LISTA DE EXERCÍCIOS (capítulo 6 do Marion)

Para os cálculos de comprimento de arco use o seguinte resultado de integrais curvilíneas:

$$\Delta l = \int_C ds = \int_a^b \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt \text{ em que } x = g(t) \text{ e } y = h(t) \text{ e } a \leq t \leq b$$

funcionais e equação de Euler

I) Encontre a equação diferencial obedecida pela função que fornece o extremo dos funcionais: (a) $I[y] = \int_a^b (y'^2 - y)\, dx$; (b) $I[y] = \int_a^b (y'^2 e^x - y^4)\, dx$; (c) $I[y] = \int_a^b (e^{y'} \cos x - y^2 y')\, dx$. *Resp:* (a) $y'' + 1/2 = 0$, (b) $y'' + y' + 2e^{-x}y^3 = 0$, (c) $y'' - \tan x = 0$. Admita que os valores de $y(x)$ estão fixados nos pontos extremos, por exemplo $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$.

II) Em sala vimos que $y_c(x) = \cos x$ fornece o extremo do funcional $I[y] = \int_0^{\pi/2} (y^2 - y'^2)\, dx$, com $y(0) = 1$ e $y(\pi/2) = 0$. (a) Mostre que a função $y(x) = \cos(x) + A\sin(2x)$ satisfaz as condições de contorno; (b) calcule o valor do funcional e mostre que o valor obtido é menor que $I[y_c]$ para qualquer valor de A. (c) porque você não obtém um termo linear em A no valor do funcional? *Resp:* $-3A^2\pi/4$.

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{3}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^3 x\, dx = \frac{2}{3},$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 2x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 2x\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

geodésicas e comprimentos de arco

3) Aqui você escreverá o funcional do comprimento de arco entre a origem e (x_f, y_f, z_f) em termos das funções $x(z)$ e $y(z)$. O funcional depende de 2 funções, leia a seção 6.5 do livro.

6) Cuidado aqui. O ponto de partida não é a origem. A expressão de $v(x)$ não é a mesma usada em aula.

III) Calcule o comprimento total da curva ciclóide. Use a parametrização $x = a(1 - \cos\theta)$ e $y = a(\theta - \sin\theta)$. Escreva ds em termos de θ e $d\theta$ e integre de $\theta = 0$ até 2π. *Resp:* $8a$.

IV) Encontre a geodésica sobre um cilindro de raio a. O ponto inicial é (a,0,0) e o ponto final $(a\cos\theta_0, a\sin\theta_0, z_f)$. Você usará coordenadas cilíndricas $(x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, z)$ e tentará descobrir a função $z(\theta)$ (com $z(0) = 0$ e $z(\theta_0) = z_f$) que leva ao menor comprimento. Escreva $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ em termos de $d\theta$ e $dz/d\theta$ e obtenha o funcional do comprimento. *Resp:* $z(\theta) = z_f\theta/\theta_0$.

multiplicadores de Lagrange

V) Use o método de multiplicadores de Lagrange para encontrar o mínimo de $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$ ao longo da reta $y = 2x$. Desenhe as superfícies de nível de $f(x, y)$, a reta e localize o ponto de mínimo no desenho. Calcule o valor de f no mínimo. *Resp:* $x = 1/5$ e $y = 2/5$; $f = 4/5$.

VI) Use o método de multiplicadores de Lagrange para encontrar o mínimo de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$ ao longo do plano $z = x + y$. Calcule o valor de F no mínimo. *Resp:* $x = 1/3$, $y = 1/3$ e $z = 2/3$; $f = 1/3$.

10) $R = H/2$.

PROBLEMS

6-1. Consider the line connecting $(x_1, y_1) = (0, 0)$ and $(x_2, y_2) = (1, 1)$. Show explicitly that the function $y(x) = x$ produces a minimum path length by using the varied function $y(\alpha, x) = x + \alpha \sin \pi(1 - x)$. Use the first few terms in the expansion of the resulting elliptic integral to show the equivalent of Equation 6.4.

6-2. Show that the shortest distance between two points on a plane is a straight line.

6-3. Show that the shortest distance between two points in (three-dimensional) space is a straight line.

6-4. Show that the geodesic on the surface of a right circular cylinder is a segment of a helix.

6-5. Consider the surface generated by revolving a line connecting two fixed points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) about an axis coplanar with the two points. Find the equation of the line connecting the points such that the surface area generated by the revolution (i.e., the area of the surface of revolution) is a minimum. Obtain the solution by using Equation 6.39.

6-6. Reexamine the problem of the brachistochrone (Example 6.2) and show that the time required for a particle to move (frictionlessly) to the *minimum* point of the cycloid is $\pi\sqrt{a/g}$, *independent* of the starting point.

6-7. Consider light passing from one medium with index of refraction n_1 into another medium with index of refraction n_2 (Figure 6-A). Use Fermat's principle to minimize time,

6-8. Find the dimensions of the parallelepiped of maximum volume circumscribed by **(a)** a sphere of radius R; **(b)** an ellipsoid with semiaxes a, b, c.

6-9. Find an expression involving the function $\phi(x_1, x_2, x_3)$ that has a minimum average value of the square of its gradient within a certain volume V of space.

6-10. Find the ratio of the radius R to the height H of a right-circular cylinder of fixed volume V that minimizes the surface area A.

6-11. A disk of radius R rolls without slipping inside the parabola $y = ax^2$. Find the equation of constraint. Express the condition that allows the disk to roll so that it contacts the parabola at one and only one point, independent of its position.

6-12. Repeat Example 6.4, finding the shortest path between any two points on the surface of a sphere, but use the method of the Euler equations with an auxiliary condition imposed.