4 Movimento em Duas ou Três Dimensões



https://www.walldevil.com/cars-highways-long-exposure-motion-blur-night-time-traffic-lights-signs-wallpaper-35907/

Cap. 4 – Movimento em Duas ou Três Dimensões

Vetor posição

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Aceleração média

$$\vec{a}_{méd} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Velocidade média

$$\vec{v}_{méd} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Aceleração instantânea

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

Velocidade instantânea

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

Deslocamento

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$
$$= \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}.$$

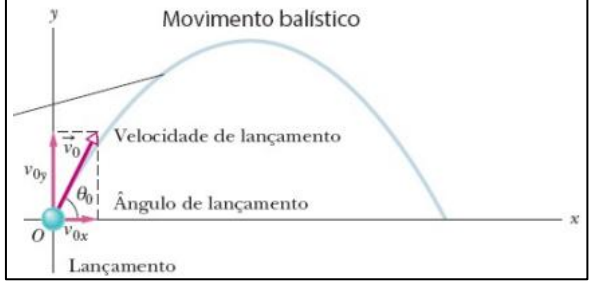
Movimento balístico

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t,$$

$$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt,$$

$$v_y^2 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)^2 - 2g(y - y_0)$$



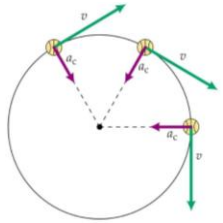
Trajetória

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2}$$

Alcance

$$R = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}2\theta_0$$

Movimento circular uniforme



$$|\vec{v}| = constante$$

Aceleração centrípeta

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Período de revolução

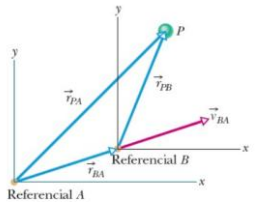
$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Movimento relativo

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$$



4-1 Posição e Deslocamento

Qual é a física?

- Análise do movimento em 2D e 3D
- Medicina e engenharia: efeito do movimento em voos p. ex.
- Engenharia: materiais esportivos
- Carro x avião: 2D x 3D

Posição e Deslocamento

- Localizando a partícula no espaço com o **vetor posição**:

$$\vec{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

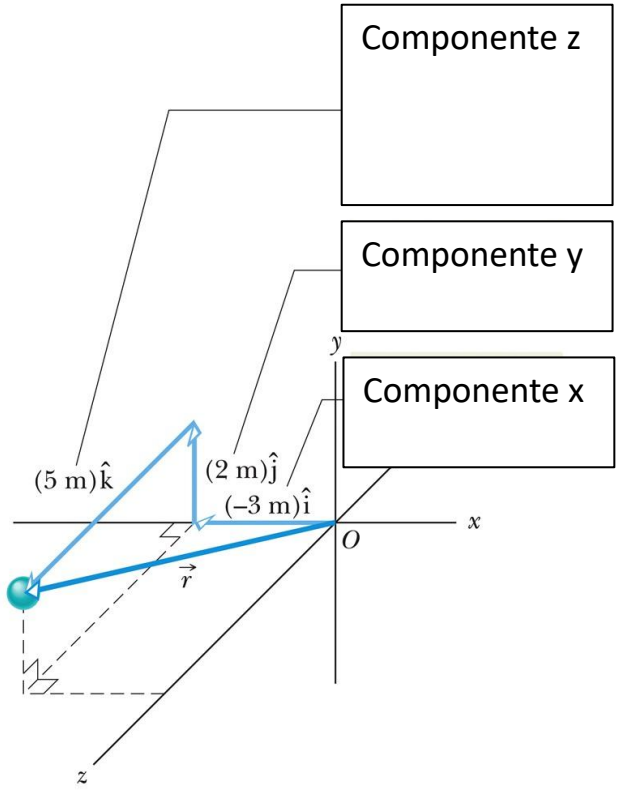
Se estende de um ponto de referência (origem)

até a partícula

Exemplo

Vetor posição para partícula em (-3m, 2m, 5m)

$$\vec{r} = (-3\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{i}} + (2\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{j}} + (5\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{k}}$$



Copyright © 2014 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Posição e Deslocamento

- Alteração na posição da partícula pode ser descrita pelo **vetor deslocamento**:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

- Que pode ser reescrito como:

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{\mathbf{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathbf{j}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathbf{k}}$$

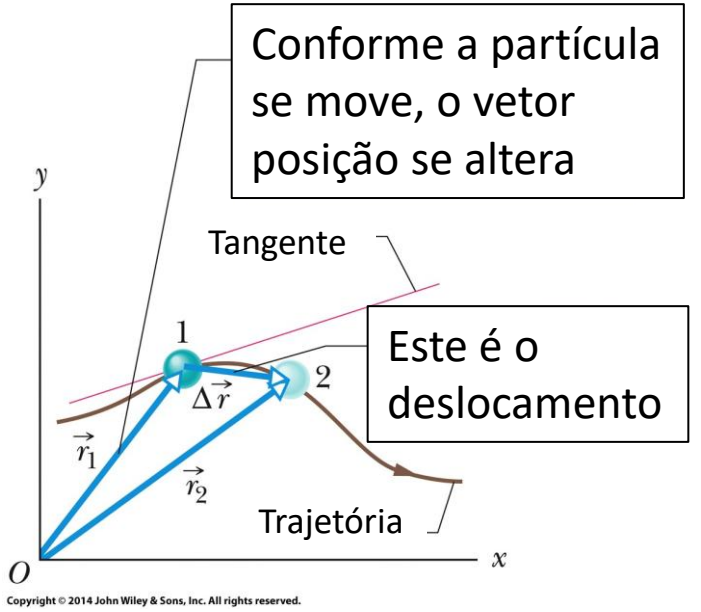
- Ou também:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\,\hat{\mathbf{j}} + \Delta z\,\hat{\mathbf{k}}$$

4-2 Velocidade Média e Velocidade Instantânea

- O quão rápido a posição se alterou num certo intervalo?

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$ **(vetor velocidade média)**



Copyright © 2014 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Ou podemos escrever suas componentes:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta x\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\hat{\mathbf{j}} + \Delta z\hat{\mathbf{k}}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{\mathbf{k}}$$

Velocidade Instantânea

- O quão rápido a posição se altera a cada instante?

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$ **(vetor velocidade instantânea)**

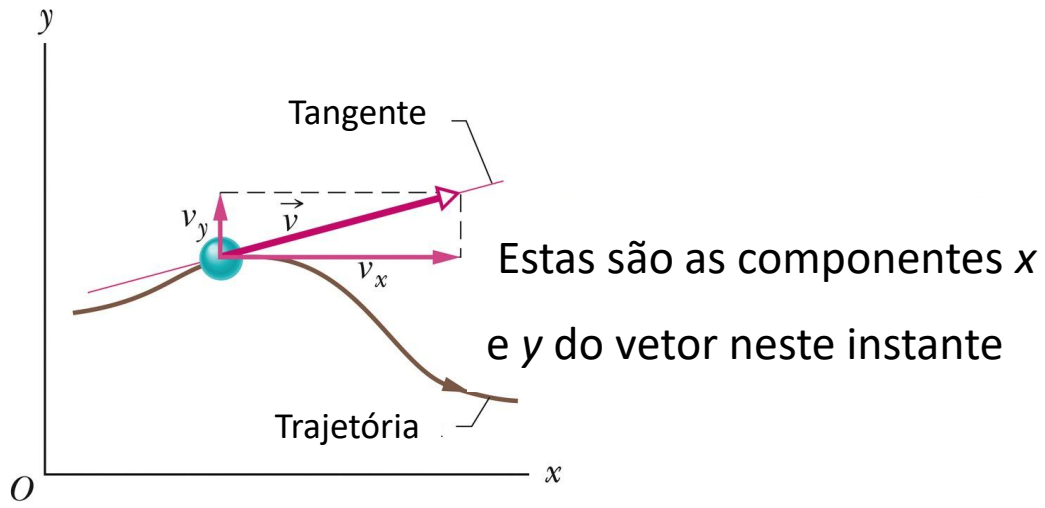
Ou podemos escrever suas componentes e vetores unitários:

$$\vec{v} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{k}}$$

Velocidade Instantânea

- A direção da velocidade instantânea é sempre tangente à trajetória da partícula

O vetor velocidade sempre é tangente à trajetória



Estas são as componentes *x* e *y* do vetor neste instante

Copyright © 2014 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

4-3 Aceleração Média e Aceleração Instantânea

- O quão rápido a velocidade se alterou num certo intervalo?

$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$ **(vetor aceleração média)**

Ou podemos escrever suas componentes:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\Delta v_x \hat{i} + \Delta v_y \hat{j} + \Delta v_z \hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\hat{k}$$

Aceleração Instantânea

- O quão rápido a velocidade se altera a cada instante?

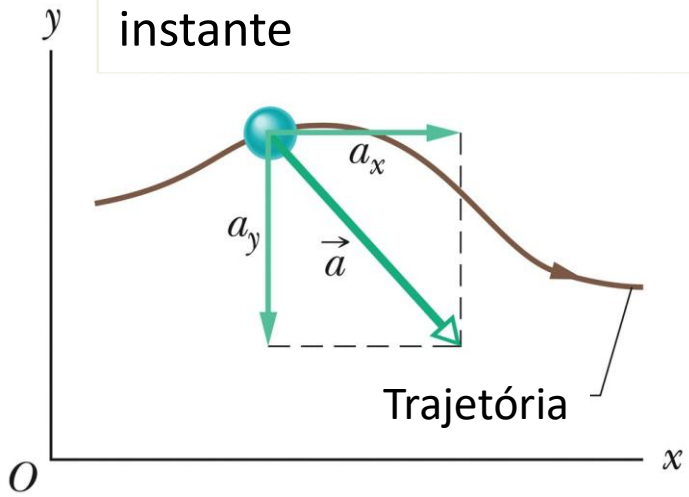
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$ **(vetor aceleração instantânea)**

Ou podemos escrever suas componentes e vetores unitários:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\hat{k} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

Aceleração Instantânea

Estas são as componentes x e y do vetor neste instante



Copyright © 2014 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

4-4 Movimento de Projéteis

- É um caso especial de movimento em 2D



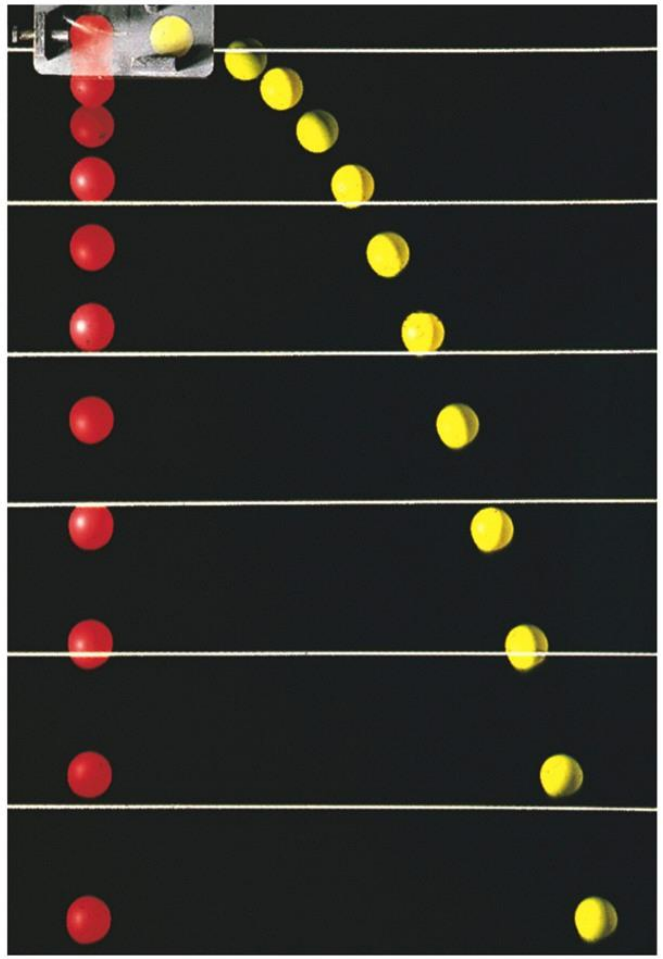
Richard Megna/Fundamental Photographs



https://www.phyzzle.com/projectile-motion-problems/

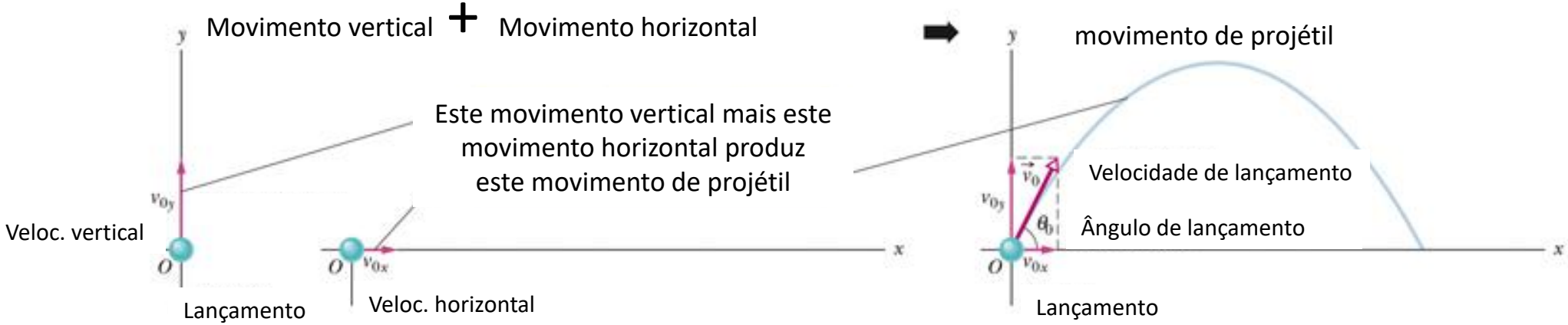
Independência dos movimentos

- No movimento de projéteis, o movimento na direção horizontal independe do movimento na direção vertical e com isso podem ser tratados de maneira separada como problemas em1D.

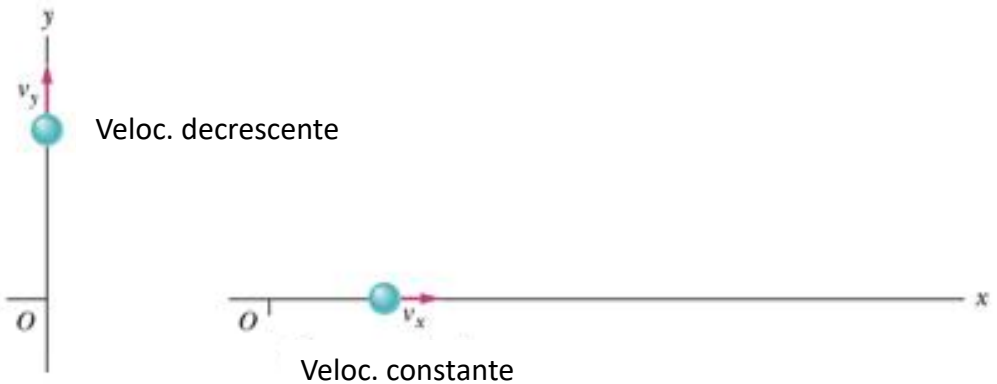


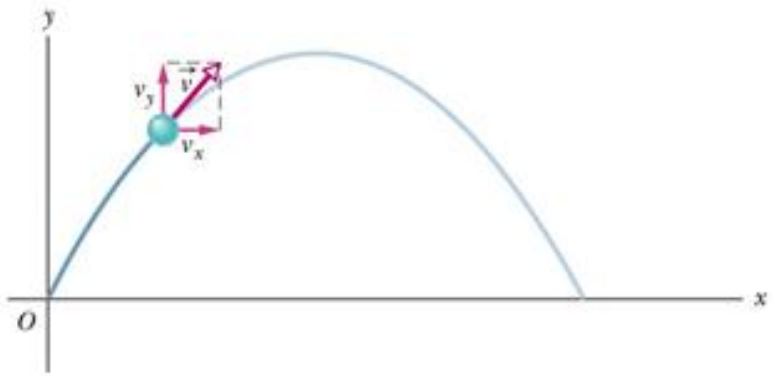
Richard Megna/Fundamental Photographs

Movimento de Projéteis

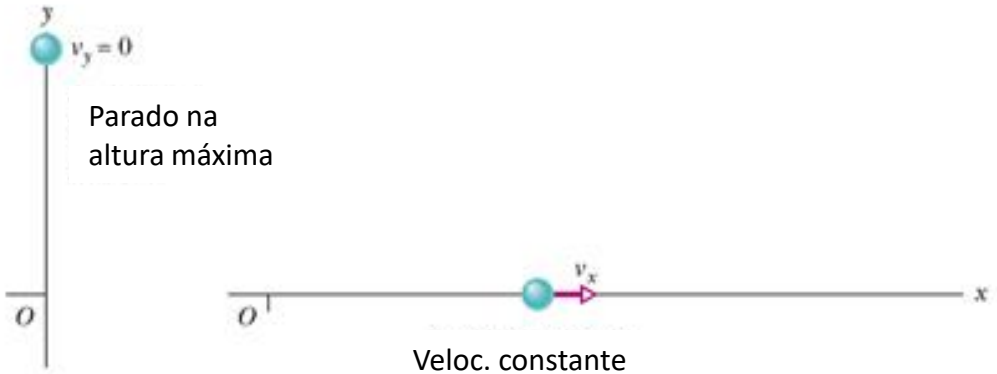


Movimento de Projéteis



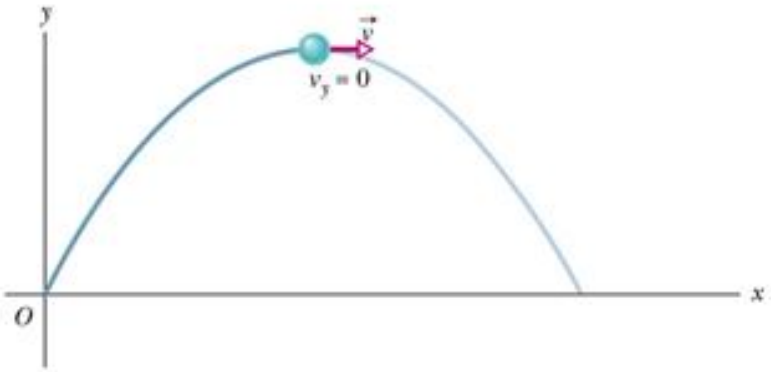


Movimento de Projéteis

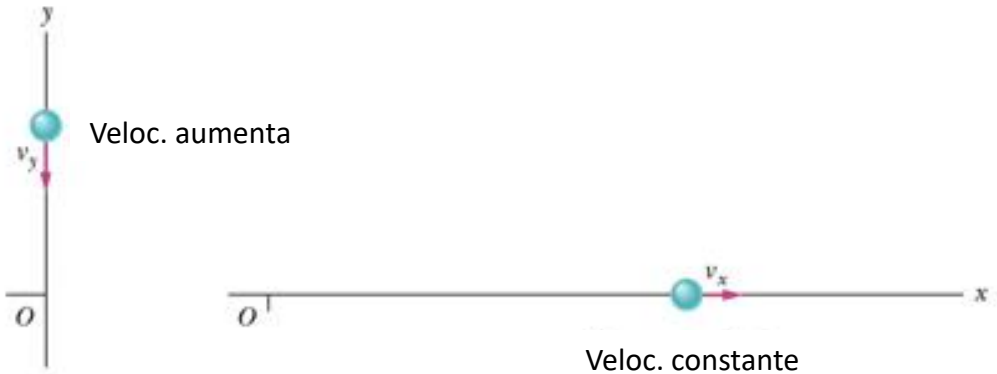


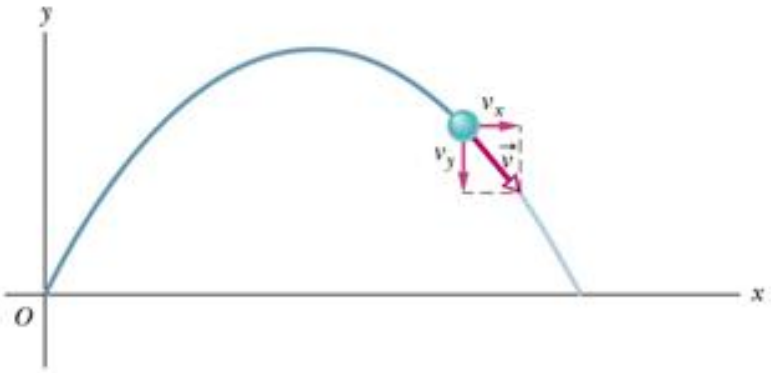
Parado na
altura máxima

Veloc. constante

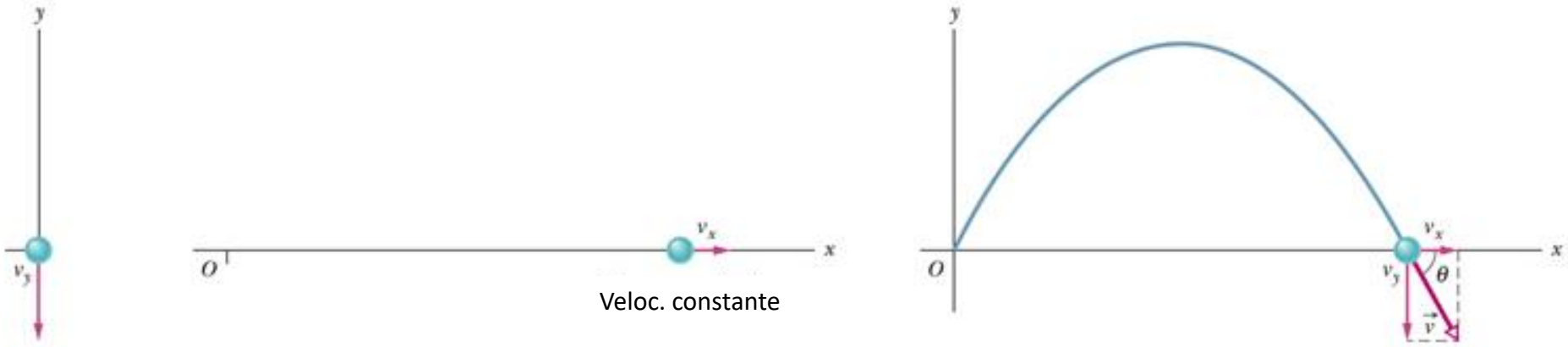


Movimento de Projéteis





Movimento de Projéteis



Veloc. constante

O movimento horizontal

- O movimento horizontal é uniforme, isto é, sem aceleração:

$$x - x_0 = v_{0x}t$$

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t$$

O movimento vertical

- No movimento vertical, a aceleração é constante e para baixo em toda a trajetória:

$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$= (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta - gt$$

$$v_y^2 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)^2 - 2g(y - y_0)$$

A equação da trajetória

- Para a equação da trajetória, basta isolar a variável do tempo *t* numa equação e substituir na outra:
  - Relembrando:

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t$$

$$y - y_0 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

  - Assim temos (supondo $x_0=0$ e $y_0=0$):

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2}$$

O alcance horizontal

- A posição na direção *y* (vertical) volta a ser a mesma do início do lançamento e na direção *x* (horizontal) será o chamado alcance:

$$x - x_0 = R = (v_0 \cos\theta_0)t$$

$$y - y_0 = 0 = (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

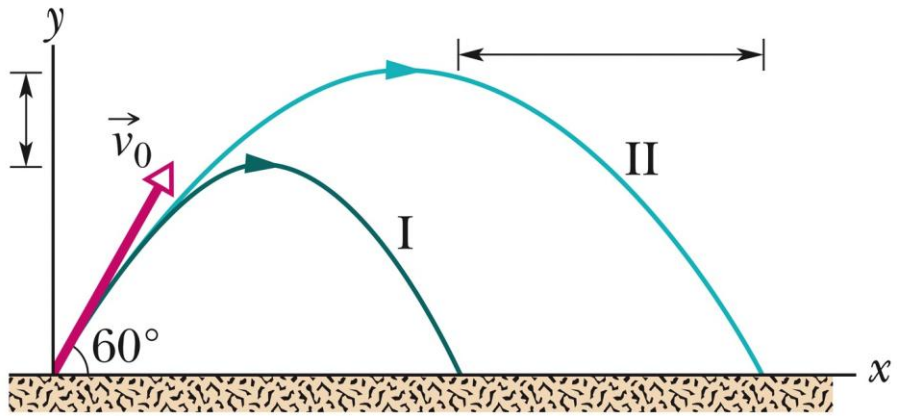
$$R = \frac{2v_0^2}{g}\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0 = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}2\theta_0$$

- Portanto, o alcance é máximo quando sen $2\theta_0$ é máximo, isto é, quando o projétil é lançado a 45 graus, quando o sen $2\theta_0$ é igual a 1.

O alcance horizontal: os efeitos do ar

- Nos cálculos anteriores consideramos os efeitos do ar como desprezíveis, uma aproximação grosseira da realidade.
- Com os efeitos do ar o alcance máximo, a altura máxima e o tempo de voo diminuem.

O ar reduz a altura... ... e o alcance

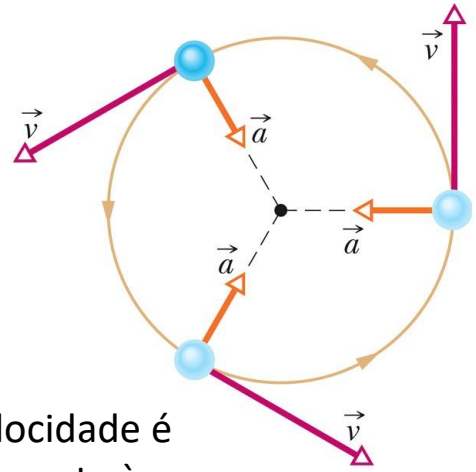


Copyright © 2014 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

4-5 Movimento Circular Uniforme

- Uma partícula está em movimento circular uniforme se:
  - Descreve uma trajetória circular ou um arco de circunferência
  - Em velocidade **escalar** constante
- Percebam que a velocidade se altera (direção), portanto a partícula está acelerada
- Velocidade e aceleração
  - Módulo constante
  - Mudança de direção

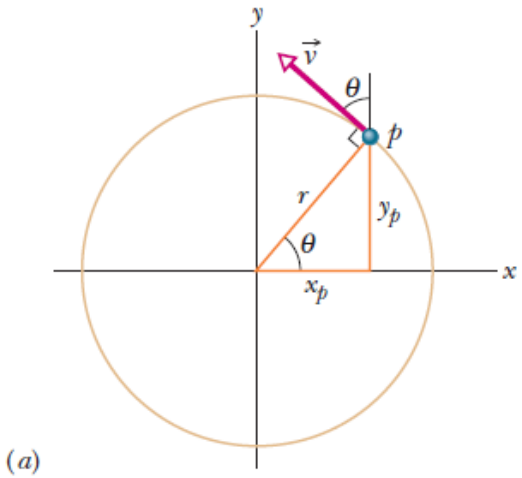
O vetor aceleração sempre aponta para o centro



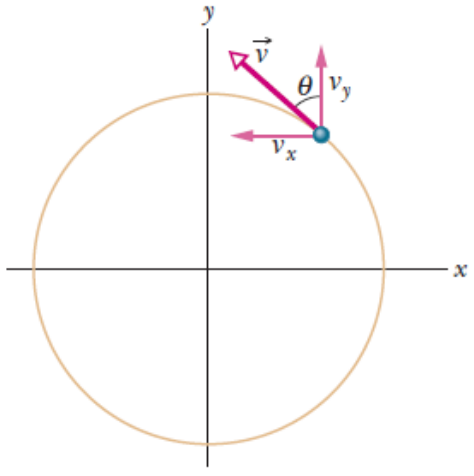
O vetor velocidade é sempre tangente à trajetória

Copyright © 2014 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

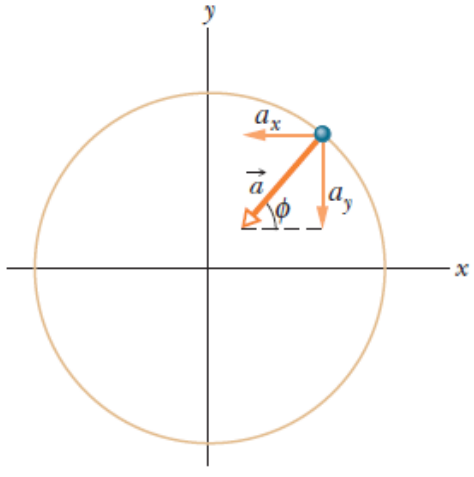
Movimento Circular Uniforme



(a)



(b)



(c)

Movimento Circular Uniforme

- A aceleração é chamada de aceleração centrípeta:
  - Sempre em direção ao centro da trajetória

$$a = \frac{v^2}{r}$$

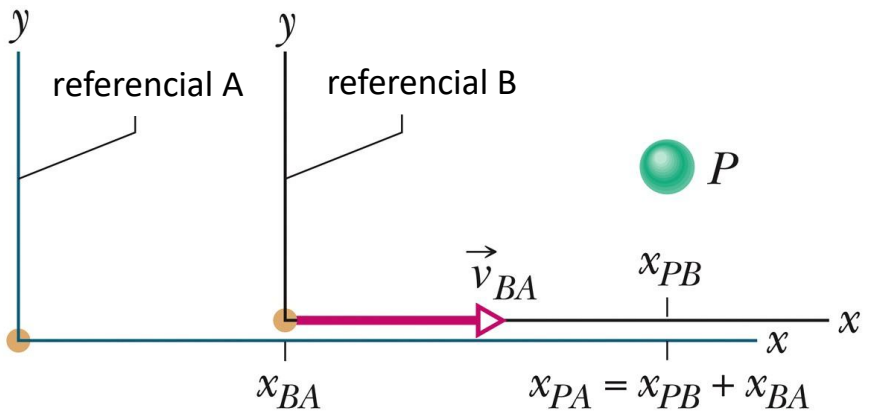
- O período de revolução *T* é o tempo que a partícula leva para completar uma volta numa trajetória fechada

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

4-6 Movimento Relativo em Uma Dimensão

- As medidas de posição e velocidade dependem do referencial
  - Como o observador está se movendo?
  - Nosso sistema de referência usual é a Terra
- Na figura, os subscritos com A ou com B se referem aos referenciais nos quais foram medidos

O referencial B se move em relação ao referencial A, enquanto ambos observam P



Copyright © 2014 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Movimento Relativo em Uma Dimensão

- Da figura, podemos ver que a posição da partícula pode ser descrita como:

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}.$$

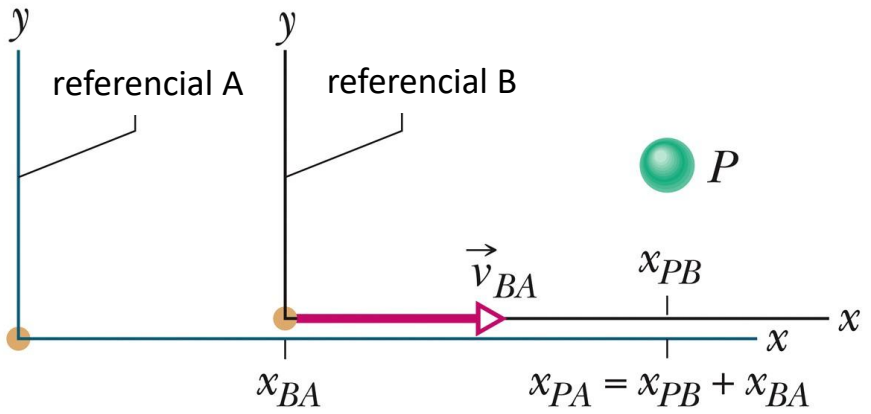
- Derivando a equação acima obtemos a velocidade:

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}.$$

- As acelerações (para referenciais não acelerados a_{BA}=0) são descritas por:

$$a_{PA} = a_{PB}.$$

O referencial B se move em relação ao referencial A, enquanto ambos observam P



Copyright © 2014 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

4-7 Movimento Relativo em Duas Dimensões

- Da mesma maneira que em uma dimensão, mas agora utilizando-se de vetores
  - Posições

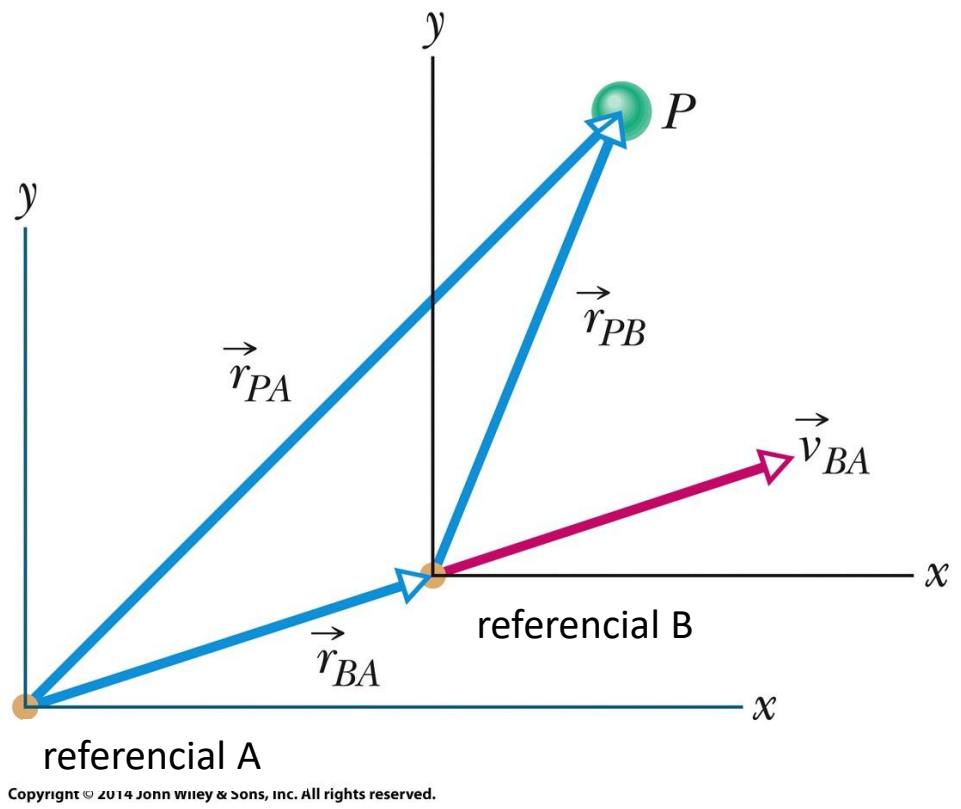
$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}.$$

  - Velocidades

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}.$$

  - Acelerações (para referenciais não acelerados)

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}.$$



Copyright © 2014 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Lista de exercícios

Halliday 9ª. Edição

Cap. 4:

Problemas 3; 8; 12; 28; 39; 46; 61; 69; 74; 88

OU
Halliday 10ª. Edição
Cap. 4:
Problemas 3; 8; 12; 28; 39; 46; 61; 69; 74; 88

Problema 4-3

Um pósitron sofre um deslocamento $\mathbf{\Delta r} = 2{,}0\mathbf{i} - 3{,}0\mathbf{j} + 6{,}0\mathbf{k}$ e termina com um vetor posição $\mathbf{r} = 3{,}0\mathbf{j} - 4{,}0\mathbf{k}$, em metros. Qual era o vetor posição inicial do pósitron?

Problema 4-8

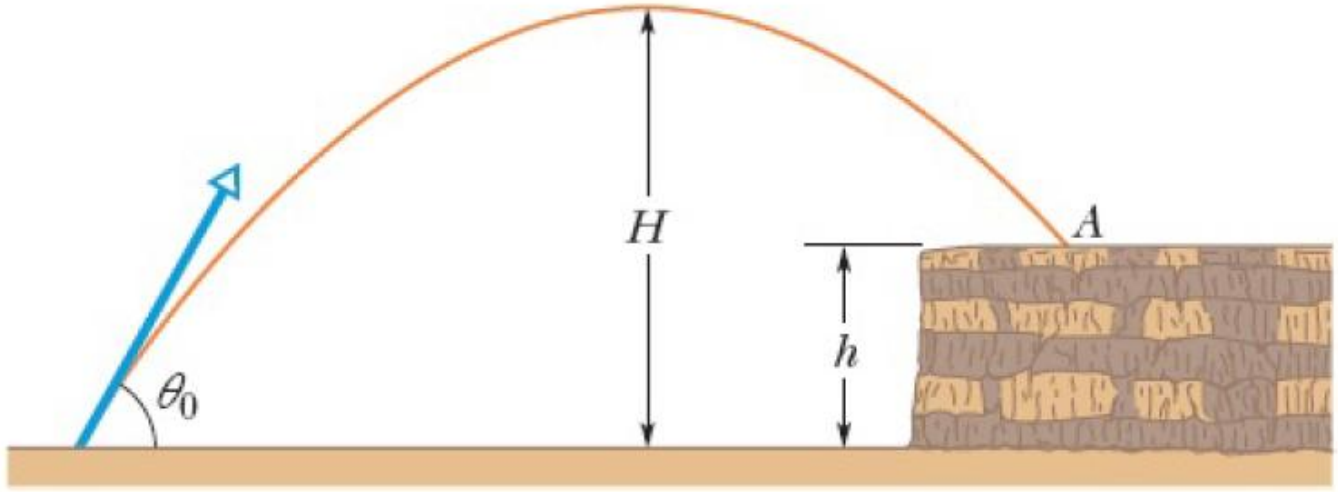
Um avião voa 483 km para leste, da cidade A para a cidade B, em 45,0 min, e depois 966 km para o sul, da cidade B para a cidade C, em 1,50 h. Determine, para a viagem inteira, (a) o módulo e (b) a direção do deslocamento do avião, (c) o módulo e (d) a direção da velocidade média e (e) a velocidade escalar média.

Problema 4-12

Em certo instante, um ciclista está 40,0 m a leste do mastro de um parque, indo para o sul com uma velocidade de 10,0 m/s. Após 30,0 s, o ciclista está 40,0 m ao norte do mastro, dirigindo-se para leste com uma velocidade de 10,0 m/s. Para o ciclista, nesse intervalo de 30,0 s, quais são (a) o módulo e (b) a direção do deslocamento, (c) o módulo e (d) a direção da velocidade média e (e) o módulo e (f) a direção da aceleração média?

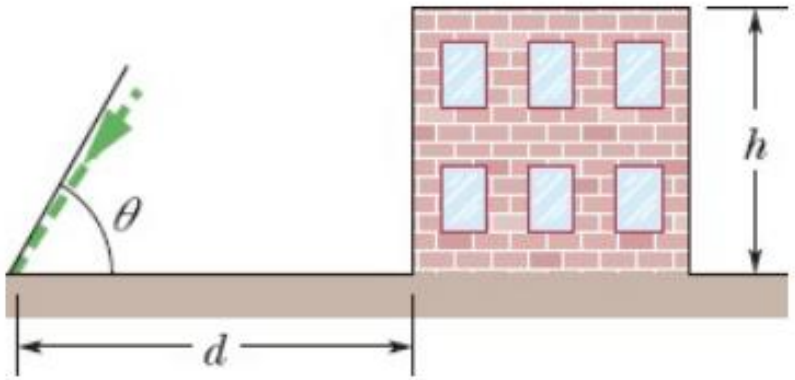
Problema 4-28

Na Fig. 4-34, uma pedra é lançada para o alto de um rochedo de altura h com uma velocidade inicial de 42,0 m/s e um ângulo $\theta_0 = 60{,}0°$ com a horizontal. A pedra cai em um ponto A, num tempo 5,50 s após o lançamento. Determine (a) a altura h do rochedo, (b) o vetor velocidade da pedra, na forma de vetores unitários, imediatamente antes do impacto em A e (c) a altura máxima H alcançada acima do solo.



Problema 4-39

Na Fig. 4-37, uma bola é lançada para a esquerda da borda esquerda do terraço de um edifício. O ponto de lançamento está a uma altura h em relação ao solo, e a bola chega ao solo 1,50 s depois, a uma distância horizontal d = 25,0 m do ponto de lançamento e fazendo um ângulo θ = 60,0° com a horizontal. (a) Determine o valor de h. (Sugestão: Uma forma de resolver o problema é inverter o movimento, como se você estivesse vendo um filme de trás para a frente.) Qual é (b) o módulo da velocidade e (c) qual o ângulo em relação à horizontal com que a bola foi lançada? (d) O ângulo é para cima ou para baixo em relação à horizontal?



Problema 4-46

Alguns jogadores de basquetebol parecem flutuar no ar durante um salto em direção à cesta. A ilusão depende, em boa parte, da capacidade de um jogador experiente de trocar rapidamente a bola de mão durante o salto, mas pode ser acentuada pelo fato de que o jogador percorre uma distância horizontal maior na parte superior do salto do que na parte inferior. Se um jogador salta com uma velocidade inicial v_0 = 7,00 m/s e um ângulo θ_0 = 35,0°, que porcentagem do alcance do salto o jogador passa na metade superior do salto (entre a altura máxima e metade da altura máxima)?

Problema 4-61

Quando uma grande estrela se torna uma supernova, o núcleo da estrela pode ser tão comprimido que ela se transforma em uma estrela de nêutrons, com um raio de cerca de 20 km. Se uma estrela de nêutrons completa uma revolução a cada segundo, (a) qual é o módulo da velocidade de uma partícula situada no equador da estrela e (b) qual é o módulo da aceleração centrípeta da partícula? (c) Se a estrela de nêutrons gira mais depressa, as respostas dos itens (a) e (b) aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas?

Problema 4-69

Um cinegrafista está em uma picape que se move para oeste a 20 km/h enquanto filma um guepardo que também está se movendo para oeste 30 km/h mais depressa que a picape. De repente, o guepardo para, dá meia-volta e passa a correr a 45 km/h para leste, de acordo com a estimativa de um membro da equipe, agora nervoso, que está na margem da estrada, no caminho do guepardo. A mudança de velocidade do animal leva 2,0 s. Quais são (a) o módulo e (b) a orientação da aceleração do animal em relação ao cinegrafista e (c) o módulo e (d) a orientação da aceleração do animal em relação ao membro nervoso da equipe?

Problema 4-74

Depois de voar por 15 min em um vento de 42 km/h a um ângulo de 20° ao sul do leste, o piloto de um avião sobrevoa uma cidade que está a 55 km ao norte do ponto de partida. Qual é a velocidade escalar do avião em relação ao ar?

Problema 4-88

Voos longos em latitudes médias no hemisfério norte encontram a chamada corrente de jato, um fluxo de ar para leste que pode afetar a velocidade do avião em relação à superfície da Terra. Se o piloto mantém a mesma velocidade em relação ao ar (a chamada velocidade do ar), a velocidade em relação ao solo é maior quando o voo é na direção da corrente de jato e menor quando o voo é na direção oposta. Suponha que um voo de ida e volta esteja previsto entre duas cidades separadas por 4000 km, com o voo de ida no sentido da corrente de jato e o voo de volta no sentido oposto. O computador da empresa aérea recomenda uma velocidade do ar de 1000 km/h, para a qual a diferença entre as durações dos voos de ida e de volta é 70,0 min. Qual foi a velocidade da corrente de jato usada nos cálculos?