3 Vetores



https://assets.wired.com/photos/w_1720/wp-content/uploads/2017/01/Vector-495300389-2-1.jpg

Cap. 3 – Vetores

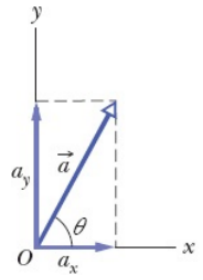
Grandezas físicas

Grandezas vetoriais
- **módulo**
- **direção**
- **sentido**

Grandezas escalares

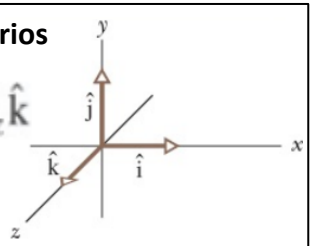
Componentes vetoriais e escalares

$$a_x = a\cos\theta$$
$$a_y = a\,\text{sen}\,\theta$$
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$
$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$



Notação de vetores unitários

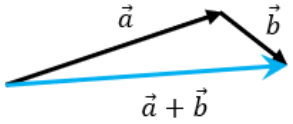
$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$



Álgebra vetorial

Soma

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} \qquad r_x = a_x + b_x \qquad r_y = a_y + b_y \qquad r_z = a_z + b_z$$



Subtração (= soma)

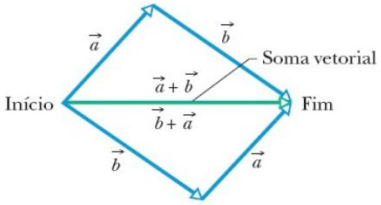
$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Propriedade associativa

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Propriedade comutativa

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$



Multiplicação

Produto vetorial

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{\imath} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{\jmath} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{k}$$

Módulo do produto vetorial

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab\,\text{sen}\,\phi$$

Regra da mão direita

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$$

Produto escalar (ou interno)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi$$

Produto por um escalar

$$e(\vec{a}) = ea_x\hat{\imath} + ea_y\hat{\jmath} + ea_z\hat{k}$$

3-1 Vetores e suas componentes

Qual é a física?

- Várias grandezas possuem módulo e orientação no espaço

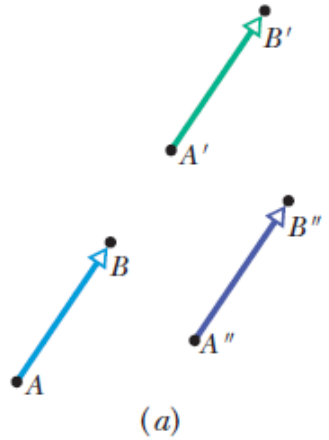
  Ex.:deslocamento, veloc., aceleração

- Outras grandezas não necessitam de orientação no espaço

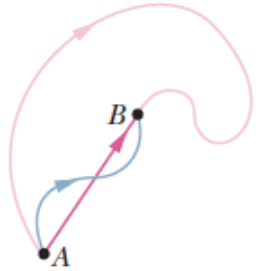
  Ex.: temperatura, massa, energia

Vetores e escalares

- Algumas grandezas descritas em 3 dimensões precisam ser caracterizadas não apenas por um número positivo ou negativo, mas também por direção e sentido.
- Um vetor possui módulo e orientação, i. e. direção e sentido
- Uma grandeza vetorial possui módulo e orientação e pode ser representada por um vetor.
  Ex.:deslocamento, veloc., aceleração
- Uma grandeza escalar não envolve informação de orientação. Ex.: temperatura, pressão, energia, massa, tempo...

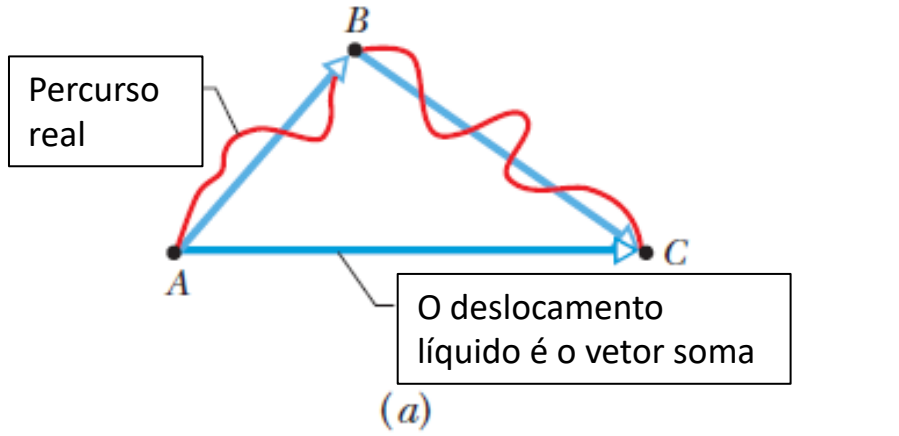


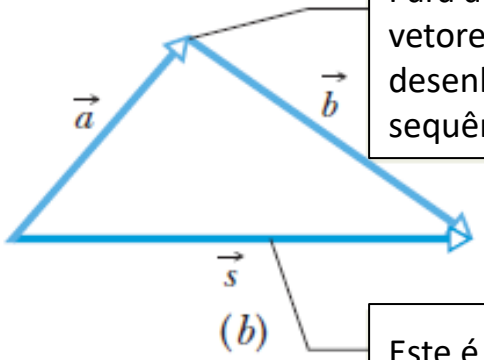
(a)



(b)

Soma geométrica de vetores

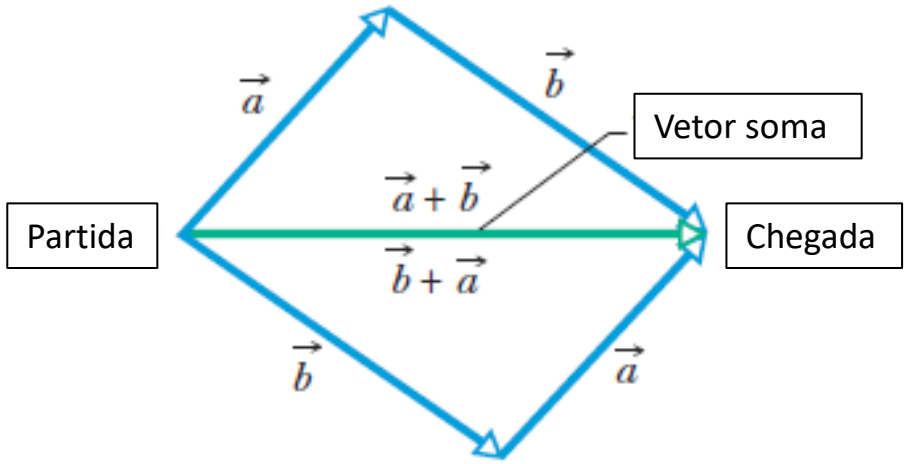




Para adicionar os vetores **a** e **b**, desenhe-os na sequência.

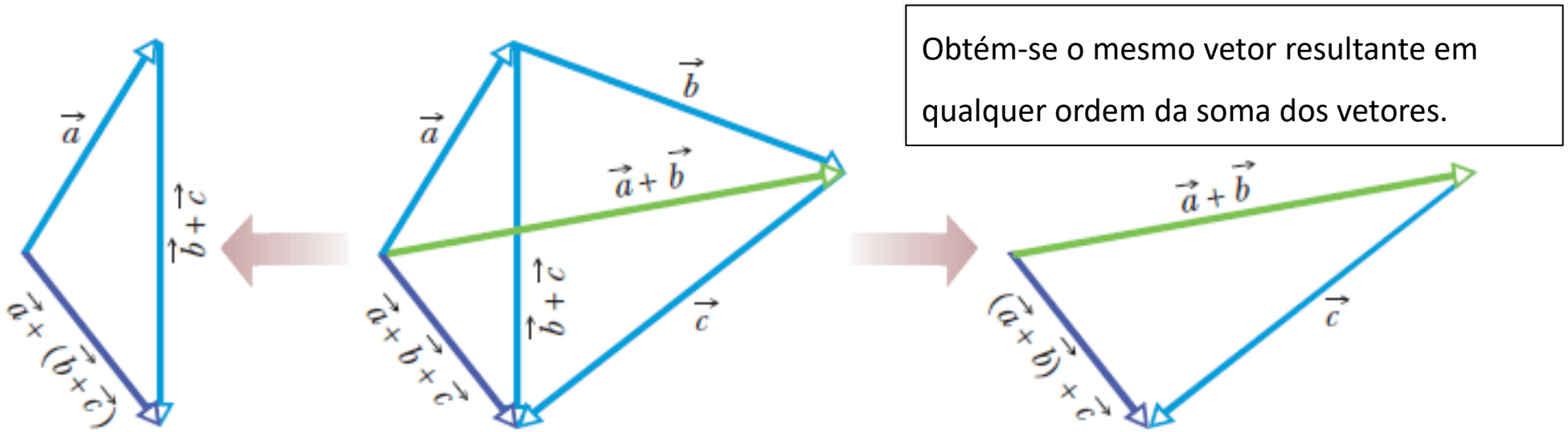
Este é o vetor resultante, da parte traseira de **a** até a ponta de **b**.

Soma geométrica de vetores



Obtém-se o mesmo vetor resultante em qualquer ordem da soma dos vetores.

Soma geométrica de vetores



Obtém-se o mesmo vetor resultante em qualquer ordem da soma dos vetores.

Soma geométrica de vetores: propriedades

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$ (vetor soma)

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$ (propriedade comutativa)

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$ (propriedade associativa)

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$ (subtração)

Teste

- Os módulos dos deslocamentos $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são 3 m e 4 m, respectivamente, e $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Considerando as várias orientações possíveis de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, qual é (a) o maior e (b) o menor valor possível do módulo de $\vec{c}$?

Componentes de vetores

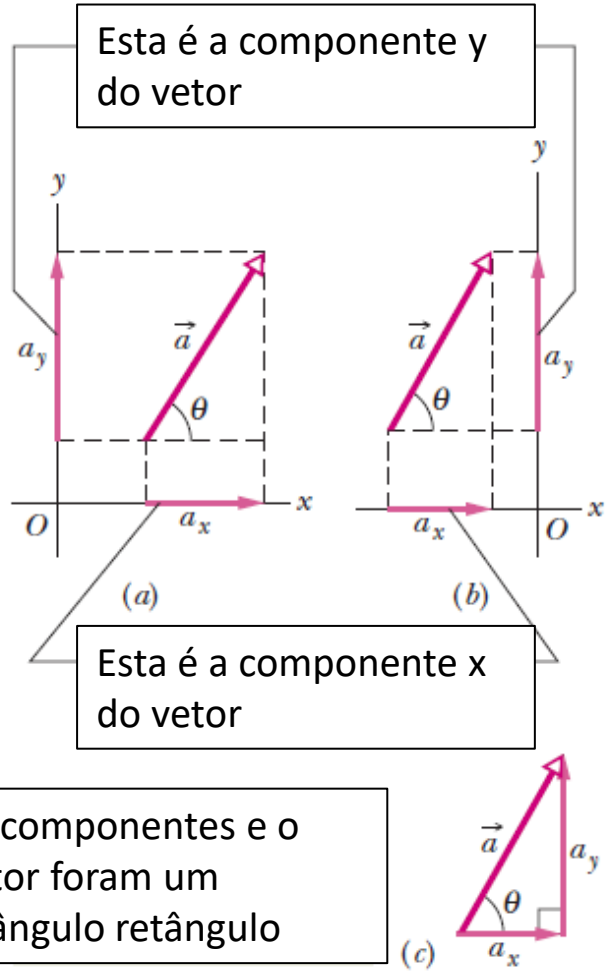
- Componente = projeção

- Obter as componentes significa decompor:

$$a_x = a\cos\theta$$

$$a_y = a\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$



3-2 Vetores unitários: Soma de vetores pelas suas componentes

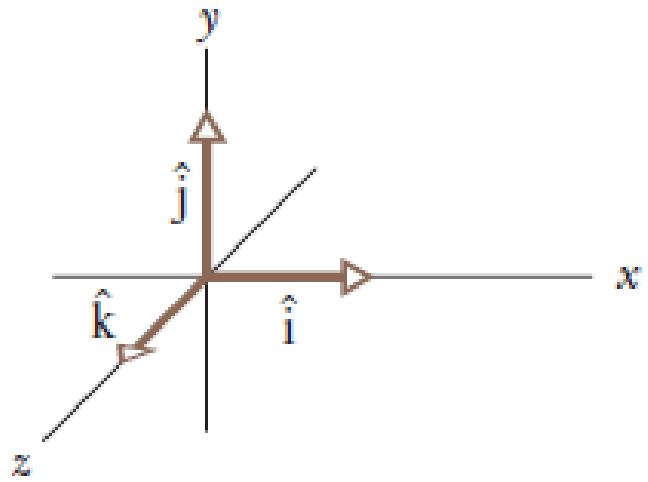
- Vetor unitário = módulo igual a 1 e determinada direção

- Sistema de coordenadas dextrogiro

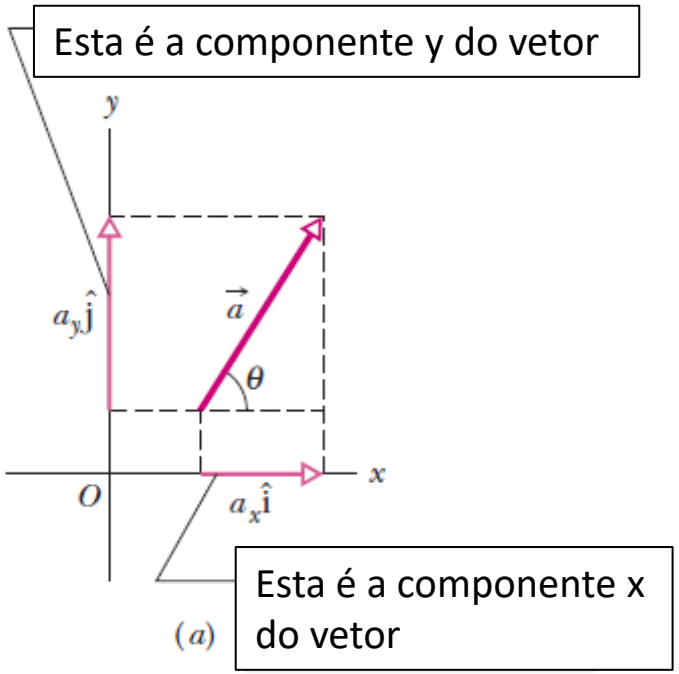
- Componentes vetoriais

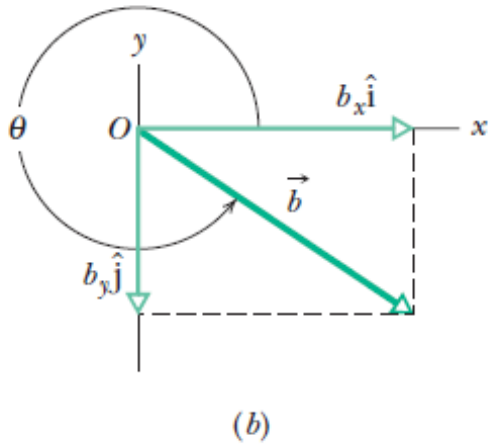
$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

Os vetores unitários apontam ao longo dos eixos.



Componentes vetoriais





$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

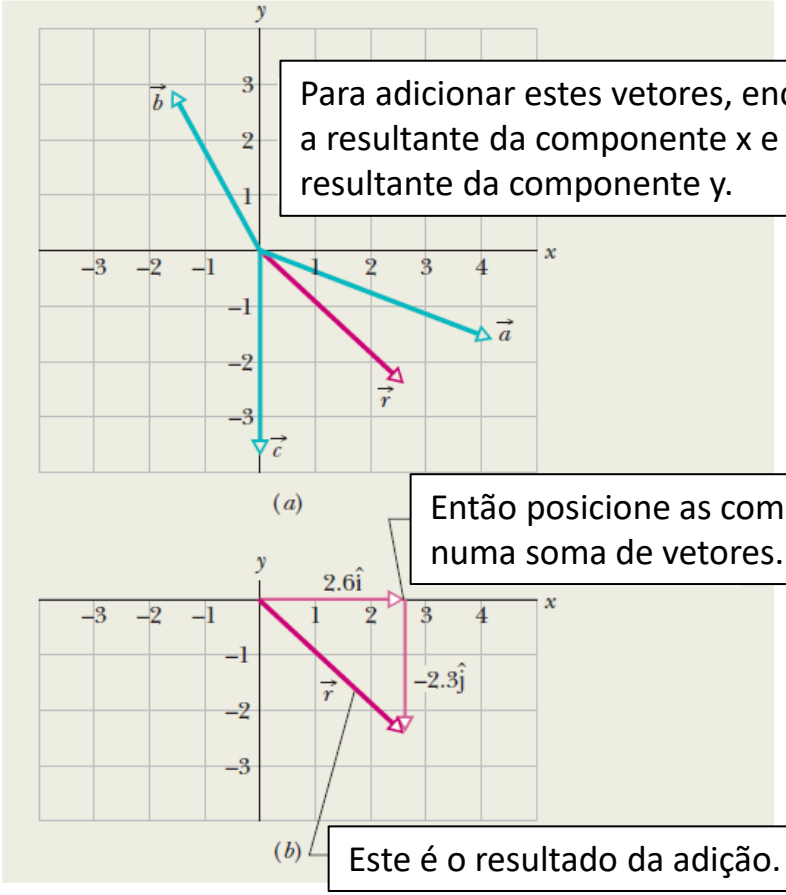
Soma de vetores através de suas componentes

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$r_x = a_x + b_x$$

$$r_y = a_y + b_y$$

$$r_z = a_z + b_z$$

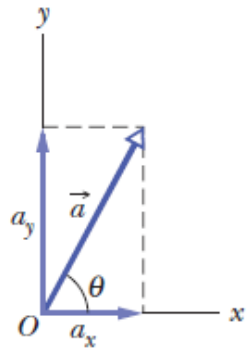


Para adicionar estes vetores, encontre a resultante da componente x e a resultante da componente y.

Então posicione as componentes como numa soma de vetores.

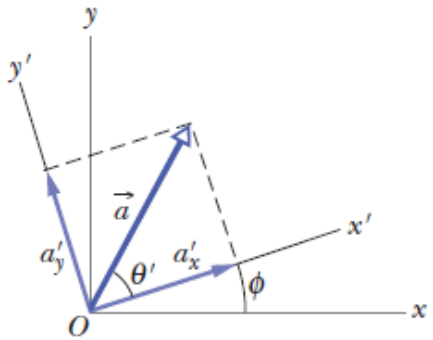
Este é o resultado da adição.

Vetores e as leis da física



(a)

Girando os eixos as componentes se alteram, mas não o vetor.



3-3 Multiplicação de vetores

- 3 formas de multiplicar
  - Multiplicação por um escalar
  - Multiplicação por um vetor
    - Produto escalar
    - Produto vetorial

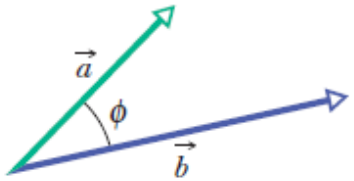
Multiplicação de um vetor por um escalar

- Mantém a direção do vetor original
- Módulo é o módulo do vetor original multiplicado pelo valor absoluto do escalar
- Dependendo do sinal do escalar pode inverter o sentido

Multiplicação de um vetor por outro vetor

- O produto escalar

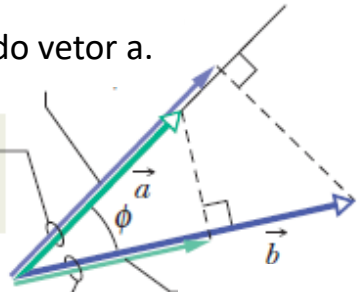
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi$$



(a)

Componente do vetor b ao longo da direção de do vetor a.

Multiplicando estes obtém-se o produto escalar.



Componente do vetor a ao longo da direção de do vetor b.

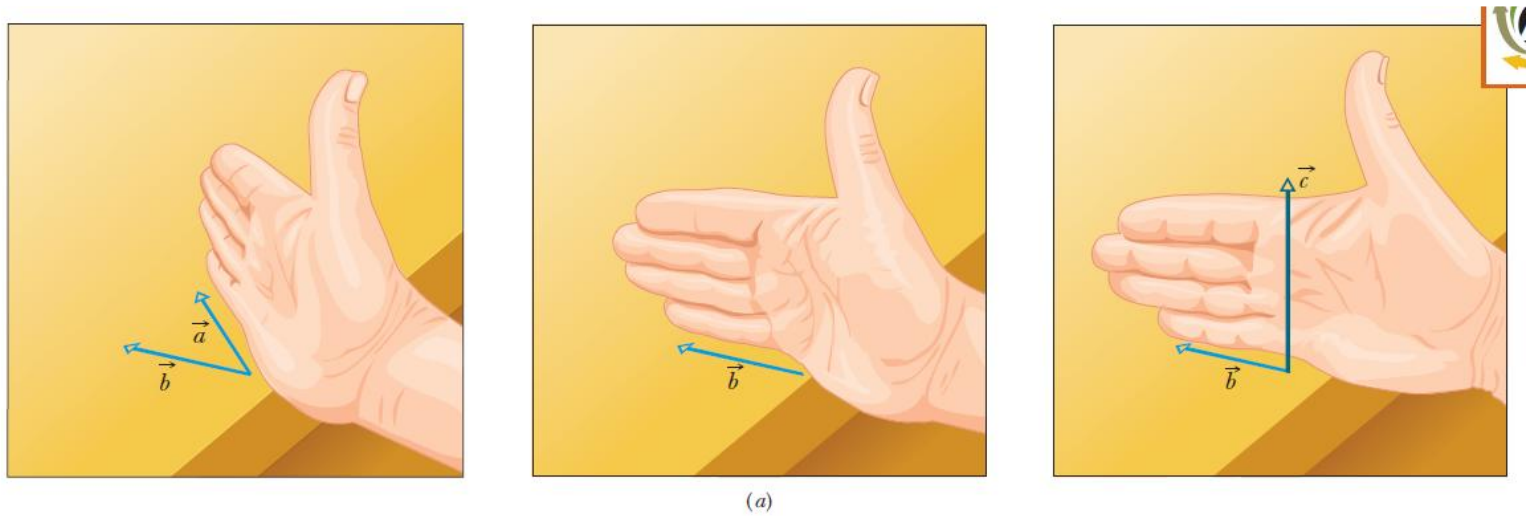
Ou multiplicando estes obtém-se o produto escalar.

(b)

O produto vetorial

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$c = ab \operatorname{sen} \phi$$

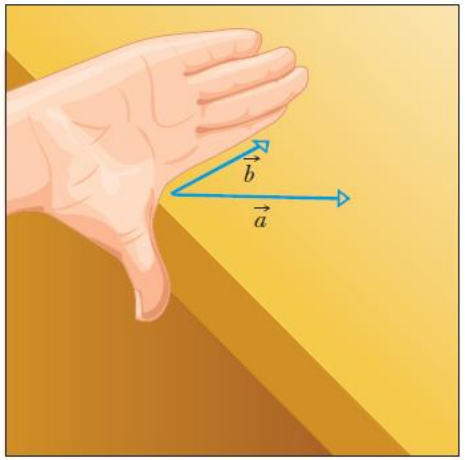


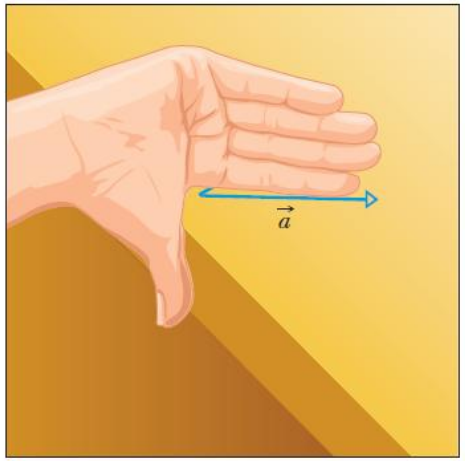
(a)

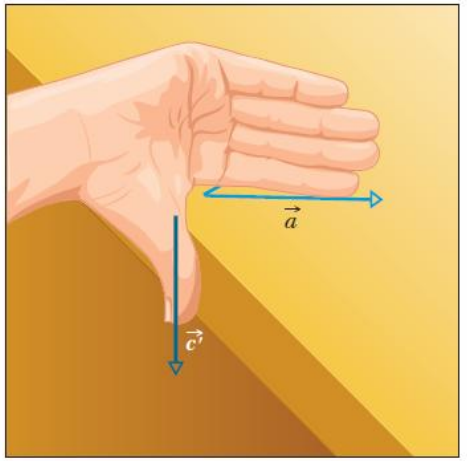
O produto vetorial

$$\vec{c} = \vec{b} \times \vec{a}$$

$$c = ab \operatorname{sen} \phi$$







O produto vetorial

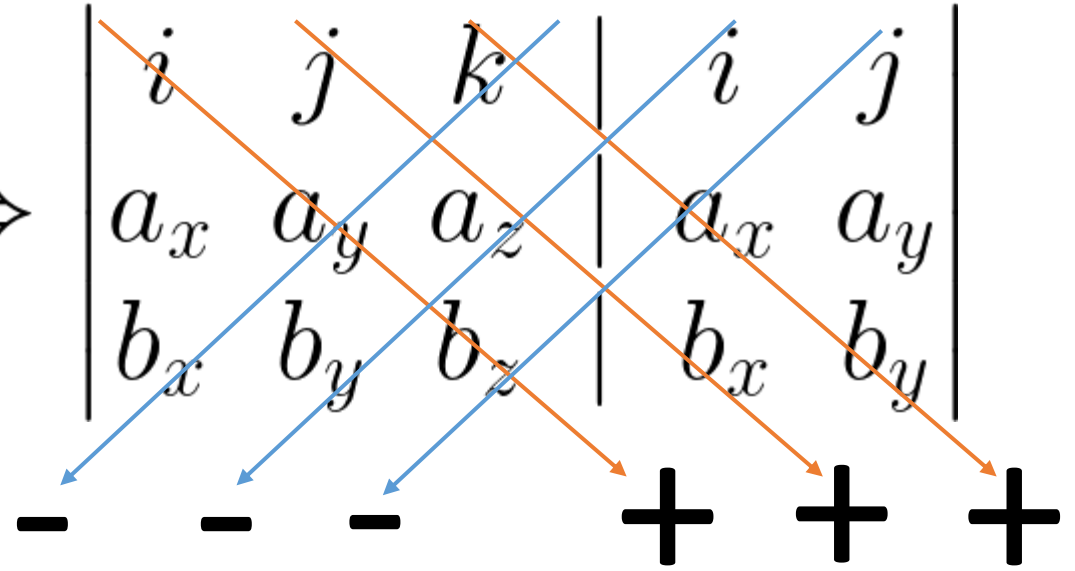
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{k}$$

O produto vetorial: usando determinante (Sarrus)

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ a_x & a_y & a_z & a_x & a_y \\ b_x & b_y & b_z & b_x & b_y \end{vmatrix}$$



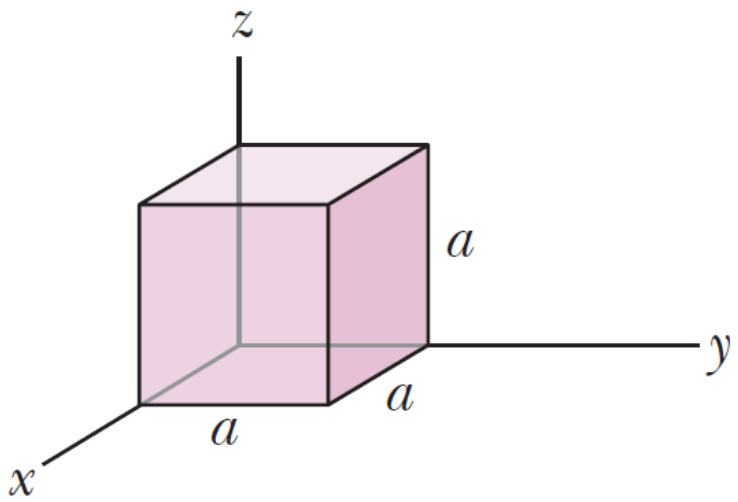
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{k}$$

Exemplo

Na figura abaixo, um cubo com aresta ***a*** está posicionado com um de seus vértices na origem de um sistema de coordenadas ***xyz***. Uma diagonal principal é uma linha que se estende de um dos vértices até o vértice oposto passando pelo centro do cubo. Na notação de vetores unitários, qual é a diagonal principal que se estende a partir da coordenada (a) (0, 0, 0); (b) coordenada (a, 0, 0) ; (c) coordenada (0, a, 0); e (d) coordenada (a, a, 0)?

(e) Determine os ângulos que estas diagonais fazem com as arestas adjacentes.

(f) Determine o comprimento da diagonal principal em termos de ***a***.



Lista de exercícios

Halliday 9ª. Edição

Cap. 3:

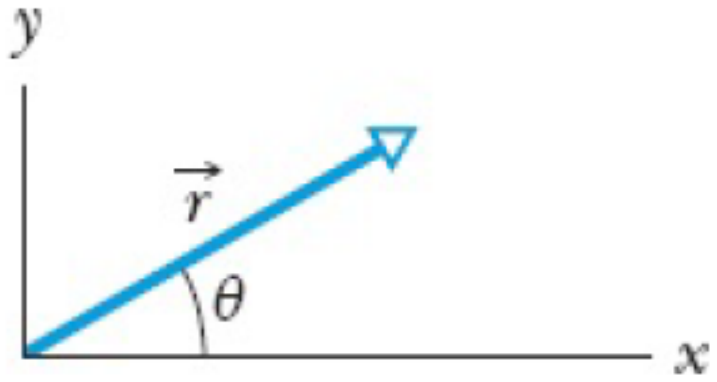
Problemas 2; 7; 13; 29; 31; 40; 49; 51

OU

Halliday 10ª. Edição
Cap. 3:
Problemas 2; 64; 13; 29; 32; 40; 49; 51

Problema 3-2

Um vetor deslocamento **r** no plano xy tem 15 m de comprimento e faz um ângulo θ = 30° com o semieixo x positivo, como mostra a Fig. 3-26. Determine (a) a componente x e (b) a componente y do vetor.



Problema 3-64

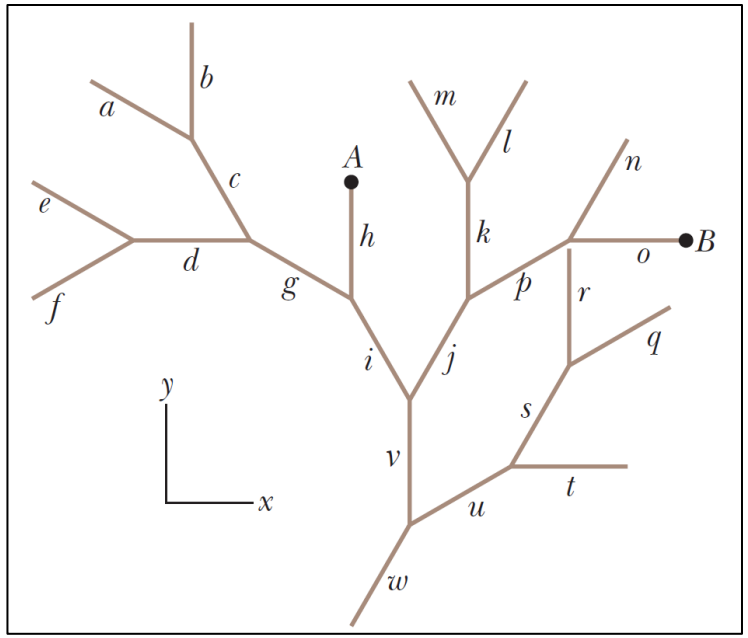
As dimensões de uma sala são 3,00 m (altura) × 3,70 m × 4,30 m. Uma mosca parte de um canto da sala e pousa em um canto diagonalmente oposto. (a) Qual é o módulo do deslocamento da mosca? (b) A distância percorrida pode ser menor que este valor? (c) Pode ser maior? (d) Pode ser igual? (e) Escolha um sistema de coordenadas apropriado e expresse as componentes do vetor deslocamento na notação dos vetores unitários. (f) Se a mosca caminhar, em vez de voar, qual é o comprimento do caminho mais curto para o outro canto? (Sugestão: O problema pode ser resolvido sem fazer cálculos complicados. A sala é como uma caixa; desdobre as paredes para representá-las em um mesmo plano antes de procurar uma solução.)

Problema 3-13

Uma pessoa deseja chegar a um ponto que está a 3,40 km da localização atual, em uma direção 35,0° ao norte do leste. As ruas por onde a pessoa pode passar são todas na direção norte-sul ou na direção leste-oeste. Qual é a menor distância que essa pessoa precisa percorrer para chegar ao destino?

Problema 3-29

Para se orientarem, as formigas de jardim costumam criar uma rede de trilhas marcadas por feromônios. Partindo do formigueiro, cada uma dessas trilhas se bifurca repetidamente em duas trilhas que formam entre si um ângulo de 60º. Quando uma formiga perdida encontra uma trilha, ela pode saber em que direção fica o formigueiro ao chegar ao primeiro ponto de bifurcação. Se estiver se afastando do formigueiro, encontrará duas trilhas que formam ângulos pequenos com a direção em que estava se movendo, 30º para a esquerda **e** 30º para a direita. Se estiver se aproximando do formigueiro, encontrará apenas uma trilha com essa característica, 30º para a esquerda **ou** 30º para a direita. A figura ao lado mostra uma rede de trilhas típica, com segmentos de reta de 2,0 cm de comprimento e bifurcações simétricas de 60º. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação ao semieixo x positivo) do deslocamento, até o formigueiro (encontre-o na figura e marque com a letra F (maiúscula)), de uma formiga que entra na rede de trilhas no ponto A. Determine (c) o módulo e (d) o ângulo de uma formiga que entra na rede de trilhas no ponto B.

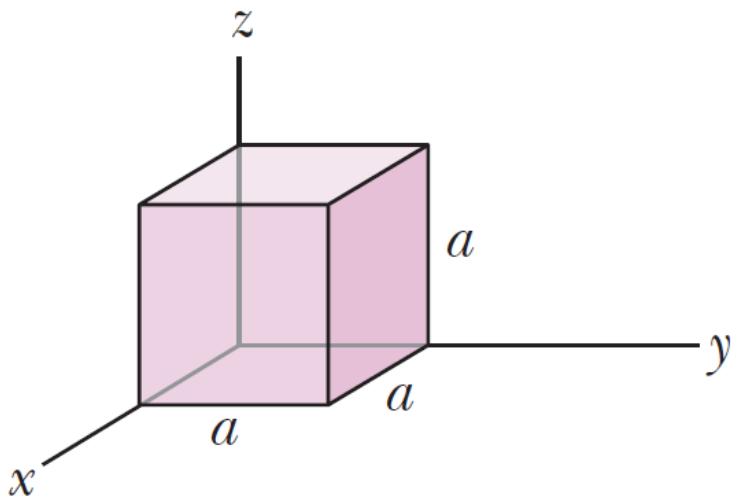


Problema 3-32

Na figura abaixo, um cubo com aresta ***a*** está posicionado com um de seus vértices na origem de um sistema de coordenadas ***xyz***. Uma diagonal principal é uma linha que se estende de um dos vértices até o vértice oposto passando pelo centro do cubo. Na notação de vetores unitários, qual é a diagonal principal que se estende a partir da coordenada (a) (0, 0, 0); (b) coordenada (a, 0, 0) ; (c) coordenada (0, a, 0); e (d) coordenada (a, a, 0)?

(e) Determine os ângulos que estas diagonais fazem com as arestas adjacentes.

(f) Determine o comprimento da diagonal principal em termos de ***a***.



Problema 3-40

O deslocamento $\mathbf{d}_1$ está no plano yz, faz um ângulo de 63,0° com o semieixo y positivo, tem uma componente z positiva e tem um módulo de 4,50 m. O deslocamento $\mathbf{d}_2$ está no plano xz, faz um ângulo de 30,0° com o semieixo x positivo, tem uma componente z positiva e tem um módulo de 1,40 m. Determine (a) $\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2$; (b) $\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2$ e (c) o ângulo entre $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$.

Problema 3-49

Um barco a vela parte do lado norte-americano do lago Erie para um ponto no lado canadense, 90,0 km ao norte. O navegante, contudo, termina 50,0 km a leste do ponto de partida. (a) Que distância e (b) em que direção deve navegar para chegar ao ponto desejado?

Problema 3-51

Uma falha geológica é uma ruptura ao longo da qual faces opostas de uma rocha deslizaram uma em relação à outra. Na Figura abaixo, os pontos A e B coincidiam antes de a rocha em primeiro plano deslizar para a direita. O deslocamento total **AB** está no plano da falha. A componente horizontal de **AB** é o rejeito horizontal AC. A componente de **AB** dirigida para baixo no plano da falha é o rejeito de mergulho AD.

(a) Qual é o módulo do deslocamento total **AB** se o rejeito horizontal é 22,0 m e o rejeito de mergulho é 17,0 m? (b) Se o plano da falha faz um ângulo $\phi = 52{,}0°$ com a horizontal, qual é a componente vertical de **AB**?

