Integrando (2.200), chegamos a

$$y = y_0 - ax_0 t - \frac{av_0}{2}t^2 \tag{2.201}$$

onde y_0 é uma constante. Usando (2.200) em (2.199), encontramos

$$m\ddot{y} = -mav_0 = -\lambda_1$$

de modo que

$$\lambda_1 = mav_0 \tag{2.202}$$

Com isso, podemos obter as forças generalizadas a partir de (2.132), usando (2.194) e (2.202),

$$\mathcal{Q}_x = \lambda_1 c_{1x} = mav_0 \times 0 = 0 \tag{2.203a}$$
$$\mathcal{Q}_y = \lambda_1 c_{12} = mav_0 \times 1 = mav_0 \tag{2.203b}$$

Nesse caso, podemos obter inclusive a força de vínculo, já que, como temos um problema bidimensional, a força de vínculo pode ser escrita como

$$\vec{\mathcal{F}} = F_x\,\hat{\mathbf{\imath}} + F_y\,\hat{\mathbf{\jmath}} \tag{2.204}$$

Como a posição é dada por

$$\vec{r} = x\,\hat{\mathbf{\imath}} + y\,\hat{\mathbf{\jmath}} \tag{2.205}$$

e $q_1 = x$ e $q_2 = y$, temos, de (2.205),

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \hat{\mathbf{\imath}} \qquad\qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \hat{\mathbf{\jmath}} \tag{2.206}$$

Então, de (**??**), (2.204) e (2.206), obtemos, para a coordenada x,

$$\mathcal{Q}_x = (F_x\,\hat{\mathbf{\imath}} + F_y\,\hat{\mathbf{\jmath}}) \cdot \hat{\mathbf{\imath}} = F_x$$

ou

$$F_x = 0 \tag{2.207}$$

Para a coordenada y, temos

$$\mathcal{Q}_y = (F_x\,\hat{\mathbf{\imath}} + F_y\,\hat{\mathbf{\jmath}}) \cdot \hat{\mathbf{\jmath}} = F_y$$

ou

$$F_y = mav_0 \tag{2.208}$$

Portanto, a força de vínculo, usando (2.207) e (2.208) em (2.204), fica

$$\vec{\mathcal{F}} = mav_0\,\hat{\mathbf{\jmath}} \tag{2.209}$$

Nesse caso, o problema, apesar de envolver um vínculo não holonômico, foi completamente resolvido.

■

Exemplo 2.10. *Investigue o problema do pêndulo simples apresentado na figura* **??** *usando as coordenadas x e y da figura, e obtenha as EDMs e a força de vínculo.*

Note que, neste caso, o vínculo é do tipo holonômico. A equação de vínculo que relaciona as coordenadas x e y pode ser escrita na forma (**??**),

$$x^2 + y^2 = l^2$$

Entretanto, na forma

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - l = 0 \tag{2.210}$$

ela será mais útil. Esta forma é do tipo dado em (2.215). Com isso, como o vínculo é holonômico, podemos usar (2.117) para achar os coeficientes $c_{\ell k}$ e $c_{\ell t}$. Com $\ell = 1$, pois há um vínculo apenas, temos

$$c_{1x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{l} \tag{2.211a}$$

$$c_{1y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{l} \tag{2.211b}$$

$$c_{1t} = \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{2.211c}$$

A lagrangeana nas coordenadas x e y fica

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \tag{2.212}$$

Com isso, vamos precisar de

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{2.213a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = mg \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \tag{2.213b}$$

Para $i = 1$ em (2.130), obtemos, usando (2.211) e (2.213a),

$$0 - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \lambda_1 \frac{x}{l} = 0$$

ou

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \frac{x}{l} \tag{2.214}$$

Para $i = 2$, de (2.211) e (2.213b) em (2.130), temos

$$mg - \frac{d}{dt}(m\dot{y}) + \lambda_1 \frac{y}{l} = 0$$

ou

$$m\ddot{y} = mg + \lambda_1 \frac{y}{l} \tag{2.215}$$

Agora, notamos que, fazendo uma análise newtoniana do problema, há duas forças que agem sobre o objeto de massa m. Temos o peso do objeto, representado por

$$\vec{F}_P = mg\,\hat{\mathbf{j}} \tag{2.216}$$

e temos a tração exercida pela barra que suspende o objeto, dada por

$$\vec{F}_T = F_{Tx}\,\hat{\mathbf{i}} + F_{Ty}\,\hat{\mathbf{j}} \tag{2.217}$$

onde escrevemos $\vec{F}_T$ em retangulares. Note que, de acordo com os eixos da figura **??**, temos

$$F_{Tx} = -F_T \operatorname{sen}\theta \qquad\qquad F_{Ty} = -F_T \cos\theta \tag{2.218}$$

onde $F_T = |\vec{F}_T|$. Então, de (2.218) em (2.217), temos

$$\vec{F}_T = -F_T \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{i}} - F_T \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}} \tag{2.219}$$

Também da figura temos

$$x = l \operatorname{sen}\theta \qquad\qquad y = l\cos\theta \tag{2.220}$$

Logo, usando (2.220), podemos escrever (2.219) como

$$\vec{F}_T = -F_T \frac{x}{l}\,\hat{\mathbf{i}} - F_T \frac{y}{l}\,\hat{\mathbf{j}} \tag{2.221}$$

Com isso, a força resultante sobre o objeto, de (2.216) e (2.221), fica

$$\vec{F} = \vec{F}_P + \vec{F}_T = -F_T \frac{x}{l}\,\hat{\mathbf{i}} + \left(mg - F_T \frac{y}{l}\right)\hat{\mathbf{j}} \tag{2.222}$$

Portanto, comparando (2.222) com as EDMs dadas em (2.214) e (2.215), e recordando a segunda lei de Newton, vemos que

$$-F_T = \lambda_1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = -F_T \tag{2.223}$$

Com isso, identificamos o multiplicador de Lagrange com o negativo do módulo da força de tração, que é a força de vínculo nesse caso, e é dada por (2.219) ou (2.221). Note que as EDMs não podem ser resolvidas de forma exata, conforme já estudamos anteriormente.

■

Exemplo 2.11. *Um disco de raio a e massa m distribuída de forma homogênea pelo seu volume está colocado sobre um plano inclinado de ângulo de inclinação α, conforme mostra a figura 2.5. O disco rola sem deslizar sobre o plano inclinado, e o ângulo de giro, com relação a uma dada posição de referência, vale θ. O disco estava inicialmente em repouso no topo do plano inclinado, que tem um comprimento total l. A posição do centro de massa do disco é representada pela coordenada x definida na figura 2.5. Determine as EDM usando as coordenadas x e θ, além das forças generalizadas de vínculo.*

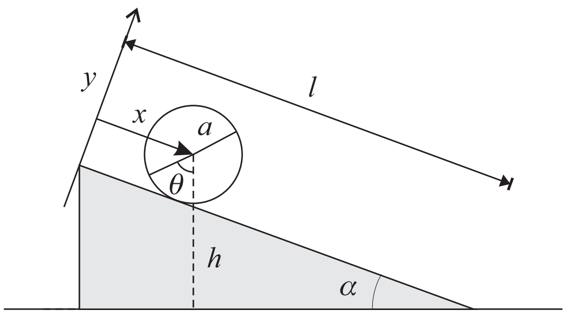

Figura 2.5: Um disco homogêneo colocado sobre um plano inclinado.

Iniciamos escrevendo a equação de vínculo para o problema, relacionando as coordenadas x e θ, ou seja, temos que o deslocamento do centro de massa em x está ligado ao comprimento do arco descrito pela variação do ângulo θ, de modo que

$$dx = a\,d\theta$$

ou

$$dx - a\,d\theta = 0 \tag{2.224}$$

Derivando em relação ao tempo, podemos escrever (2.224) como

$$\dot{x} - a\dot{\theta} = 0 \tag{2.225}$$

O vínculo escrito em (2.224) está na forma (2.118), e escrito como (2.225) aparece na forma (2.119). Note que é um vínculo holonômico. Os coeficientes ficam

$$c_{1x} = 1 \qquad c_{1\theta} = -a \qquad c_{1t} = 0 \tag{2.226}$$

A energia potencial é dada por

$$U = mgh = mg(l - x)\,\mathrm{sen}\,\alpha \tag{2.227}$$

e a energia cinética é dada pela energia cinética de translação do centro de massa somada à energia cinética de rotação em torno do centro de massa, ou seja,

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{\mathcal{I}\dot{\theta}^2}{2} \tag{2.228}$$

onde $\mathcal{I}$ é o momento de inércia do disco em relação ao eixo que passa no centro de massa. Neste caso, ele vale

$$\mathcal{I} = \frac{ma^2}{2} \tag{2.229}$$

Logo, usando (2.229) em (2.228), achamos

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{ma^2\dot{\theta}^2}{4} \tag{2.230}$$

De (2.227) e (2.230), temos

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{ma^2\dot{\theta}^2}{4} - mg(l - x)\operatorname{sen}\alpha \tag{2.231}$$

Vamos precisar de

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = mg\operatorname{sen}\alpha \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{2.232a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{ma^2\dot{\theta}}{2} \tag{2.232b}$$

Com isso, substituindo (2.226) e (2.232) em (2.130), achamos, para $q_1 = x$,

$$mg\operatorname{sen}\alpha - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \lambda_1 = 0$$

ou

$$m\ddot{x} - mg\operatorname{sen}\alpha = \lambda_1 \tag{2.233}$$

Para $q_2 = \theta$, obtemos

$$0 - \frac{d}{dt}\left(\frac{ma^2\dot{\theta}}{2}\right) + \lambda_1(-a) = 0$$

ou

$$\frac{ma\ddot{\theta}}{2} = -\lambda_1 \tag{2.234}$$

De (2.225), achamos, derivando novamente em relação ao tempo,

$$\ddot{x} = a\ddot{\theta} \tag{2.235}$$

Agora, substituímos (2.235) em (2.234), achando

$$\frac{ma}{2}\frac{\ddot{x}}{a} = -\lambda_1$$

ou

$$\lambda_1 = -\frac{m\ddot{x}}{2} \tag{2.236}$$

Agora, substituímos (2.236) em (2.233), obtendo

$$m\ddot{x} - mg \operatorname{sen} \alpha = -\frac{m\ddot{x}}{2}$$

ou

$$\ddot{x} = \frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{3} \tag{2.237}$$

De (2.237) em (2.236), ficamos com

$$\lambda_1 = -\frac{m}{2}\frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{3} = -\frac{mg \operatorname{sen} \alpha}{3} \tag{2.238}$$

Portanto, de (2.238) em (2.234), temos

$$\frac{ma\ddot{\theta}}{2} = \frac{mg \operatorname{sen} \alpha}{3}$$

ou

$$\ddot{\theta} = \frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{3a} \tag{2.239}$$

Note que, de $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, temos

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} \tag{2.240}$$

Usando (2.237) em (2.240), achamos

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{3} \tag{2.241}$$

De (2.241), podemos achar a velocidade do centro de massa no final do plano inclinado, mediante

$$\int_0^v \dot{x}\, d\dot{x} = \int_0^l \frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{3}\, dx$$

ou

$$\frac{v^2}{2} = \frac{2lg \operatorname{sen} \alpha}{3}$$

de modo que

$$v = \sqrt{\frac{4lg \operatorname{sen} \alpha}{3}} \tag{2.242}$$

As forças generalizadas, de (2.226) e (2.238) em (2.132), ficam

$$\mathcal{Q}_x = \lambda_1 c_{1x} = -\frac{mg \operatorname{sen} \alpha}{3} \tag{2.243a}$$

$$\mathcal{Q}_\theta = \lambda_1 c_{1\theta} = \frac{mga \operatorname{sen} \alpha}{3} \tag{2.243b}$$

As forças generalizadas em (2.243) correspondem, respectivamente, à força de atrito estático responsável pelo giro do disco, e ao torque causado por essa força em relação ao centro de massa do disco (verificação à cargo do leitor).

■

Exemplo 2.12. *Um objeto em forma de barra se move no plano xy (horizontal), de modo que a velocidade do centro de massa está no plano xy e é sempre perpendicular ao objeto. O objeto tem um momento de inércia $\mathcal{I}_{CM}$ em relação a um eixo que passa pelo centro de massa e é perpendicular ao plano xy. A figura 2.6 apresenta a situação.*

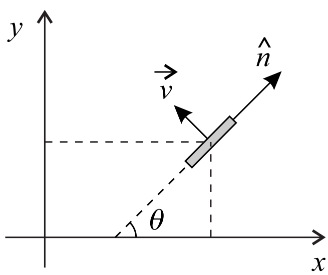

Figura 2.6: Um objeto em forma de barra que se move no plano xy de modo que sua velocidade é sempre perpendicular ao objeto.

Determine as EDM e as forças generalizadas agindo sobre o objeto.

Para esse problema as coordenadas generalizadas que usaremos serão as coordenadas x e y do centro de massa e o ângulo θ que o versor $\hat{n}$, que é paralelo ao objeto, faz com o sentido positivo do eixo x. A velocidade do objeto é dada, em retangulares, por

$$\vec{v} = \dot{x}\,\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\,\hat{\mathbf{j}} \tag{2.244}$$

e o versor $\hat{n}$ pode ser escrito como

$$\hat{n} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{j}} \tag{2.245}$$

Então, a ortogonalidade entre $\vec{v}$ e $\hat{n}$ pode ser descrita por

$$\vec{v} \cdot \hat{n} = 0$$

ou, usando (2.244) e (2.245),

$$\vec{v} \cdot \hat{n} = (\dot{x}\,\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\,\hat{\mathbf{j}}) \cdot (\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{j}}) = 0$$

ou

$$\cos\theta\,\dot{x} + \operatorname{sen}\theta\,\dot{y} = 0 \tag{2.246}$$

que é a equação de vínculo nesse caso, sendo que temos um vínculo não holonômico, escrito na forma (2.119). Com isso, temos os coeficientes

$$c_{1x} = \cos\theta \qquad c_{1y} = \operatorname{sen}\theta \qquad c_{1\theta} = 0 \qquad c_{1t} = 0 \tag{2.247}$$

A lagrangeana é dada apenas pela energia cinética, que, por sua vez, é dada pela soma da energia cinética de translação com a de rotação, ou seja,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\mathcal{I}_{CM}\dot{\theta}^2}{2} \tag{2.248}$$

Vamos precisar de

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x} \tag{2.249a}$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} = m\dot{y} \tag{2.249b}$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \mathcal{I}_{CM}\dot{\theta} \tag{2.249c}$$

Agora, usamos (2.247) e (2.249) em (2.130) para obter as EDM. Quando $q_1 = x$, temos

$$0 - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \lambda_1\cos\theta = 0$$

ou

$$m\ddot{x} = \lambda_1\cos\theta \tag{2.250}$$

Para $q_2 = y$, achamos

$$0 - \frac{d}{dt}(m\dot{y}) + \lambda_1\operatorname{sen}\theta = 0$$

ou

$$m\ddot{y} = \lambda_1\operatorname{sen}\theta \tag{2.251}$$

Por fim, para $q_3 = \theta$, ficamos com

$$0 - \frac{d}{dt}(\mathcal{I}_{CM}\dot{\theta}) + \lambda_1 \times 0 = 0$$

ou

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{I}_{CM}\dot{\theta}) = 0$$

o que resulta, como $\mathcal{I}_{CM}$ é constante, em

$$\dot{\theta} = \Omega \tag{2.252}$$

onde Ω é uma constante. Integrando (2.252), chega-se a

$$\theta(t) = \theta_0 + \Omega t \tag{2.253}$$

onde θ_0 é uma outra constante. Agora, multiplicamos (2.250) por $\operatorname{sen}\theta$ e (2.251) por $\cos\theta$, obtendo

$$m\ddot{x}\operatorname{sen}\theta = \lambda_1 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \tag{2.254a}$$

$$m\ddot{y}\cos\theta = \lambda_1 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \tag{2.254b}$$

Subtraindo (2.254b) de (2.254a), achamos

$$m\ddot{x}\operatorname{sen}\theta - m\ddot{y}\cos\theta = 0$$

ou

$$\ddot{x}\operatorname{sen}\theta = \ddot{y}\cos\theta \tag{2.255}$$

Continuando, de (2.246), temos

$$\cos\theta\,\dot{x} = -\operatorname{sen}\theta\,\dot{y}$$

ou

$$\dot{x} = -\operatorname{tg}\theta\,\dot{y} \tag{2.256}$$

Derivando (2.256) em relação ao tempo, temos

$$\ddot{x} = -\operatorname{tg}\theta\,\ddot{y} - \sec^2\theta\,\dot{\theta}\dot{y} \tag{2.257}$$

Agora, substituímos (2.257) em (2.255), ou seja,

$$(-\operatorname{tg}\theta\,\ddot{y} - \sec^2\theta\,\dot{\theta}\dot{y})\operatorname{sen}\theta = \ddot{y}\cos\theta$$

ou

$$\ddot{y}\cos\theta = -\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}\,\ddot{y} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\,\dot{\theta}\dot{y}$$

ou, ainda,

$$\ddot{y}\frac{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\,\dot{\theta}\dot{y} = 0$$

de modo que

$$\frac{\ddot{y}}{\cos\theta} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\,\dot{\theta}\dot{y} = 0 \tag{2.258}$$

Mas,

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\dot{y}}{\cos\theta}\Big) = \frac{\ddot{y}}{\cos\theta} + \frac{\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}\dot{y}}{\cos^2\theta} \tag{2.259}$$

Logo, usando (2.259) em (2.258), obtemos

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\dot{y}}{\cos\theta}\Big) = 0 \tag{2.260}$$

o que resulta em

$$\frac{\dot{y}}{\cos\theta} = \alpha \tag{2.261}$$

onde α é uma constante. Usando (2.253) em (2.261), ficamos com

$$\dot{y} = \alpha\cos\theta = \alpha\cos(\theta_0 + \Omega t) \tag{2.262}$$

Integrando (2.262), achamos

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t \alpha\cos(\theta_0 + \Omega t)\,dt$$

ou

$$y - y_0 = \frac{\alpha}{\Omega}\big[\operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t)\big]_0^t$$

de modo que

$$y(t) = y_0 - \frac{\alpha\operatorname{sen}\theta_0}{\Omega} + \frac{\alpha}{\Omega}\operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t) \tag{2.263}$$

onde y_0 é uma constante. Continuando, substituímos (2.262) em (2.256), encontrando

$$\dot{x} = -\operatorname{tg}\theta\alpha\cos(\theta_0 + \Omega t) = -\alpha\operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t) \tag{2.264}$$

Integrando (2.264), achamos

$$\int_{x_0}^{x} dx = -\int_{0}^{t} \alpha \operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t)\, dt$$

ou

$$x - x_0 = \frac{\alpha}{\Omega}\big[\cos(\theta_0 + \Omega t)\big]_0^t$$

que fica

$$x = x_0 - \frac{\alpha \cos\theta_0}{\Omega} + \frac{\alpha}{\Omega}\cos(\theta_0 + \Omega t) \tag{2.265}$$

onde x_0 é uma outra constante. Note que, de (2.264), temos, derivando em relação ao tempo,

$$\ddot{x} = -\alpha\Omega\cos(\theta_0 + \Omega t) = -\alpha\Omega\cos\theta \tag{2.266}$$

Agora, substituindo (2.266) em (2.250), achamos

$$-m\alpha\Omega\cos\theta = \lambda_1 \cos\theta$$

ou

$$\lambda_1 = -m\alpha\Omega \tag{2.267}$$

Com isso, podemos achar as forças generalizadas a partir de (2.132), (2.247) e (2.267), de modo que

$$\mathcal{Q}_x = \lambda_1 c_{1x} = -m\alpha\Omega\cos(\theta_0 + \Omega t) \tag{2.268a}$$
$$\mathcal{Q}_y = \lambda_1 c_{1y} = -m\alpha\Omega\operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t) \tag{2.268b}$$
$$\mathcal{Q}_\theta = \lambda_1 c_{1\theta} = 0 \tag{2.268c}$$

o que completa o problema.

■

Exemplo 2.13. *Um disco de raio R e massa m distribuída de forma homogênea sobre a sua superfície (similar ao apresentado na figura* **??***) é colocado sobre um plano inclinado de inclinação γ e rola sem deslizar sobre a superfície do plano. O plano do disco é sempre perpendicular ao plano inclinado, de modo que o disco não tomba. O plano inclinado tem uma extensão l. Para representar o giro do disco em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa e é perpendicular ao plano do mesmo usamos uma coordenada angular α, medida a partir de algum ponto de referência no disco. A velocidade do centro de massa é paralela ao plano do disco, e ambos fazem um ângulo θ com o sentido positivo do eixo x. Outras duas coordenadas são as coordenadas x e y do centro de massa do disco. Além de girar em torno do eixo perpendicular ao seu plano, o disco também pode girar em torno de um eixo que passa pelo centro de massa e é paralelo a um diâmetro do mesmo e perpendicular*

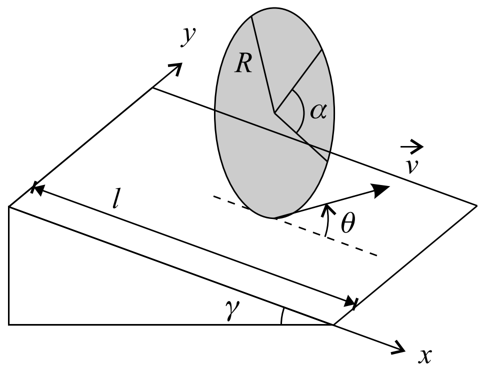

Figura 2.7: Um disco que rola sem deslizar nem tombar sobre um plano inclinado.

ao plano inclinado, variando, portanto, o ângulo θ. A figura 2.7 apresenta as grandezas relevantes ao problema.

Escreva a lagrangeana do sistema, obtenha as EDM e ache as forças generalizadas de vínculo.

Primeiro, temos que escrever as expressões para as energias cinética e potencial do sistema. A energia cinética do disco é dada pela soma da energia cinética de translação do centro de massa com a energia cinética de rotação. A energia cinétida de translação pode ser escrita como

$$T_t = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{2.269}$$

A energia cinética de rotação envolve dois termos, pois há duas rotações. A primeira, em torno do eixo perpendicular ao disco, ligada à variação do ângulo α, de modo que essa contribuição vale

$$T_\alpha = \frac{\mathcal{I}_1 \dot{\alpha}^2}{2} \tag{2.270}$$

onde $\mathcal{I}_1$ é o momento de inércia em torno do eixo perpendicular ao plano do disco, que vale

$$\mathcal{I}_1 = \frac{mR^2}{2} \tag{2.271}$$

Então, de (2.271), achamos para (2.270),

$$T_\alpha = \frac{mR^2 \dot{\alpha}^2}{4} \tag{2.272}$$

O outro termo envolve uma rotação em torno de um eixo que é paralelo ao disco, passa no centro de massa e é perpendicular ao plano inclinado, estando ligada, portanto, à variação do ângulo θ. Nesse caso, temos

$$T_\theta = \frac{\mathcal{I}_2 \dot{\theta}^2}{2} \tag{2.273}$$

onde $\mathcal{I}_2$ é o momento de inércia do disco em relação ao eixo que passa no centro de massa e é paralelo ao disco e perpendicular ao plano inclinado. Para determiná-lo, usamos o teorema dos eixos perpendiculares. Note que, dada a simetria do disco, o momento de inércia em relação a um eixo paralelo ao disco, que passa pelo centro de massa do mesmo e é paralelo ao plano é igual ao que queremos determinar. Vamos representar esse momento de inércia por $\mathcal{I}_3$. Assim, temos

$$\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_3 \tag{2.274}$$

Agora, temos três eixos mutuamente perpendiculares entre si, associados com os momentos de inércia $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ e $\mathcal{I}_3$, de modo que, de acordo com o teorema de eixos perpendiculares, ocorre

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 \tag{2.275}$$

Usando (2.271) e (2.274) em (2.275), temos

$$\frac{mR^2}{2} = 2\mathcal{I}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{I}_2 = \frac{mR^2}{4} \tag{2.276}$$

Então, usando (2.276) em (2.273), achamos

$$T_\theta = \frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{8} \tag{2.277}$$

Portanto, reunindo (2.269), (2.272) e (2.277), obtemos

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{mR^2 \dot{\alpha}^2}{4} + \frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{8} \tag{2.278}$$

Para a energia potencial, temos que, com os eixos definidos como na figura 2.7, e colocando o ponto de referência na origem dos eixos, considerando $U(x = 0) = 0$, ela vale

$$U = -mgx \operatorname{sen} \gamma \tag{2.279}$$

Então, de (2.278) e (2.279), achamos

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{mR^2 \dot{\alpha}^2}{4} + \frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{8} + mgx \operatorname{sen} \gamma \tag{2.280}$$

Agora, da figura 2.7, temos

$$\dot{x} = v \operatorname{sen} \theta \tag{2.281a}$$
$$\dot{y} = v \cos \theta \tag{2.281b}$$

Além disso, temos a relação

$$v = R\dot{\alpha} \tag{2.282}$$

de modo que, usando (2.281) e (2.282), os vínculos ficam descritos por

$$\dot{x} - R\dot{\alpha}\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{2.283a}$$
$$\dot{y} - R\dot{\alpha}\cos\theta = 0 \tag{2.283b}$$

Temos, portanto, duas equações de vínculo na forma (2.119), que representam vínculos não holonômicos, e precisaremos de dois multiplicadores de Lagrange. Os coeficientes são

$$c_{1x} = 1 \qquad c_{1y} = 0 \qquad c_{1\theta} = 0 \qquad c_{1\alpha} = -R\operatorname{sen}\theta \qquad c_{1t} = 0 \tag{2.284a}$$
$$c_{2x} = 0 \qquad c_{2y} = 1 \qquad c_{2\theta} = 0 \qquad c_{2\alpha} = -R\cos\theta \qquad c_{2t} = 0 \tag{2.284b}$$

Vamos precisar também de

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = mg\operatorname{sen}\gamma \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x} \tag{2.285a}$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} = m\dot{y} \tag{2.285b}$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{mR^2}{4}\dot{\theta} \tag{2.285c}$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha} = 0 \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\alpha}} = \frac{mR^2}{2}\dot{\alpha} \tag{2.285d}$$

Agora, podemos obter as EDM por meio de (2.130), usando (2.284) e (2.285). Começamos com $q_1 = x$, ou seja,

$$mg\operatorname{sen}\gamma - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \lambda_1 \times 1 + \lambda_2 \times 0 = 0$$

ou

$$m\ddot{x} - mg\operatorname{sen}\gamma = \lambda_1 \tag{2.286}$$

Para $q_2 = y$, achamos

$$0 - \frac{d}{dt}(m\dot{y}) + \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 1 = 0$$

ou

$$m\ddot{y} = \lambda_2 \tag{2.287}$$

Para $q_3 = \theta$, obtemos

$$0 - \frac{d}{dt}\left(\frac{mR^2}{4}\dot{\theta}\right) + \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 0 = 0$$

ou

$$\frac{mR^2}{4}\ddot{\theta} = 0$$

ou, ainda,

$$\ddot{\theta} = 0 \tag{2.288}$$

Por fim, para $q_4 = \alpha$, achamos

$$0 - \frac{d}{dt}\Big(\frac{mR^2}{2}\dot{\alpha}\Big) - \lambda_1 R \operatorname{sen}\theta - \lambda_2 R\cos\theta = 0$$

ou

$$\frac{mR}{2}\ddot{\alpha} = -\lambda_1 \operatorname{sen}\theta - \lambda_2\cos\theta \tag{2.289}$$

De (2.288), temos, integrando diretamente,

$$\dot{\theta} = \Omega \tag{2.290}$$

onde Ω é uma constante. Integrando novamente, achamos

$$\theta(t) = \theta_0 + \Omega t \tag{2.291}$$

onde θ_0 é uma constante. Em seguida, derivamos novamente (2.283b) em relação ao tempo, obtendo

$$\ddot{y} = R\ddot{\alpha}\cos\theta - R\dot{\alpha}\operatorname{sen}\theta\dot{\theta}$$

ou, usando (2.290),

$$\ddot{y} = R\ddot{\alpha}\cos\theta - R\Omega\dot{\alpha}\operatorname{sen}\theta \tag{2.292}$$

Então, usando (2.292) em (2.287), achamos

$$\lambda_2 = mR\ddot{\alpha}\cos\theta - mR\Omega\dot{\alpha}\operatorname{sen}\theta \tag{2.293}$$

Agora, derivamos (2.283a) em relação ao tempo, encontrando

$$\ddot{x} = R\ddot{\alpha}\operatorname{sen}\theta + R\dot{\alpha}\cos\theta\dot{\theta} \tag{2.294}$$

Substituindo (2.290) em (2.294), obtemos

$$\ddot{x} = R\ddot{\alpha}\operatorname{sen}\theta + R\Omega\dot{\alpha}\cos\theta \tag{2.295}$$

Agora, usamos (2.295) em (2.286), achando

$$\lambda_1 = mR\ddot{\alpha}\operatorname{sen}\theta + mR\Omega\dot{\alpha}\cos\theta - mg\operatorname{sen}\gamma \tag{2.296}$$

Continuando, substituímos (2.293) e (2.296) em (2.289), que fica

$$\frac{mR}{2}\ddot{\alpha} = -(mR\ddot{\alpha}\operatorname{sen}\theta + mR\Omega\dot{\alpha}\cos\theta - mg\operatorname{sen}\gamma)\operatorname{sen}\theta \\ - (mR\ddot{\alpha}\cos\theta - mR\Omega\dot{\alpha}\operatorname{sen}\theta)\cos\theta$$

ou

$$\frac{R}{2}\ddot{\alpha} = -R\ddot{\alpha}\operatorname{sen}^2\theta - R\Omega\dot{\alpha}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + g\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\theta - R\ddot{\alpha}\cos^2\theta + R\Omega\dot{\alpha}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

que fica

$$\frac{R}{2}\ddot{\alpha} = -R\ddot{\alpha} = g\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\theta$$

ou

$$\ddot{\alpha} = \frac{2g\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\theta}{3R} \tag{2.297}$$

Usando (2.291) em (2.297), achamos

$$\ddot{\alpha} = \frac{2g\operatorname{sen}\gamma}{3R}\operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t) \tag{2.298}$$

Integrando (2.298), obtemos

$$\int_{\dot{\alpha}_0}^{\dot{\alpha}} \frac{d\dot{\alpha}}{dt}\,dt = \int_0^t \frac{2g\operatorname{sen}\gamma}{3R}\operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t)\,dt$$

ou, chamando $\omega = \dot{\alpha}_0$, onde ω é uma constante,

$$\dot{\alpha} - \omega = -\frac{2g\operatorname{sen}\gamma}{3R\Omega}[\cos(\theta_0 + \Omega t)]_0^t$$

ou

$$\dot{\alpha} = \omega + \frac{2g\operatorname{sen}\gamma\cos\theta_0}{3R\Omega} - \frac{2g\operatorname{sen}\gamma}{3R\Omega}\cos(\theta_0 + \Omega t) \tag{2.299}$$

Continuando, integramos novamente (2.299), obtendo

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{dt}\,dt = \int_0^t \left[\omega + \frac{2g\operatorname{sen}\gamma\cos\theta_0}{3R\Omega} - \frac{2g\operatorname{sen}\gamma}{3R\Omega}\cos(\theta_0 + \Omega t)\right]dt$$

ou

$$\alpha - \alpha_0 = \left(\omega + \frac{2g\operatorname{sen}\gamma\cos\theta_0}{3R\Omega}\right)t - \frac{2g\operatorname{sen}\gamma}{3R\Omega^2}\Big[\operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t)\Big]_0^t$$

de modo que

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\theta_0}{3R\Omega^2} + \Big(\omega + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3R\Omega}\Big)t - \frac{2g \operatorname{sen}\gamma}{3R\Omega^2} \operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t) \tag{2.300}$$

onde α_0 é uma constante. Continuando, substituímos (2.291) e (2.299) em (2.283a), obtendo

$$\dot{x} = R\Big[\omega + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3R\Omega} - \frac{2g \operatorname{sen}\gamma}{3R\Omega}\cos(\theta_0 + \Omega t)\Big] \operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t)$$

ou

$$\dot{x} = \Big(R\omega + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3\Omega}\Big) \operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t) - \frac{2g \operatorname{sen}\gamma}{3\Omega} \operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t)\cos(\theta_0 + \Omega t) \tag{2.301}$$

Integrando (2.301), ficamos com

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{dt}\, dt = \int_0^t \Big[\Big(R\omega + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3\Omega}\Big) \operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t) - \frac{2g \operatorname{sen}\gamma}{3\Omega} \operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t)\cos(\theta_0 + \Omega t)\Big]\, dt$$

ou

$$x - x_0 = -\frac{1}{\Omega}\Big(R\omega + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3\Omega}\Big)\big[\cos(\theta_0 + \Omega t)\big]_0^t - \frac{1}{2}\frac{2g \operatorname{sen}\gamma}{3\Omega^2}\big[\operatorname{sen}^2(\theta_0 + \Omega t)\big]_0^t$$

que fica

$$x = x_0 + \Big(\frac{R\omega}{\Omega} + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3\Omega^2}\Big)\cos\theta_0 - \Big(\frac{R\omega}{\Omega} + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3\Omega^2}\Big)\cos(\theta_0 + \Omega t) + \frac{g \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}^2\theta_0}{3\Omega^2} - \frac{g \operatorname{sen}\gamma}{3\Omega^2}\operatorname{sen}^2(\theta_0 + \Omega t)$$

ou

$$x = x_0 + \Big(\frac{R\omega}{\Omega} + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3\Omega^2}\Big)\cos\theta_0 + \frac{g \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}^2\theta_0}{3\Omega^2} - \Big(\frac{R\omega}{\Omega} + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3\Omega^2}\Big)\cos(\theta_0 + \Omega t) - \frac{g \operatorname{sen}\gamma}{3\Omega^2}\operatorname{sen}^2(\theta_0 + \Omega t) \tag{2.302}$$

onde x_0 é uma constante. Por fim, usando (2.291) e (2.299) em (2.283b), ficamos com

$$\dot{y} = R\Big[\omega + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3R\Omega} - \frac{2g \operatorname{sen}\gamma}{3R\Omega}\cos(\theta_0 + \Omega t)\Big]\cos(\theta_0 + \Omega t)$$

ou

$$\dot{y} = \Big(R\omega + \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\theta_0}{3\Omega}\Big)\cos(\theta_0+\Omega t) - \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\gamma}{3R\Omega}\cos^2(\theta_0+\Omega t) \tag{2.303}$$

Integrando (2.303), achamos

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{dt}\,dt = \int_0^t\Big[\Big(R\omega + \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\theta_0}{3\Omega}\Big)\cos(\theta_0+\Omega t) - \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\gamma}{3R\Omega}\cos^2(\theta_0+\Omega t)\Big]\,dt$$

ou

$$y - y_0 = \frac{1}{\Omega}\Big(R\omega + \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\theta_0}{3\Omega}\Big)\big[\mathrm{sen}(\theta_0+\Omega t)\big]_0^t - \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\gamma}{3R\Omega}\int_0^t\cos^2(\theta_0+\Omega t)\,dt \tag{2.304}$$

onde y_0 é uma constante. Para continuar, fazemos a substituição

$$\cos^2\beta = \frac{1+2\cos(2\beta)}{2}$$

de modo que (2.304) fica

$$\begin{aligned} y = y_0 &- \Big(\frac{R\omega}{\Omega} + \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\theta_0}{3\Omega^2}\Big)\mathrm{sen}\,\theta_0 + \Big(\frac{R\omega}{\Omega} + \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\theta_0}{3\Omega^2}\Big)\mathrm{sen}(\theta_0+\Omega t)\\ &- \frac{1}{2}\frac{2g\,\mathrm{sen}\,\gamma}{3R\Omega}\int_0^t\big\{1+\cos[2(\theta_0+\Omega t)]\big\}\,dt \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} y = y_0 &- \Big(\frac{R\omega}{\Omega} + \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\theta_0}{3\Omega^2}\Big)\mathrm{sen}\,\theta_0 + \Big(\frac{R\omega}{\Omega} + \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\theta_0}{3\Omega^2}\Big)\mathrm{sen}(\theta_0+\Omega t)\\ &- \frac{g\,\mathrm{sen}\,\gamma}{3R\Omega}\Big\{t + \frac{1}{2\Omega}\big\{\mathrm{sen}[2(\theta_0+\Omega t)]\big\}_0^t\Big\} \end{aligned}$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned} y = y_0 &- \Big(\frac{R\omega}{\Omega} + \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\theta_0}{3\Omega^2}\Big)\mathrm{sen}\,\theta_0 - \frac{g\,\mathrm{sen}\,\gamma}{3R\Omega}t\\ &+ \Big(\frac{R\omega}{\Omega} + \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\theta_0}{3\Omega^2}\Big)\mathrm{sen}(\theta_0+\Omega t) - \frac{g\,\mathrm{sen}\,\gamma}{6R\Omega^2}\big\{\mathrm{sen}[2(\theta_0+\Omega t)] - \mathrm{sen}(2\theta_0)\big\} \end{aligned}$$

de modo que chegamos finalmente a

$$\begin{aligned} y = y_0 &- \Big(\frac{R\omega}{\Omega} + \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\theta_0}{3\Omega^2}\Big)\mathrm{sen}\,\theta_0 + \frac{g\,\mathrm{sen}\,\gamma\,\mathrm{sen}(2\theta_0)}{6R\Omega^2} - \frac{g\,\mathrm{sen}\,\gamma}{3R\Omega}t\\ &+ \Big(\frac{R\omega}{\Omega} + \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\theta_0}{3\Omega^2}\Big)\mathrm{sen}(\theta_0+\Omega t) - \frac{g\,\mathrm{sen}\,\gamma}{6R\Omega^2}\,\mathrm{sen}[2(\theta_0+\Omega t)] \end{aligned} \tag{2.305}$$

Podemos agora determinar os multiplicadores de Lagrange. Iniciamos reescrevendo (2.301) como

$$\dot{x} = \Big(R\omega + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3\Omega}\Big) \operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t) - \frac{g \operatorname{sen}\gamma}{3\Omega} \operatorname{sen}[2(\theta_0 + \Omega t)] \tag{2.306}$$

Derivando (2.306), ficamos com

$$\ddot{x} = \Omega\Big(R\omega + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3\Omega}\Big) \cos(\theta_0 + \Omega t) - 2\Omega\frac{g \operatorname{sen}\gamma}{3\Omega} \cos[2(\theta_0 + \Omega t)]$$

ou

$$\ddot{x} = \Big(R\omega\Omega + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3}\Big) \cos(\theta_0 + \Omega t) - \frac{2g \operatorname{sen}\gamma}{3} \cos[2(\theta_0 + \Omega t)] \tag{2.307}$$

Agora, substituímos (2.307) em (2.286), encontrando

$$\lambda_1 = m\Big\{\Big(R\omega\Omega + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3}\Big) \cos(\theta_0 + \Omega t) - \frac{2g \operatorname{sen}\gamma}{3} \cos[2(\theta_0 + \Omega t)]\Big\} - mg \operatorname{sen}\gamma$$

ou

$$\lambda_1 = m\Big\{\Big(R\omega\Omega + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3}\Big) \cos(\theta_0 + \Omega t) - \frac{2g \operatorname{sen}\gamma}{3} \cos[2(\theta_0 + \Omega t)] - g \operatorname{sen}\gamma\Big\} \tag{2.308}$$

Derivando (2.303), temos

$$\ddot{y} = -\Omega\Big(R\omega + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3\Omega}\Big) \operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t) + 2\Omega\frac{2g \operatorname{sen}\gamma}{3R\Omega} \cos(\theta_0 + \Omega t) \operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t)$$

ou

$$\ddot{y} = -\Big(R\omega\Omega + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3}\Big) \operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t) + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma}{3R} \operatorname{sen}[2(\theta_0 + \Omega t)] \tag{2.309}$$

Agora, substituímos (2.308) em (2.287), ou seja,

$$\lambda_2 = -m\Big\{\Big(R\omega\Omega + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3}\Big) \operatorname{sen}(\theta_0 + \Omega t) - \frac{2g \operatorname{sen}\gamma}{3R} \operatorname{sen}[2(\theta_0 + \Omega t)]\Big\} \tag{2.310}$$

Com isso, podemos achar as forças generalizadas de vínculo. Quando temos $q_1 = x$, de (2.132) temos

$$\mathcal{Q}_x = \lambda_1 c_{1x} + \lambda_2 c_{2x} \tag{2.311}$$

Então, usando (2.284) e (2.308) em (2.311), obtemos

$$\mathcal{Q}_x = m\Big\{\Big(R\omega\Omega + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3}\Big)\cos(\theta_0+\Omega t) - \frac{2g\operatorname{sen}\gamma}{3}\cos[2(\theta_0+\Omega t)] - g\operatorname{sen}\gamma\Big\} \quad (2.312)$$

Quando temos $q_2 = y$, ficamos com

$$\mathcal{Q}_y = \lambda_1 c_{1y} + \lambda_2 c_{2y} \quad (2.313)$$

Substituíndo (2.284) e (2.310) em (2.313), achamos

$$\mathcal{Q}_y = -m\Big\{\Big(R\omega\Omega + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3}\Big)\operatorname{sen}(\theta_0+\Omega t) - \frac{2g\operatorname{sen}\gamma}{3R}\operatorname{sen}[2(\theta_0+\Omega t)]\Big\} \quad (2.314)$$

Quando $q_3 = \theta$, ficamos com

$$\mathcal{Q}_\theta = \lambda_1 c_{1\theta} + \lambda_2 c_{2\theta} \quad (2.315)$$

que fica, usando (2.284),

$$\mathcal{Q}_\theta = 0 \quad (2.316)$$

Por fim, quando $q_4 = \alpha$, achamos

$$\mathcal{Q}_\alpha = \lambda_1 c_{1\alpha} + \lambda_2 c_{2\alpha} \quad (2.317)$$

de modo que, usando (2.284), (2.291), (2.308) e (2.310) em (2.317), ficamos com

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_\alpha = -mR\Big\{\Big(R\omega\Omega + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3}\Big)\cos(\theta_0+\Omega t) - \frac{2g\operatorname{sen}\gamma}{3}\cos[2(\theta_0+\Omega t)]\\ - g\operatorname{sen}\gamma\Big\}\operatorname{sen}(\theta_0+\Omega t) + mR\Big\{\Big(R\omega\Omega + \frac{2g \operatorname{sen}\gamma \cos\theta_0}{3}\Big)\operatorname{sen}(\theta_0+\Omega t)\\ - \frac{2g\operatorname{sen}\gamma}{3R}\operatorname{sen}[2(\theta_0+\Omega t)]\Big\}\cos(\theta_0+\Omega t)\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_\alpha = \frac{2gmR\operatorname{sen}\gamma}{3}\Big\{\cos[2(\theta_0+\Omega t)]\operatorname{sen}(\theta_0+\Omega t) - \operatorname{sen}[2(\theta_0+\Omega t)]\cos(\theta_0+\Omega t)\Big\}\\ + mgR\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}(\theta_0+\Omega t)\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_\alpha = \frac{2gmR\operatorname{sen}\gamma}{3}\Big\{\cos[2(\theta_0+\Omega t)]\operatorname{sen}(\theta_0+\Omega t) - 2\operatorname{sen}(\theta_0+\Omega t)\cos^2(\theta_0+\Omega t)\Big\}\\ + mgR\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}(\theta_0+\Omega t)\end{aligned}$$

que fica

$$\mathcal{Q}_\alpha = \frac{2gmR\,\mathrm{sen}\,\gamma}{3}\Big\{\cos[2(\theta_0+\Omega t)] - 2\frac{1+\cos[2(\theta_0+\Omega t)]}{2}\Big\}\,\mathrm{sen}(\theta_0+\Omega t) \\ + mgR\,\mathrm{sen}\,\gamma\,\mathrm{sen}(\theta_0+\Omega t)$$

ou

$$\mathcal{Q}_\alpha = \frac{2mgR\,\mathrm{sen}\,\gamma}{3}\Big\{\cos[2(\theta_0+\Omega t)] - 1 - \cos[2(\theta_0+\Omega t)]\Big\}\,\mathrm{sen}(\theta_0+\Omega t) \\ + mgR\,\mathrm{sen}\,\gamma\,\mathrm{sen}(\theta_0+\Omega t)$$

ou, ainda,

$$\mathcal{Q}_\alpha = \frac{mgR\,\mathrm{sen}\,\gamma}{3}\,\mathrm{sen}(\theta_0+\Omega t) \tag{2.318}$$

Com isso, obtivemos todas as forças generalizadas associadas ao problema.

■

Exemplo 2.14. *Obtenha a equação correspondente à* (**??**),

$$\frac{d\mathfrak{h}}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

quando há vínculos como os descritos pela equação (2.119).

Para obter a equação pedida, partimos de (**??**),

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot q_j}\frac{d\dot q_j}{dt}$$

e usamos (2.130) para escrever

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot q_j}\Big) - \sum_\ell \lambda_\ell c_{\ell j}\,, \qquad j = 1,\ldots,n \tag{2.319}$$

Assim, substituímos (2.319) em (**??**), que fica

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} + \sum_j \Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot q_j}\Big) - \sum_\ell \lambda_\ell c_{\ell j}\Big]\dot q_j + \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot q_j}\frac{d\dot q_j}{dt} \tag{2.320}$$

Continuando, usamos (**??**), para reescrever (2.320) como

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} + \sum_j \frac{d}{dt}\Big(\dot q_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot q_j}\Big) - \sum_{j\ell} \lambda_\ell c_{\ell j}\dot q_j$$

ou

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} + \frac{d}{dt}\Big(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\Big) - \sum_\ell \Big(\lambda_\ell \sum_j c_{\ell j}\dot{q}_j\Big) \tag{2.321}$$

Agora, reescrevemos (2.119) como

$$\sum_j c_{\ell j}\dot{q}_j = -c_{\ell t}\,, \qquad \ell = 1,\ldots,m \tag{2.322}$$

e usamos (2.322) em (2.321), obtendo

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} - \frac{d}{dt}\Big(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\Big) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} + \sum_\ell \lambda_\ell c_{\ell t}$$

ou, trocando os sinais e rearranjando,

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j} - \mathcal{L}\Big) = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} - \sum_\ell \lambda_\ell c_{\ell t} \tag{2.323}$$

Agora, introduzimos a função $\mathfrak{h}$ mediante (**??**), de modo que (2.323) fica

$$\frac{d\mathfrak{h}}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} - \sum_\ell \lambda_\ell c_{\ell t} \tag{2.324}$$

que é a equação que substitui (**??**), e que estabelece que, mesmo que $\mathcal{L}$ não seja função explícita do tempo, se houver vínculos em que haja dependência temporal a função $\mathfrak{h}$ não é conservada.

■

Exemplo 2.15. *O formalismo lagrangeano pode ser aplicado em outras áreas, além da Mecânica Clássica. Para ver isso, considere um circuito formado por um capacitor de capacitância C e um indutor ideal de indutância L, ligados em série, como mostra a figura 2.8. Tal circuito é chamado de circuito LC em série.*

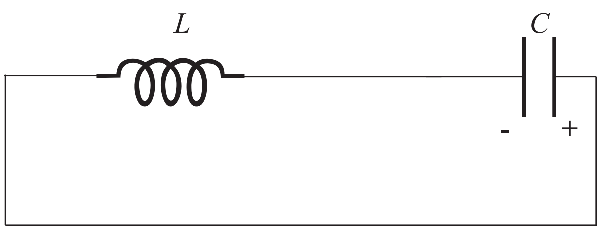

Figura 2.8: Um circuito LC em série.

Obtenha a lagrangeana e a "EDM" para esse circuito.

Para começar, devemos identificar o que seriam as energias cinética e potencial nesse caso. Para tanto, notamos que um fato interessante sobre coordenadas generalizadas é que elas podem representar qualquer coisa. Sendo assim, podemos associar uma coordenada generalizada q à carga Q circulando no circuito. Com isso, a velocidade generalizada $\dot{q}$ corresponde a $\frac{d\mathsf{Q}}{dt}$, ou seja, à corrente I. Continuando, há uma energia elétrica armazenada no capacitor quando ele tem uma carga Q em suas placas dada por

$$E_{el} = \frac{C\mathsf{Q}^2}{2} \tag{2.325}$$

e, quando há corrente no indutor, há uma energia magnética armazenada nele dada por

$$E_{mag} = \frac{L\mathsf{I}^2}{2} \tag{2.326}$$

De (2.326) identificamos diretamente a energia magnética como sendo o correspondente à energia cinética, de modo que

$$T = E_{mag} = \frac{L\mathsf{I}^2}{2} \tag{2.327}$$

onde fazemos também a identificação de que a indutância faz o papel inercial que a massa m tem. Sendo assim, e tendo em conta a energia potencial elástica de uma mola, associamos (2.325) à energia potencial no sistema, ou seja,

$$U = E_{el} = \frac{C\mathsf{Q}^2}{2} \tag{2.328}$$

sendo que, nesse caso, a capacitância C corresponde ao inverso da constante de mola. Teríamos então as seguintes correspondências

$$q \leftrightarrow \mathsf{Q} \tag{2.329a}$$

$$\dot{q} \leftrightarrow \dot{\mathsf{Q}} = \mathsf{I} \tag{2.329b}$$

$$\ddot{q} \leftrightarrow \ddot{\mathsf{Q}} = \dot{\mathsf{I}} \tag{2.329c}$$

$$m \leftrightarrow L \tag{2.329d}$$

$$k \leftrightarrow \frac{1}{C} \tag{2.329e}$$

A lagrangeana fica, usando (2.327) e (2.328),

$$\mathcal{L} = \frac{L\mathsf{I}^2}{2} - \frac{C\mathsf{Q}^2}{2} \tag{2.330}$$

De (2.330), calculamos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathsf{Q}} = -C\mathsf{Q} \tag{2.331a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathsf{Q}}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathsf{I}} = L\mathsf{I} \tag{2.331b}$$

Assim, usando (2.331) em (2.102), ficamos com

$$-C\mathsf{Q} - \frac{d}{dt}(L\mathsf{I}) = 0$$

ou

$$L\dot{\mathsf{I}} + C\mathsf{Q} = 0$$

que pode ser escrita como

$$L\ddot{\mathsf{Q}} + C\mathsf{Q} = 0 \tag{2.332}$$

Assim, a equação (2.332) é a "EDM" para este caso, e corresponde à equação que descreve o comportamento do circuito LC em série. Esta mesma equação é obtida, por exemplo, fazendo uma análise puramente elétrica do problema.

■

Após vermos alguns exemplos, vamos apresentar mais um ponto relevante relacionado a simetrias e leis de conservação.

2.7 Teorema de Noether

Nas seções **??** e **??** investigamos algumas relações entre grandezas conservadas, simetrias na lagrangeana e leis de conservação. Podemos estender o que obtivemos lá por meio de um teorema, devido à Emmy Noether, que estabelece princípios para leis de conservação gerais, que incluem aquelas vistas nas seções mencionadas acima. Considere inicialmente que temos uma transformação dada por

$$t' = t + \epsilon \mathscr{T}(q;t) \tag{2.333a}$$

$$q_i'(t') = q_i(t) + \epsilon \mathscr{Q}_i[q(t);t] \tag{2.333b}$$

onde ϵ é um parâmetro infinitesimal, e

$$\mathscr{Q}_i(q;t) = \mathscr{Q}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n; t) \qquad \mathscr{T}(q;t) = \mathscr{T}(q_1, q_2, \ldots, q_n; t) \tag{2.334}$$

A ação é dada por (2.99),

$$\mathfrak{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}; t)\, dt$$

e, nas variáveis transformadas, temos uma nova ação, dada por

$$\mathfrak{I}' = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathcal{L}(q', \dot{q}'; t')\, dt' \tag{2.335}$$

A variação da ação é, então, de (2.99) e (2.335),

$$\Delta \mathfrak{I} = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathcal{L}(q', \dot{q}'; t')\, dt' - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}; t)\, dt \tag{2.336}$$

e, se $\Delta I \to 0$ quando $\epsilon \to 0$, temos que a ação é invariante frente à transformação dada por (2.333). Vamos agora estabelecer o teorema de Noether.

Teorema 2.1 (Teorema de Noether)**.** *O teorema de Noether estabelece que, se a ação é invariante frente à transformação* (2.333)*, então há uma grandeza conservada, que é uma constante de movimento, dada por*

$$\Upsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i \mathscr{T} - \mathscr{Q}_i) - \mathcal{L}\mathscr{T} \tag{2.337}$$

onde $\mathcal{L}$ é a lagrangeana do sistema.

Vejamos agora a demonstração deste teorema.

Demonstração. Para realizar a demonstração será necessário realizar uma expansão em série de Taylor e, como, por hipótese queremos $\epsilon \to 0$, correspondendo a uma transformação infinitesimal, vamos manter termos até primeira ordem em ϵ. Com isso, calculamos, usando (2.333a),

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \epsilon \dot{\mathscr{T}} \tag{2.338}$$

de (2.338), temos

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{1 + \epsilon \dot{\mathscr{T}}} = (1 + \epsilon \dot{\mathscr{T}})^{-1}$$

ou, utilizando uma expansão em série binomial,

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - \epsilon \dot{\mathscr{T}} \tag{2.339}$$

Além disso, precisamos também de

$$\frac{dq_i'}{dt'} = \frac{dq'}{dt} \frac{dt}{dt'} = (1 - \epsilon \dot{\mathscr{T}})(\dot{q}_i + \epsilon \dot{\mathscr{Q}}_i)$$

ou

$$\frac{dq_i'}{dt'} = \dot{q}_i + \epsilon(\dot{\mathscr{Q}}_i - \dot{q}_i \dot{\mathscr{T}}) - \epsilon^2 \dot{\mathscr{T}} \dot{\mathscr{Q}}_i$$

e, mantendo apenas termos de ordem mais baixa em ϵ, ficamos com

$$\frac{dq_i'}{dt'} = \dot{q}_i + \epsilon(\dot{\mathscr{Q}}_i - \dot{q}_i \dot{\mathscr{T}}) \tag{2.340}$$

Vamos simplificar um pouco a notação definindo

$$\mathfrak{Z}_i = \dot{\mathscr{Q}}_i - \dot{q}_i \dot{\mathscr{T}} \tag{2.341}$$

de modo que (2.340) fica, usando (2.341),

$$\frac{dq_i'}{dt'} = \dot{q}_i + \epsilon \mathfrak{Z}_i \tag{2.342}$$

Agora, de (2.336), temos, usando (2.333) e (2.342),

$$\Delta \mathfrak{I} = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathcal{L}(q_i + \epsilon \mathscr{Q}_i, \dot{q}_i + \epsilon \mathfrak{Z}_i; t + \epsilon \mathscr{T})\, dt' - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}; t)\, dt \tag{2.343}$$

Agora, temos uma função no integrando da primeira integral em (2.343) que depende de várias variáveis, e queremos fazer sua expansão em série de Taylor. Recordando o caso de uma função de uma variável, temos

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} + \cdots \tag{2.344}$$

Note que queremos expandir a função

$$\mathcal{L}(q_i', \dot{q}_i'; t') = \mathcal{L}(q_i + \epsilon \mathscr{Q}_i, \dot{q}_i + \epsilon \mathfrak{Z}_i; t + \epsilon \mathscr{T})$$

em torno do ponto definido por $(q_i, \dot{q}_i); t)$, que corresponde ao ponto x_0 em (2.344). Assim, mantendo termos até primeira ordem em ϵ, ficamos com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q_i + \epsilon \mathscr{Q}_i, \dot{q}_i + \epsilon \mathfrak{Z}_i; t + \epsilon \mathscr{T}) &= \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i; t) \\ &+ \sum_i \left[(q_i' - q_i) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} \right)_{q_i' = q_i} + (\dot{q}_i' - \dot{q}_i) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i'} \right)_{\dot{q}_i' = \dot{q}_i} \right] + (t' - t) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t'} \right)_{t' = t} \end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{L}(q_i + \epsilon \mathscr{Q}_i, \dot{q}_i + \epsilon \mathfrak{Z}_i; t + \epsilon \mathscr{T}) = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i; t) + \sum_i \left[\epsilon \mathscr{Q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \epsilon \mathfrak{Z}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right] + \epsilon \mathscr{T} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tag{2.345}$$

Além disso, podemos reescrever (2.343) como

$$\begin{aligned} \Delta \mathfrak{I} = \int_{t_2}^{t_2'} \mathcal{L}(q_i + \epsilon \mathscr{Q}_i, \dot{q}_i + \epsilon \mathfrak{Z}_i; t + \epsilon \mathscr{T})\, dt' + \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i + \epsilon \mathscr{Q}_i, \dot{q}_i + \epsilon \mathfrak{Z}_i; t + \epsilon \mathscr{T})\, dt' \\ + \int_{t_1}^{t_1'} \mathcal{L}(q_i + \epsilon \mathscr{Q}_i, \dot{q}_i + \epsilon \mathfrak{Z}_i; t + \epsilon \mathscr{T})\, dt' - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}; t)\, dt \end{aligned} \tag{2.346}$$

No limite $\epsilon \to 0$ apenas as integrais em (2.346) com limites indo de t_1 a t_2 contribuem, de modo que interessa apenas

$$\Delta \mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i + \epsilon \mathscr{Q}_i, \dot{q}_i + \epsilon \mathfrak{Z}_i; t + \epsilon \mathscr{T})\, dt' - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}; t)\, dt \tag{2.347}$$

Agora, substituímos (2.338) e (2.345) em (2.347), que fica

$$\Delta \mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i; t) + \sum_i \Big[\epsilon \mathscr{Q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \epsilon \mathfrak{Z}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \Big] + \epsilon \mathscr{T} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \Big\} (1 + \epsilon \dot{\mathscr{T}})\, dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}; t)\, dt$$

ou

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \Bigg\{ & \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i; t) + \sum_i \Big[\epsilon \mathscr{Q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \epsilon \mathfrak{Z}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \Big] + \epsilon \mathscr{T} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ & + \epsilon \dot{\mathscr{T}} \Big\{ \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i; t) + \sum_i \Big[\epsilon \mathscr{Q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \epsilon \mathfrak{Z}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \Big] + \epsilon \mathscr{T} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \Big\} - \mathcal{L}(q, \dot{q}; t) \Bigg\}\, dt\end{aligned}$$

ou, mantendo apenas termos até primeira ordem em ϵ,

$$\Delta \mathcal{I} = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \sum_i \Big[\mathscr{Q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \mathfrak{Z}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \Big] + \mathscr{T} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \dot{\mathscr{T}} \mathcal{L} \Big\}\, dt$$

ou, reescrevendo,

$$\frac{\Delta \mathcal{I}}{\epsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \sum_i \Big[\mathscr{Q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \mathfrak{Z}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \Big] + \mathscr{T} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \dot{\mathscr{T}} \mathcal{L} \Big\}\, dt$$

Note que, caso tivéssemos considerado termos de ordem maior em ϵ, apareceriam termos multiplicados por potências crescentes de ϵ que seriam somados ao integrando na expressão acima. No limite $\epsilon \to 0$, temos, quando a ação é invariante,

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Delta \mathcal{I}}{\epsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \sum_i \Big[\mathscr{Q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \mathfrak{Z}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \Big] + \mathscr{T} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \dot{\mathscr{T}} \mathcal{L} \Big\}\, dt = 0 \tag{2.348}$$

Então, de (2.348), obtemos

$$\sum_i \Big[\mathscr{Q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \mathfrak{Z}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \Big] + \mathscr{T} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \dot{\mathscr{T}} \mathcal{L} = 0 \tag{2.349}$$

ou, usando (2.341) em (2.349),

$$\sum_i \Big[\mathscr{Q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + (\dot{\mathscr{Q}}_i - \dot{q}_i \dot{\mathscr{T}}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \Big] + \mathscr{T} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \dot{\mathscr{T}} \mathcal{L} = 0 \tag{2.350}$$

A equação (2.350) estabelece a condição de Noether para que a ação seja invariante. Agora, usamos (**??**) em (2.350), obtendo

$$\sum_i \Big[\mathscr{Q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + (\dot{\mathscr{Q}}_i - \dot{q}_i \dot{\mathscr{T}})\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big] - \mathscr{T}\frac{d\mathfrak{h}}{dt} + \dot{\mathscr{T}}\mathcal{L} = 0 \tag{2.351}$$

Além disso, usamos as equações de Lagrange na forma (2.102), escritas como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big) \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2.352}$$

de modo que, usando (2.352) em (2.351), ficamos com

$$\sum_i \Big[\mathscr{Q}_i \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big) + \dot{\mathscr{Q}}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big] - \dot{\mathscr{T}}\Big[\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}\Big] - \mathscr{T}\frac{d\mathfrak{h}}{dt} = 0$$

ou, usando (**??**),

$$\sum_i \frac{d}{dt}\Big(\mathscr{Q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \dot{\mathscr{T}}\mathfrak{h} - \mathscr{T}\frac{d\mathfrak{h}}{dt} = 0$$

ou, ainda,

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_i \mathscr{Q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \mathscr{T}\mathfrak{h} = 0 \tag{2.353}$$

Usando novamente (**??**) em (2.353), temos

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_i \mathscr{Q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \mathscr{T}\Big[\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}\Big] = 0$$

ou, reescrevendo,

$$\frac{d}{dt}\Big[\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}_i \mathscr{T} - \mathscr{Q}_i) - \mathcal{L}\mathscr{T}\Big] = 0 \tag{2.354}$$

Agora, notamos que o termo entre colchetes em (2.354) corresponde à grandeza Υ definida em (2.337), de modo que achamos

$$\frac{d\Upsilon}{dt} = 0 \tag{2.355}$$

e, portanto, a grandeza Υ dada em (2.337) é uma constante de movimento, o que completa a demonstração do teorema.

$\square$

Após a demonstração do teorema, vejamos alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 2.16. *Investigue as consequências do teorema de Noether para uma translação puramente temporal, em que ocorre*

$$\mathscr{T} = 1 \qquad\qquad \mathscr{Q}_i = 0 \tag{2.356}$$

Com as funções $\mathscr{T}$ e $\mathscr{Q}_i$ definidas em (2.356), a condição de Noether (2.350) para a invariância da ação fica

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \tag{2.357}$$

já que, de (2.356), temos $\dot{\mathscr{T}} = 0$ e $\dot{\mathscr{Q}}_i = 0$. Nesse caso, usando (2.356), a grandeza Υ dada em (2.337) fica

$$\Upsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L} \tag{2.358}$$

e, comparando (2.358) com (**??**), vemos que ocorre, nesse caso,

$$\Upsilon = \mathfrak{h} \tag{2.359}$$

de modo que a condição para $\Upsilon = \mathfrak{h}$ ser constante é que (2.357) deve ser válida, que é o que obtivemos na seção (**??**).

■

Os exemplos acima ilustram a aplicação do teorema de Noether, e com isso encerramos esse capítulo. No próximo, analisamos o problema de dois corpos sujeitos a uma força do tipo central, que é bastante importante em Física.

2.8 Exercícios

2.1