Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Física
CF373: Mecânica Quântica II

Segunda Lista de Exercícios
Adição de momenta angulares

1. Sejam dois operadores de momentum angular $\mathbf{J}_1$ e $\mathbf{J}_2$. Na ausência de acoplamento entre eles, ambos comutam com o Hamiltoniano H_0 do sistema, e é mais conveniente usar a base dos autokets $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ simultâneos. Suponha, porém, que haja um acoplamento entre $\mathbf{J}_1$ e $\mathbf{J}_2$, como por exemplo no hamiltoniano

$$H = H_0 + \alpha \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2,$$

onde α é uma constante de acoplamento. Neste caso é mais conveniente trabalhar com a base dos autokets $|J, M\rangle$ para o momentum angular total $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$. Mostre que $|J, M\rangle$ são autokets do operador $\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2$ e determine os autovalores correspondentes. Por este motivo é costume chamar a base $\{|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle\}$ de representação desacoplada e a base $\{|J, M\rangle\}$ de representação acoplada.
2. Um sistema de dois momenta angulares, $j_1 = 1$ e $j_2 = 1/2$, é descrito pela base $|1, 1/2, m_1, m_2\rangle$. O sistema está num autoestado $|J, M\rangle$, onde $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ é momentum angular total. (a) Considere, em particular, o estado $|J = 3/2, M = 3/2\rangle$. Calcule a probabilidade de medir cada par de valores possíveis (m_1, m_2) e determine o valor esperado dos operadores J_{1z} e J_{2z}. (b) Repita o ítem anterior para o estado $|J = 1/2, M = 1/2\rangle$. (c) Calcule o valor esperado de J_y no estado do ítem (b).
3. Considere um sistema de duas partículas de spin 1/2 cujas variáveis orbitais podem ser ignoradas. O Hamiltoniano do sistema é

$$H = \varepsilon_1 \sigma_{1z} + \varepsilon_2 \sigma_{2z},$$

onde ε_1 e ε_2 são constantes reais. (a) O estado inicial do sistema é

$$|\psi(t = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+, -\rangle + |-, +\rangle \right).$$

O operador de spin total ao quadrado $\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2$ é medido no instante de tempo t. Que valores podem resultar dessas medidas e com que probabilidades? Ache o valor esperado de $\mathbf{S}^2$. (b) Se o estado do sistema for arbitrário, na forma

$$|\psi(t = 0)\rangle = \alpha|+, +\rangle + \beta|+, -\rangle + \gamma|-, +\rangle + \delta|-, -\rangle,$$

determine o valor esperado de $\mathbf{S}^2$; (c) Na situação do ítem (b), ache o valor esperado do operador $S_x = S_{1x} + S_{2x}$.
4. Obtenha os coeficientes de Clebsch-Gordan para os casos: (a) $j_1 = 2$, $j_2 = 1$; (b) $j_1 = 3/2$, $j_2 = 1/2$.

5. Neste problema você pode usar uma tabela de coeficientes de Clebsch-Gordan. (a) Uma partícula de spin 1 e uma partícula de spin 2 estão em repouso em uma configuração em que a soma total é 3 e a sua componente z é $\hbar$. Se medimos a componente z do momentum angular da partícula de spin 2 que valores poderemos obter e com quais probabilidades? (b) Um elétron com spin "para baixo" está no autoestado $n = 5$, $\ell = 1$, $m = 0$ do átomo de Hidrogênio. Se medíssemos o quadrado do momentum angular total do elétron quais os valores que poderíamos obter e com quais probabilidades? (c) Duas partículas de spins 2 e 1 estão em repouso numa caixa e o spin total do sistema é 3. Se a componente z do spin for nula, quais os resultados possíveis da medida da componente z do spin da partícula de spin 2 e com quais probabilidades? (d) Duas partículas de spins 3/2 e 1 são colocadas numa caixa. Sabendo-se que a primeira tem $m_1 = 1/2$ e a segunda, $m_2 = 0$, quais os valores possíveis para o quadrado do spin total e com quais probabilidades?
6. O elétron em um átomo de hidrogênio é descrito pela função de onda spinorial

$$\Psi = R_{21}(r)\left(\sqrt{\frac{1}{3}}Y_1^0(\theta,\phi)\chi_+ \sqrt{\frac{2}{3}}Y_1^1(\theta,\phi)\chi_-\right)$$

onde $\chi_\pm$ são os spinores elementares. (a) Se medirmos L^2 que valores poderemos obter e com quais probabilidades? (b) Idem para L_z, S^2 e S_z; (c) Sendo $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ o momentum angular total, idem para J^2 e J_z (você pode usar a tabela de coeficientes de Clebsch-Gordan); (d) Qual a densidade de probabilidade de encontrar o elétron? (e) Qual a densidade de probabilidade de encontrar o elétron no raio r e com spin "para cima"?

Respostas e sugestões

1.

$$\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2 |J, M\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left[J(J+1) - j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)\right]|J, M\rangle$$

2. (a) $\mathcal{P}(m_1 = 1, m_2 = 1/2) = 1$, e zero nos demais casos, $\langle J_{1z}\rangle = \hbar$, $\langle J_{2z}\rangle = \hbar/2$; (b) $\mathcal{P}(m_1 = 0, m_2 = 1/2) = \mathcal{P}(m_1 = 1, m_2 = -1/2) = 1/3$, e zero nos demais casos, $\langle J_{1z}\rangle = 2\hbar/3$, $\langle J_{2z}\rangle = -\hbar/6$; (c) $\langle J_y\rangle = 0$;
3. (a)

$$\mathcal{P}(S=0, M=0) = \sin^2\left[\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)t}{\hbar}\right], \qquad \mathcal{P}(S=1) = \cos^2\left[\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)t}{\hbar}\right], \qquad \langle \mathbf{S}^2\rangle = 2\hbar^2\cos^2\left[\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)t}{\hbar}\right]$$

(b)

$$\langle \mathbf{S}^2\rangle = 2\hbar^2\left\{|\alpha|^2 + |\delta|^2 + \frac{1}{2}\left(|\beta|^2 + |\gamma|^2\right) + \mathrm{Re}\left[\beta^*\gamma \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\mathrm{t}/\hbar}\right]\right\}$$

(c)

$$\langle S_x\rangle = \hbar\,\mathrm{Re}\left\{(\alpha^*\beta + \gamma^*\delta)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varepsilon_2\mathrm{t}/\hbar} + (\alpha^*\gamma + \beta^*\delta)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varepsilon_1\mathrm{t}/\hbar}\right\}$$

4. As respostas estão na tabela de coeficientes de Clebsch-Gordan
5. (a) $2\hbar$, com probabilidade 1/15; $\hbar$ com 8/15; 0 com 2/5; (b) $15\hbar^2/4$ com 2/3, $3\hbar^2/4$ com 1/3; (c) $\hbar$ com 1/5, 0 com 3/5, $-\hbar$ com 1/5; (d) $35\hbar^2/4$ com 3/5, $15\hbar^2/4$ com 1/15 e $3\hbar^2/4$ com 1/3.
6. (a) $2\hbar^2$ com probabilidade 1; (b) 0 com 1/3, 1 com 2/3; $3\hbar^2/4$ com 1; $\hbar/2$ com 1/3 e $-\hbar/2$ com 2/3; (c) $15\hbar^2/4$ com 8/9 e $3\hbar^2/4$ com 1/9, $\hbar/2$ com 1; (d) $r^2e^{-r/a}/96\pi a_0^3$; (e) $r^2e^{-r/a}/72a_0^3$