FISC-7018–Física Quântica II – Primeira Lista de Exercícios (T1)

Exercícios do livro: 5.1, 5.4, 5.7, 5.10, 5.12, 5.14-5.17, 5.23-5.25, 5.27-5.32, 5.36-5.40, 5.42, 5.47, 5.51.

Exercícios adicionais sobre método variacional:

Problema 1) Considere um oscilador harmônico unidimensional de massa m e frequência ω. Estime a energia do estado fundamental, com o emprego do método variacional, usando como função tentativa:

$$\text{a) } \widetilde{\psi}(x) = \frac{N}{x^2 + a^2}$$

$$\text{b) } \widetilde{\psi}(x) = \begin{cases} N(1 - |x|/a), \text{se } |x| \leq a \\ 0, \text{se } |x| > a \end{cases}$$

onde a é o parâmetro variacional e N é a constante de normalização. De quanto é o erro cometido em cada caso? A energia exata é $\hbar\omega/2$. **Cuidado com a derivada segunda da função** $|x|$.

Problema 2) Estime a energia do estado fundamental ($l = 0$) de um oscilador harmônico tridimensional isorópico e do átomo de Hidrogênio usando como função tentativa:

$$\text{a)} \widetilde{R}(r) = N \exp(-\beta r^2); \ \text{b)} \widetilde{R}(r) = N \exp(-\beta r)$$

nde β é o parâmetro variacional e N é a constante de normalização. De quanto é o erro cometido em cada caso? A energia exata do oscilador é $3\hbar\omega/2$ e do átomo de Hidrogênio é $-me^4/2\hbar^2$.

Problema 3) Use o método variacional para estimar a energia do estado fundamental de uma partícula de massa m sujeita ao potencial:

$$V(y) = \begin{cases} mgy & \text{se } y > 0 \\ +\infty & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

Adote como função tentativa:

$$\widetilde{\psi}(y) = Ny \exp(-\alpha y)$$

onde N é a constante de normalização e α é o parâmetro variacional. Compare o resultado obtido com o resultado exato de $2,338(mg^2\hbar^2/2)^{1/3}$.

Problema 4) O princípio variacional diz que o valor esperado de H no estado $|\psi\rangle$ é maior ou igual a E_0, a energia (exata) do estado fundamental do sistema, a igualdade ocorrendo apenas se $|\psi\rangle = |\psi_0\rangle$, onde $H|\psi_0\rangle = E_0|\psi_0\rangle$. Mostre que, se $|\psi\rangle$ diferir do ket $|\psi_0\rangle$ de uma quantidade ϵ, ou seja

$$|\psi\rangle = |\psi_0\rangle + \epsilon|\phi\rangle$$

então $\langle H \rangle$ calculado no estado $|\psi\rangle$ irá diferir de E_0 por uma quantidade de ordem ϵ^2.
Dica: escreva $\langle H \rangle = E_0 + \epsilon E^{(1)} + \epsilon^2 E^{(2)}$, onde

$$\langle H \rangle = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

Para facilitar, parta da expressão

$$\langle \psi | \psi \rangle \langle H \rangle = \langle \psi | H | \psi \rangle$$

e lembre-se de que H é Hermiteano.