Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Física
CF373: Mecânica Quântica II

Primeira Lista de Exercícios
Spin do elétron

1. Demonstre as seguintes propriedades das matrizes de Pauli

(a) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I$

(b) $\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0$

(c) $[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$

(d) $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$

(e) $\mathrm{Tr}\,\sigma_\mathrm{x} = \mathrm{Tr}\,\sigma_\mathrm{y} = \mathrm{Tr}\,\sigma_\mathrm{z} = 0$

(f) $\det\sigma_x = \det\sigma_y = \det\sigma_z = -1$

(g) $A = a_0 I + \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, onde A é uma matriz 2×2, $a_0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr(A)}$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ é um símbolo e $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\mathrm{A}\boldsymbol{\sigma})$ é um vetor;

(h) A é uma matriz hermitiana se e somente se os coeficientes a_i forem reais.

(i) $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

2. Usando a base dos autokets de S_z: $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, mostre que podemos escrever os operadores de spin 1/2 como

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right), \qquad S_y = \frac{i\hbar}{2}\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right), \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right)$$

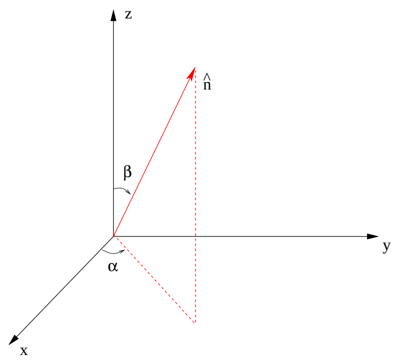
sendo os autokets de S_x e S_y dados por

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \pm |-\rangle\right), \qquad |\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \pm i|-\rangle\right)$$

3. (a) Considere dois kets de estado $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$. Suponha que os produtos internos $\langle a'|\alpha\rangle$, $\langle a''|\alpha\rangle$, etc. e $\langle a'|\beta\rangle$, $\langle a''|\beta\rangle$, etc. sejam conhecidos, onde $|a'\rangle$, $|a''\rangle$, etc. formam um conjunto completo de kets de base. Ache a representação matricial do operador $X = |\alpha\rangle\langle\beta|$ nesta base. (b) Considere, agora, um sistema de spin 1/2 e sejam $|\alpha\rangle = |+\rangle$ e $|\beta\rangle = |+\rangle_x$. Determine a matriz quadrada que corresponde ao operador $|\alpha\rangle\langle\beta|$ na base dos autokets de S_z.

4. Considere a direção no espaço especificada pelo vetor unitário $\hat{\mathbf{n}}$, conforme a figura. Construa o ket correspondente ao estado onde o operador $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ tem o autovalor $\hbar/2$, ou seja

$$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}|+\rangle_{\hat{\mathbf{n}}} = \frac{\hbar}{2}|+\rangle_{\hat{\mathbf{n}}}$$



5. Sabe-se que um dado sistema de spin 1/2 está num autoestado do operador $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ com autovalor $\hbar/2$, onde $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário que jaz no plano xz e faz um ângulo γ com o eixo z-positivo. (a) Suponha que medimos S_x para este sistema. Qual a probabilidade de obtermos o valor $+\hbar/2$? (b) Calcule o valor esperado de S_x; (c) Determine a dispersão de S_x, ou seja, a quantidade

$$\langle (\Delta S_x)^2 \rangle = \langle S_x^2 \rangle - \langle S_x \rangle^2$$

(d) Confira seu resultado para os casos particulares $\gamma = 0$, $\pi/2$ e π.

6. (a) Compute a dispersão dos operadores S_x e S_y se o sistema estiver no estado em que $S_z = +\hbar/2$. (b) Usando seu resultado, confira se ele satisfaz a relação de incerteza de Heisenberg generalizada:

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle |[A, B]\rangle|^2,$$

com $A \to S_x$ e $B \to S_y$. (c) Repita os ítens precedentes se o sistema estiver no estado em que $S_x = +\hbar/2$.

7. Considere a direção espacial especificada no Problema 4. (a) Compute os valores esperados dos operadores de spin S_x, S_y e S_z em relação ao estado $|+\rangle_{\hat{\mathbf{n}}}$ e as respectivas dispersões. (b) Determine o produto de incertezas

$$\langle (\Delta S_x)^2 \rangle \langle (\Delta S_y)^2 \rangle$$

e ache a direção que maximiza o mesmo. (c) Verifique, no caso do ítem (b), a relação de incerteza generalizada.

8. Suponha que um elétron esteja no estado representado pelo spinor a duas componentes

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Quais são as probabilidades de, numa medida de S_z, serem obtidos os valores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$? (b) E de S_x? (c) Calcule o valor esperado de S_x.

9. Um elétron está sujeito a um campo magnético constante e uniforme $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. Ignorando o seu movimento orbital, o Hamiltoniano do elétron é

$$H = -\mathbf{M}_s \cdot \mathbf{B} = \frac{g_s \mu_B}{2} \sigma_z B,$$

onde $g_s \approx 2$ é a razão giromagnética para o spin do elétron e μ_B é o magneton de Bohr. No instante inicial sabe-se que o elétron encontra-se num autoestado do operador $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ com autovalor $\hbar/2$, onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário dado pelo problema 4, com $\alpha = 0$. (a) Ache o autoket normalizado que representa o estado inicial do elétron; (b) Obtenha o ket de estado como função do tempo, resolvendo a equação de Schrödinger

$$H|\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle;$$

(c) Determine a probabilidade de, numa medida de S_x, obtermos o valor $\hbar/2$, como função do tempo; (d) Calcule o valor esperado de S_x como função do tempo; (e) Analise os casos particulares $\beta \to 0$ e $\beta \to \pi/2$.

10. Um elétron é descrito pelo spinor

$$\chi = A \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine a constante de normalização A; (b) Ache os valores esperados de S_x, S_y e S_z; (c) Calcule das dispersões destes operadores; (d) Verifique todas as relações de incerteza generalizadas.

Respostas e sugestões

1. O traço de uma matriz é a soma dos seus elementos diagonais. O adjunto hermitiano de uma matriz é o complexo-conjugado de sua transposta. Uma matriz hermitiana é igual à sua adjunta.

3. (a) $X_{ij} = \langle a_i|\alpha\rangle\langle a_i|\beta\rangle^*$

(b)

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

$$|\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}, +\rangle = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)|+\rangle + e^{i\alpha} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)|-\rangle$$

5. (a) $\mathcal{P}(a') = (1 + \sin\gamma)/2$; (b) $\langle S_x\rangle = (\hbar/2)\sin\gamma$; (c) $\langle(\Delta S_x)^2\rangle = (\hbar^2/4)\cos^2\gamma$; (d) $(\hbar^2/4)$ para $\gamma = 0$; 0 para $\gamma = \pi/2$; $(\hbar^2/4)$ para $\gamma = \pi$;

6. (a) $\langle(\Delta S_x)^2\rangle = \langle(\Delta S_y)^2\rangle = \hbar^2/4$; (c) $\langle(\Delta S_x)^2\rangle = 0$, $\langle(\Delta S_y)^2\rangle = \hbar^2/4$.

7. (a)

$$\langle(\Delta S_x)^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left(1 - \sin^2\beta\cos^2\alpha\right), \qquad \langle(\Delta S_y)^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left(1 - \sin^2\beta\sin^2\alpha\right),$$

(b)

$$P(\alpha, \beta) = \frac{\hbar^4}{16}\left(\cos^2\beta + \frac{1}{4}\sin^4\beta\sin^2 2\alpha\right),$$

(c) No caso $\alpha = \beta = \pi/4$ temos $P = 9\hbar^4/256$.

8. (a) medida de S_z: $\pm\hbar/2$ com probabilidades 1/3 e 2/3, respectivamente; (b) medida de S_x: $\pm\hbar/2$ com probabilidades 5/6 e 1/6, respectivamente; (c) $\hbar/3$.

9. (a)

$$|\psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sin\beta}{1+\cos\beta} \end{pmatrix},$$

(b)

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ \frac{\sin\beta}{1+\cos\beta} e^{i\omega t} \end{pmatrix},$$

(c) $\mathcal{P} = \frac{1}{2}(1+\sin\beta\cos 2\omega t)$; (d) $\langle S_x\rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\beta\cos 2\omega t$.

10. (a) $A = 1/5$; (b) 0, $-12\hbar/25$ e $-7\hbar/50$; (c) $\hbar^2/4$, $49\hbar^2/2500$ e $576\hbar^2/2500$.