

A interação spin-órbita e a precessão de Thomas

R. L. Viana,
Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná,
Curitiba, Paraná, Brasil

1 Introdução

A interação spin-órbita consiste no acoplamento entre o momento magnético do elétron e o campo magnético gerado sobre o elétron pelo movimento do núcleo atômico. O cálculo deste campo pode ser feito considerando uma transformação de Lorentz entre os referenciais do elétron e do núcleo, mas a energia potencial resultante deste cálculo é o dobro da correta [1]. A origem deste fator 1/2 está em um efeito denominado precessão de Thomas, que ocorre justamente por que os referenciais do elétron e do núcleo não são inerciais (classicamente o elétron está em movimento circular em torno do núcleo) [4].

Os livros-texto sobre Mecânica Quântica costumam evitar a discussão deste tema, remetendo o leitor a livros especializados sobre relatividade ou eletromagnetismo [2]. De fato, a dedução formal da precessão de Thomas é bastante trabalhosa, mas há deduções mais simples, como a apresentada na Referência [3] que, por sua vez, é baseada numa sugestão do Prêmio Nobel em Física e autor renomado Edward Purcell. Nestas notas mostrarei esta dedução, bem como seu papel na explicação do fator 1/2 que vem da precessão de Thomas.

2 Interação spin-órbita

Vamos considerar a interação spin-órbita sob o ponto de vista da estrutura fina do átomo de Hidrogênio, ou seja, não-relativisticamente [1]. No entanto, sabe-se que este efeito, bem como outros, surgem naturalmente a partir da equação de Dirac para o elétron [5]. No referencial do próton (núcleo de Hidrogênio) este cria um campo eletrostático

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{q} \frac{dV(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1)$$

onde $q = -1,6 \times 10^{-19}C$ é a carga do elétron (em unidades SI), e $V(r)$ é a energia potencial eletrostática. Por outro lado, como o próton está em repouso não há campo magnético neste referencial ($\mathbf{B} = \mathbf{0}$).

Já no referencial do elétron é o próton que está em movimento, donde esperamos que o elétron “sinta” tanto um campo elétrico como um campo magnético. Ignorando por enquanto o fato de que os referenciais do próton e do elétron **não** são inerciais, vamos aplicar

as transformações de Lorentz para os campos magnéticos nas direções instantâneas paralela e perpendicular ao movimento do elétron são, respectivamente, [6]

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad (2)$$

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right). \quad (3)$$

onde \mathbf{v} é a velocidade do elétron $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ é o fator de Lorentz. Supondo que a velocidade do elétron seja muito menor que c , o fator de Lorentz é praticamente igual a um. Como $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ resulta que o campo magnético no referencial do elétron será

$$\mathbf{B}' = -\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (4)$$

O elétron possui um momento magnético intrínseco, devido a seu spin, dado por

$$\mathbf{M}_s = \frac{q}{m_e} \mathbf{S}, \quad (5)$$

onde $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{kg}$ é a massa de repouso do elétron. No referencial do elétron, a energia potencial de interação com o campo magnético será

$$W' = -\mathbf{M}_s \cdot \mathbf{B}' \quad (6)$$

Se $v \ll c$ então o momentum linear do elétron será $\mathbf{p} \approx m_e \mathbf{v}$. Assim, substituindo (4) em (6) temos

$$W' = \frac{1}{m_e^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \quad (7)$$

onde $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ é o momentum angular orbital do elétron.

Supondo uma interação Coulombiana da forma

$$V(r) = -\frac{e^2}{r}, \quad e^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}, \quad (8)$$

a energia potencial será

$$W' = \frac{e^2}{m_e^2 c^2} \frac{1}{r^3} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}. \quad (9)$$

No entanto, como os referenciais do próton e do elétron não são inerciais, a expressão anterior não é inteiramente correta. Em 1926 Llewelyn Thomas demonstrou que, devido ao movimento relativo circular, o spin do elétron precessiona em relação ao referencial do próton, o que introduz um fator $1/2$ na expressão acima [4], de modo que a expressão correta é

$$W_{so} = \frac{e^2}{2m_e^2 c^2} \frac{1}{r^3} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}. \quad (10)$$

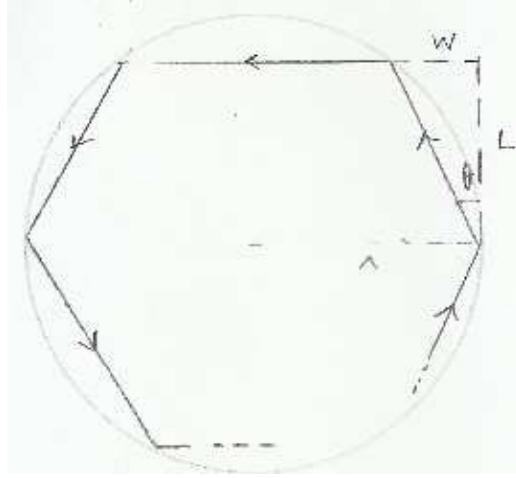


Figura 1: Aproximando um círculo por um polígono regular de N lados.

3 Precessão de Thomas

Pode-se mostrar formalmente que duas transformações de Lorentz ao longo de direções diferentes são equivalentes a uma única transformação de Lorentz mais uma rotação tridimensional. A precessão de Thomas é justamente a rotação do referencial próprio, ou de repouso, da partícula em movimento circular uniforme. Logo é um efeito relativístico puramente cinemático.

A velocidade do elétron no referencial do próton pode ser escrita como

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (11)$$

onde $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular do elétron, cujo módulo é

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{T}, \quad (12)$$

onde T é o período do movimento circular. Haverá também uma aceleração centrípeta $\mathbf{a} = -(v^2/r)\hat{\mathbf{r}}$, de modo que

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{v^2}. \quad (13)$$

Para determinarmos a velocidade angular correspondente ao referencial girante (que é o referencial próprio do elétron), conforme a Ref. [3] nós aproximamos a trajetória circular por um polígono regular de N lados, quando $N \rightarrow \infty$ [Fig. 1]. Para cada lado há um triângulo retângulo de catetos iguais a L e w , com abertura angular

$$\tan \theta = \frac{w}{L}.$$

O elétron percorre cada um dos N lados do polígono, de modo a varrer um ângulo $\theta = 2\pi/N$ em cada lado. Após percorrer os N lados, o elétron varrerá um ângulo $N\theta = 2\pi$ no referencial do próton.

Já no referencial do elétron, cada lado do polígono forma um triângulo cujo lado paralelo à direção instantânea de movimento sofre uma contração de Lorentz: $L' = L/\gamma$, enquanto o lado perpendicular à direção do movimento não é alterado: $w' = w$. Logo, após percorrer cada lado do polígono o ângulo θ' será tal que

$$\tan \theta' = \frac{w'}{L'} = \gamma \frac{w}{L} = \gamma \tan \theta$$

Se N é grande podemos aproximar o ângulo (em radianos) pela sua tangente, de modo que $\theta' \approx \gamma \theta = \gamma(2\pi/N)$. Ao cabo de N segmentos do polígono o ângulo total de rotação no referencial do elétron será $N\theta' = 2\pi\gamma$. Assim, a diferença entre os ângulos medidos nos referenciais do próton e do elétron será, após uma volta completa,

$$\Delta\theta = 2\pi\gamma - 2\pi = 2\pi(\gamma - 1).$$

Como este resultado não depende de N , então ele deverá valer para o círculo, que é o caso onde $N \rightarrow \infty$. A frequência angular no referencial girante do elétron, ou frequência de Thomas, será

$$\omega_T = \frac{\Delta\theta}{T} = \frac{2\pi}{T}(\gamma - 1) = \omega_T(\gamma - 1),$$

ou ainda, usando (13),

$$\boldsymbol{\omega}_T = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{c^2}. \quad (14)$$

Para baixas velocidades ($v \ll c$) esta expressão se reduz a

$$\boldsymbol{\omega}_T \approx \frac{1}{2} \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{c^2}. \quad (15)$$

No movimento circular do elétron em torno do próton, a aceleração centrípeta é causada pela força eletrostática sobre o elétron, que é

$$\mathbf{a} = \frac{q\mathbf{E}}{m_e} = -\frac{1}{m_e} \frac{dV(r)}{dr} \hat{\mathbf{r}}, \quad (16)$$

de modo que

$$\mathbf{a} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{m_e^2 r} \frac{dV(r)}{dr} \mathbf{L}, \quad (17)$$

e substituindo em (15) obtemos

$$\boldsymbol{\omega}_T = -\frac{1}{2m_e^2 c^2 r} \frac{dV(r)}{dr} \mathbf{L}. \quad (18)$$

4 Corrigindo a interação spin-órbita

Quando um dipolo magnético é colocado num campo magnético externo \mathbf{B} ele experimenta um torque $\mathbf{N} = \mathbf{M}_s \times \mathbf{B}$. A energia potencial associada a este torque é $W' = -\mathbf{M}_s \cdot \mathbf{B}$ no referencial do elétron. O torque provoca, pela segunda lei de Newton, uma variação no momentum angular. No caso do spin, esta variação é dada, no referencial girante do elétron, por

$$\left(\frac{d\mathbf{S}}{dt}\right)_{\text{girante}} = \mathbf{N} = -\frac{q}{m_e} \mathbf{B}' \times \mathbf{S}. \quad (19)$$

Na cinemática das rotações, pode-se mostrar que a variação do momentum angular no referencial fixo do próton é dada por

$$\left(\frac{d\mathbf{S}}{dt}\right)_{\text{fixo}} = \left(\frac{d\mathbf{S}}{dt}\right)_{\text{girante}} + \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{S}. \quad (20)$$

Substituindo (19) em (20) obtemos

$$\left(\frac{d\mathbf{S}}{dt}\right)_{\text{fixo}} = -\frac{q}{m_e} \mathbf{B}' \times \mathbf{S} + \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{S}. \quad (21)$$

de modo que a energia potencial no referencial do próton será

$$W_{so} = W' + \boldsymbol{\omega}_T \cdot \mathbf{S} \quad (22)$$

Usando (7) e (18) teremos

$$W_{so} = \frac{1}{m_e^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} - \frac{1}{2m_e^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2m_e^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}, \quad (23)$$

e que, no caso de uma interação Coulombiana, reduz-se à expressão correta (10).

Referências

- [1] C. Cohen-Tannoudji, Laloe, Diu, *Quantum Mechanics*, Vol. 2
- [2] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd. Ed. (Wiley, New York,)
- [3] G. F. Smoot, notas de aula (não-publicadas). [https://jila.colorado.edu/arey/sites/default/files/files/seven\(1\).pdf](https://jila.colorado.edu/arey/sites/default/files/files/seven(1).pdf)
- [4] L. T. Thomas, *Phil. Mag.* **3**, 1 (1927)
- [5] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. London A* **117**, 610 (1928). O termo spin-órbita (com o fator 1/2 incluído) aparece abaixo da equação (28'), pg. 624.
- [6] D. Griffiths, *Eletrodinâmica*