

# O deslocamento de Lamb

R. L. Viana,  
Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná,  
Curitiba, Paraná, Brasil

## 1 Introdução

No estudo que fazemos em sala de aula sobre a estrutura fina do átomo de Hidrogênio destacamos uma degenerescência notável, por ser meramente acidental: a correção de energia em primeira ordem do nível  $n = 2$  devido à estrutura fina do átomo de Hidrogênio produz o mesmo resultado para os estados  $2s_{1/2}$  e  $2p_{1/2}$  [Fig. 1]. Em ambos os casos a energia do subnível diminui de uma mesma quantidade igual a [1]

$$-\frac{5}{128}m_e c^2 \alpha^4,$$

onde a constante de estrutura fina é  $\alpha \approx 1/137$ . Esta degenerescência continua válida em todas as ordens de perturbação.

Ainda mais notável é que a degenerescência permanece mesmo quando analisamos o problema sob o ponto de vista (relativístico) da equação de Dirac. A sua solução para o átomo de Hidrogênio fornece a seguinte expressão exata para a energia de um estado caracterizado pelos números quânticos  $n$  e  $J$  [4]

$$E_{n,J} = m_e c^2 \left\{ 1 + \alpha^2 \left[ n - J - \frac{1}{2} + \sqrt{\left( J + \frac{1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right]^{-2} \right\}^{-1/2}, \quad (1)$$

que mostra ser a energia dependente apenas de  $n$  e  $J$ , mas não de  $\ell$ .

Por outro lado, em 1947 Willis Lamb e Robert Retherford mediram uma minúscula separação de energia entre os subníveis  $2s_{1/2}$  e  $2p_{1/2}$  correspondendo a um fóton e frequência  $1060 MHz$  e comprimento de onda  $\lambda \approx 30 cm$ , na faixa de microondas. De acordo com esta separação, denominada deslocamento de Lamb, a energia do subnível  $2s_{1/2}$  é ligeiramente superior à do  $2p_{1/2}$ .

Também em 1947, Hans Bethe explicou o deslocamento de Lamb a partir da suposição que o elétron interage com as flutuações quânticas do campo eletromagnético, obtendo assim um retumbante sucesso para a teoria quântica do campo eletromagnético (eletrodinâmica quântica). É possível, no entanto, explicar a essência do deslocamento de Lamb a partir de argumentos similares aos empregados nas notas sobre o termo de Darwin [2], ou seja, considerando que a trajetória clássica do elétron esteja sujeita a flutuações estocásticas do campo eletromagnético [3], e que é o nosso objetivo nestas notas.

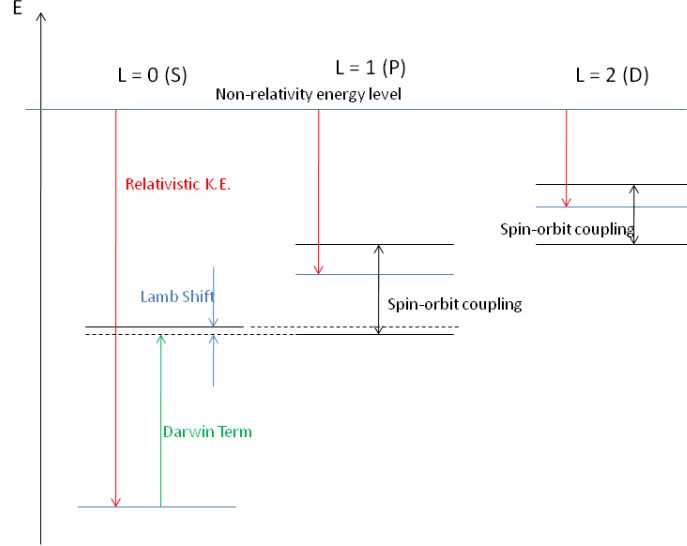


Figura 1: Correção devido aos vários termos de estrutura fina aos subníveis com  $n = 2$  do átomo de Hidrogênio.

## 2 Correção na energia devido às flutuações

Nas notas de aula sobre o termo de Darwin nós explicamos a natureza das flutuações quânticas do campo eletromagnético [2], e mostramos que elas fazem com que a trajetória clássica do elétron seja desviada de forma aleatória por flutuações que descrevemos pelo vetor  $\xi$  cujas médias têm as seguintes propriedades

$$\overline{\xi} = 0, \quad (2)$$

$$\overline{\xi_i \xi_j} = \frac{1}{3} \overline{\xi^2} \delta_{ij}. \quad (3)$$

Expandindo o  $V(\mathbf{r})$  nas vizinhanças da trajetória clássica, obtemos que a variação no potencial sentido pelo elétron devido a estas flutuações é dada por

$$\delta V(\mathbf{r}) = \overline{V(\mathbf{r} + \xi)} - V(\mathbf{r}) = \frac{1}{6} \overline{\xi^2} \nabla^2 V(\mathbf{r}). \quad (4)$$

No caso de um potencial Coulombiano  $V(r) = -e^2/r$ , usamos a fórmula

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r}),$$

de modo que

$$\delta V(\mathbf{r}) = \frac{2\pi e^2}{3} \overline{\xi^2} \delta(\mathbf{r}). \quad (5)$$

A correção de primeira ordem nos níveis de energia devido às flutuações do campo eletromagnético é o valor esperado de (5) em relação aos autoestados do átomo de hidrogênio, de modo que

$$\langle \delta V(\mathbf{r}) \rangle = \frac{2\pi e^2}{3} \overline{\xi^2} \int d^3r |\psi_{nlm}(\mathbf{r})|^2 \delta(\mathbf{r}) = \frac{2\pi e^2}{3} \overline{\xi^2} |\psi_{nlm}(\mathbf{0})|^2, \quad (6)$$

de modo que, assim como no termo de Darwin, apenas os subníveis com  $\ell = 0$  são afetados pelas flutuações, o que é justamente o caso de  $2s_{1/2}$  e  $2s_{3/2}$ . Usando que

$$\psi_{200}(0) = \frac{1}{\sqrt{8\pi a_0^3}}$$

teremos que o deslocamento de Lamb será

$$\langle \delta V_{2s} \rangle = \frac{2\pi e^2}{3} \frac{1}{8\pi a_0^3} \overline{\xi^2} \quad (7)$$

O ingrediente mais importante nessa fórmula é o valor médio quadrático nas flutuações da posição do elétron devido às flutuações do campo eletromagnético. Já o campo eletromagnético clássico pode ser encarado como uma coleção de infinitos osciladores harmônicos acoplados. Par quantizar o campo eletromagnético nós quantizamos estes osciladores, usando os operadores de criação (levantamento) e destruição (rebaixamento)  $a$  e  $a^\dagger$ , respectivamente. Matematicamente isto significa que podemos expandir o campo elétrico, por exemplo, em modos de Fourier, cujos coeficientes são os próprios operadores de escada. A média quadrática das flutuações do campo eletromagnético é, de fato, o valor esperado no vácuo destes modos de Fourier, e fornece a seguinte estimativa para o valor médio quadrático das flutuações na posição do elétron [5]

$$\overline{\xi^2} = \frac{1}{2\varepsilon_0\pi^2} \frac{q^2}{\hbar c} \left( \frac{\hbar}{m_e c} \right)^2 \ln \left( \frac{4\varepsilon_0 \hbar c}{q^2} \right), \quad (8)$$

que, inserida em (7), fornece um resultado para o deslocamento de Lamb que concorda qualitativamente com o valor experimental.

## Referências

- [1] C. Cohen-Tannoudji, Laloe, Diu, *Quantum Mechanics*, Vol. 2
- [2] Notas de aula sobre o termo de Darwin
- [3] Welton, *Quantum Optics*
- [4] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. London A **117**, 610 (1928). O termo de Darwin aparece no final do artigo, pg. 624.
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Lamb\\_shift](https://en.wikipedia.org/wiki/Lamb_shift)