

Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Física

O espalhamento Rutherford - cálculo clássico da seção de choque
Prof. Ricardo Luiz Viana

1 Introdução

Hans Geiger e Ernst Marsden realizaram na Universidade de Manchester (Inglaterra), no período entre 1908 e 1913, uma série de experiências de espalhamento de partículas alfa por núcleos de Ouro, sob a supervisão de Ernst Rutherford [1, 2]. As partículas alfa (núcleos de Hélio) eram produzidas por uma fonte de radônio, um gás radioativo, e incidiam sobre folhas muito finas de diversos metais, entre os quais o Ouro. Como detectores, eram observadas diretamente as incidências de partículas alfa espalhadas sobre uma tela recoberta de material fluorescente, produzindo diminutas cintilações, que eram observadas usando um microscópio, e na mais completa obscuridade [Fig. 1].

O modelo atômico mais aceito na época destes experimentos, devido a J. J. Thompson, supunha que o átomo era formado por uma matriz eletricamente positiva na qual os elétrons eram incrustados, como num pudim de ameixas, sobremesa típica da culinária britânica. No entanto, este modelo previa que o espalhamento de partículas alfa por átomos produziria apenas deflexões em pequenos ângulos. Já as experiências de Geiger e Marsden não só indicavam a presença de espalhamentos a grandes ângulos, como também até mesmo a reflexão de partículas alfa pelas folhas de ouro!

Levado por sua experiência e intuição brilhantes, Rutherford concluiu que este resultado só seria possível se campos elétricos muito intensos existissem dentro do átomo, ao contrário do que previa o modelo de Thompson. Rutherford fez a ousada suposição de que toda a carga positiva do átomo estivesse concentrada num núcleo atômico praticamente puntiforme. Usando as equações da mecânica clássica e do eletromagnetismo ele deduziu uma expressão para o número de partículas alfa espalhadas segundo um determinado ângulo θ , hoje conhecida como fórmula de Rutherford [3]. Geiger e Marsden verificaram que esta fórmula concordava muito bem com os dados experimentais, o que estabeleceu de modo definitivo a noção de núcleo atômico [2].

A dedução da fórmula de Rutherford pode ser feita de uma maneira bastante elegante, usando a teoria do movimento sob a ação de uma força central, como pode ser encontrado, por exemplo, no Goldstein [4]. No presente trabalho mostramos uma dedução mais simples, baseada parcialmente no Beiser [5], e que não necessita da solução de equações diferenciais.

2 Distância de máxima aproximação

Rutherford supôs basicamente que a força de interação entre a partícula alfa (de carga $q_1 = ze$, onde $z = 2$ e $e = 1,6 \times 10^{-19}C$ é a carga do elétron) e o núcleo de Ouro (de carga $q_2 = Ze$,

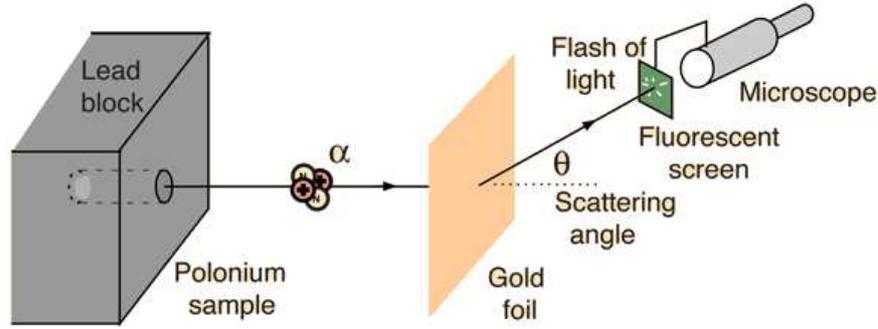


Figura 1: Esquema das experiências de Geiger e Marsden.

onde $Z = 79$) é dada pela lei de Coulomb:

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r^2} \quad (1)$$

onde r é a distância entre os dois núcleos. Esta é uma força central, pois age ao longo da linha que une as duas partículas. A energia potencial eletrostática correspondente será

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r}. \quad (2)$$

Nós suporemos que a massa do núcleo de Ouro é muito maior do que a massa da partícula alfa, de modo que podemos negligenciar o recuo do núcleo de Ouro. De fato, a razão entre as duas massas é da ordem de

$$\frac{2z}{2Z} \approx 0,025 \ll 1.$$

A energia cinética das partículas alfa produzidas pela fonte radioativa na experiência de Geiger-Marsden era igual a $T = 7,7\text{Mev}$, o que equivale a uma velocidade $v_0 \sim 2 \times 10^7\text{m/s}$, equivalente a apenas 6,6% da velocidade da luz no vácuo, de forma que podemos usar as fórmulas da mecânica não-relativística na análise deste experimento.

Vamos inicialmente considerar o caso particular de uma colisão frontal entre a partícula alfa e o núcleo de Ouro. Neste caso a força Coulombiana (repulsiva) entre ambos vai desacelerar a partícula alfa até que esta esteja momentaneamente em repouso, tal que a energia cinética T tenha se convertido integralmente em energia potencial. Usando (2), e denotando por r_0 a distância de máxima aproximação entre os núcleos, teremos

$$r_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{T} \quad (3)$$

e a força Coulombiana (1) pode ser escrita simplesmente como

$$F(r) = \frac{Tr_0}{r^2} \quad (4)$$

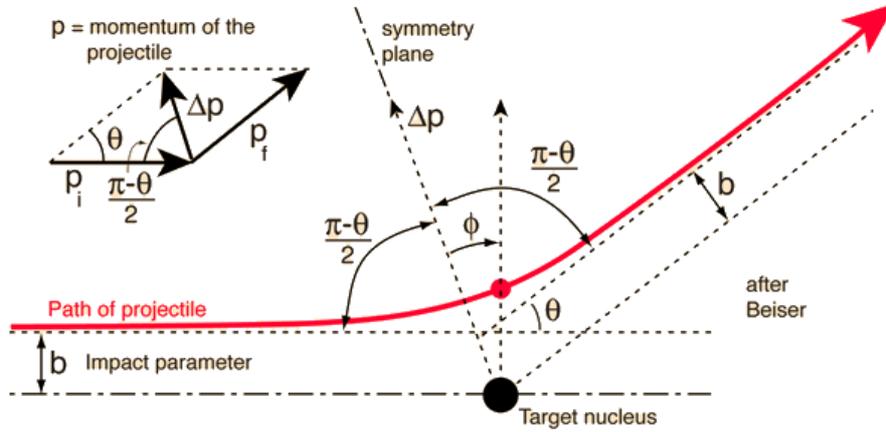


Figura 2: Geometria do espalhamento Rutherford [5].

3 Transferência de momento entre as partículas

Como a força Coulombiana (1) é central, pode-se mostrar que: (i) o movimento ocorre sempre num mesmo plano; (ii) a trajetória da partícula é uma curva cônica [4]. No caso do espalhamento, esta cônica aberta é uma hipérbole, cujas assíntotas representam as direções pré e pós-collisionais [Fig. 2]. O ângulo entre estas assíntotas é denominado ângulo de espalhamento θ . A linha de incidência da partícula alfa está a uma distância perpendicular b do núcleo de Ouro, que chamamos de parâmetro de impacto.

Como a força Coulombiana é interna, a energia cinética da partícula alfa é conservada (isto é, o espalhamento é elástico). Assim, as velocidades assintóticas da partícula alfa têm o mesmo módulo v_0 , assim como os respectivos momentos lineares ($|\mathbf{p}_f| = |\mathbf{p}_i| = p$). No entanto, a ação da força Coulombiana é variar o momento de maneira vetorial, ou seja, as direções de \mathbf{p}_f e \mathbf{p}_i diferem de um ângulo igual a θ .

A variação do momento $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$ forma, juntamente com \mathbf{p}_f e \mathbf{p}_i , um triângulo isósceles. A direção de $\Delta\mathbf{p}$ é a bissetriz do ângulo de espalhamento θ , de forma que os ângulos da base do triângulo são iguais a $(\pi - \theta)/2$.

Usando a lei dos senos neste triângulo temos

$$\frac{\Delta p}{\sin \theta} = \frac{p}{\sin \left(\frac{\pi - \theta}{2} \right)},$$

de forma que

$$\frac{\Delta p}{p} = 2 \sin \frac{\theta}{2}. \quad (5)$$

Colocando a origem do sistema no núcleo de Ouro, a posição da partícula alfa ao longo de sua trajetória pode ser indicada pelas coordenadas polares (r, ϕ) , onde convencionamos que ϕ

é medido em relação à bissetriz, tal que ele varie no seguinte intervalo

$$-\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) \leq \phi \leq \left(\frac{\pi - \theta}{2}\right)$$

Neste sistema, o ponto de máxima aproximação tem coordenadas ($r = r_0, \phi = 0$), onde r_0 é dado por (3).

Pela segunda lei de Newton, a força sobre a partícula alfa é igual à variação do seu momentum Δp . A componente da força (4) na direção de Δp é $F \cos \phi$, de modo que

$$\Delta p = Tr_0 \int \frac{\cos \phi dt}{r^2}. \quad (6)$$

Usando $dt = d\phi/\dot{\phi}$ podemos eliminar o tempo da expressão acima, escrevendo

$$\Delta p = Tr_0 \int \frac{\cos \phi d\phi}{r^2 \dot{\phi}}. \quad (7)$$

Outro resultado importante da Mecânica Clássica é que o momento angular de uma partícula de massa m sujeita a uma força central, dado por $L = mr^2\dot{\phi}$, é uma constante do movimento [4]. Essa constante pode ser, por exemplo, o momento angular assintótico da partícula bp , tal que

$$\dot{\phi} = \frac{bp}{mr^2}. \quad (8)$$

Substituindo (8) em (7), e usando $T = p^2/2m$, a variação de momento linear durante a colisão será

$$\Delta p = \frac{r_0 p}{2b} \int_{-(\pi-\theta)/2}^{+(\pi-\theta)/2} \cos \phi d\phi = \frac{r_0 p}{b} \cos \frac{\theta}{2}, \quad (9)$$

que, ao ser comparada com (5), nos fornece uma relação entre o ângulo de espalhamento e o parâmetro de impacto

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{r_0 p}{2b}. \quad (10)$$

Diferenciando esta relação temos

$$db = -\frac{r_0 d\theta}{4 \sin^2(\theta/2)}. \quad (11)$$

4 Seção de choque diferencial de espalhamento

Numa experiência típica de espalhamento, como a realizada por Geiger e Marsden, temos um grande número de partículas no feixe incidente. Definimos o fluxo de partículas F como o número de partículas incidentes por unidade de tempo por unidade de área do alvo, e que atravessam uma superfície perpendicular ao feixe. Se a partícula incidente tiver uma carga elétrica, o fluxo de partículas será proporcional à corrente associada ao feixe.

Numa primeira aproximação podemos supor que todas tenham a mesma energia cinética e suas velocidades tenham a mesma direção, ainda que os parâmetros de impacto sejam diferentes

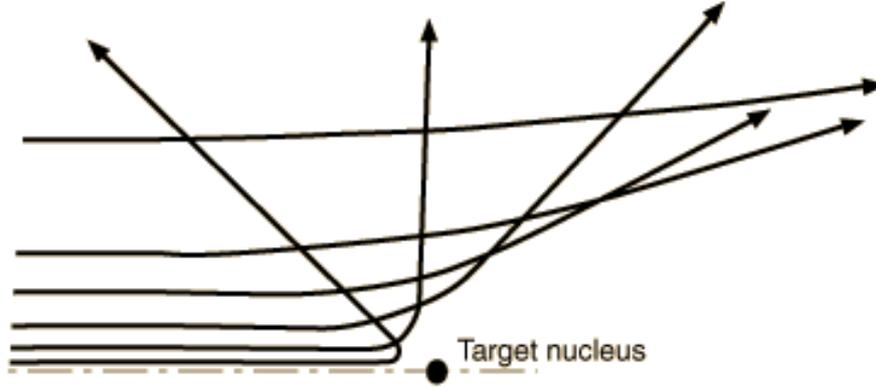


Figura 3: Relação entre parâmetro de impacto e o ângulo de espalhamento.

para cada partícula. De (3), para um dado valor T da energia cinética das partículas alfa, decorre que b e $\tan(\theta/2)$ são inversamente proporcionais. Logo, se $b_2 > b_1$, então $\theta_2 < \theta_1$ [Fig. 3]. Assim, haverá em princípio partículas espalhadas em todos os ângulos dentro do intervalo $(-\pi, \pi)$.

Vamos denotar por $N(b)$ o número de partículas por unidade de tempo possuindo parâmetros de impacto no intervalo entre b e $b + db$. Pela definição, $N(b)$ será igual ao fluxo incidente multiplicado pela área de um anel circular de raios b e $b + db$, ou seja

$$dN(b) = F(2\pi b) db. \quad (12)$$

Usando (10) e (11) podemos obter o número de partículas do feixe incidente que são espalhadas por unidade de tempo num intervalo de ângulos entre θ e $\theta + d\theta$:

$$dN(\theta) = -dN(b) = \frac{F\pi r_0^2 \cos(\theta/2)}{4 \sin^3(\theta/2)} d\theta. \quad (13)$$

A seção de choque diferencial de espalhamento, que denotaremos por $d\sigma/d\theta$, é definida como o número de partículas espalhadas por unidade de tempo entre θ e $\theta + d\theta$, e por unidade do intervalo do ângulo de espalhamento:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{dN(\theta)}{F d\theta}. \quad (14)$$

Substituindo (13) obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\pi r_0^2 \cos(\theta/2)}{4 \sin^3(\theta/2)}. \quad (15)$$

É mais comum nos referirmos à seção de choque diferencial de espalhamento em relação ao intervalo de ângulo sólido [Fig. 4]

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta d\phi, \quad (16)$$

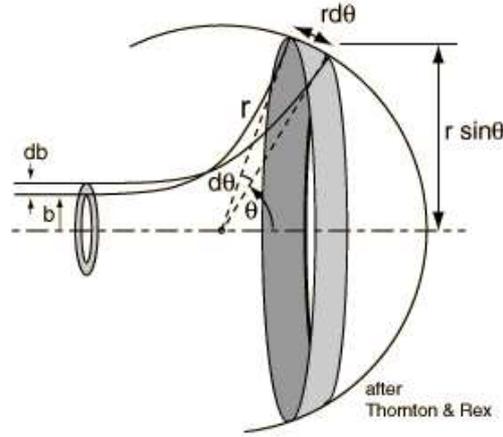


Figura 4: Seção de choque diferencial em relação ao intervalo de ângulo sólido.

de forma que, ao invés de (14), usamos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN(\theta)}{Fd\Omega}. \quad (17)$$

Numa situação de simetria azimutal, podemos integrar no ângulo ϕ , de modo que

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\theta d\phi} = 2\pi \frac{d\sigma}{d\theta d\phi},$$

tal que, usando (16) e (17) tenhamos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \frac{d\sigma}{d\theta d\phi} = \frac{1}{4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \frac{d\sigma}{d\theta}.$$

Para a seção de choque do espalhamento de Rutherford, substituímos (15) obtendo assim a fórmula de Rutherford

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{16 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}. \quad (18)$$

A seção de choque diferencial tem dimensão de área. Em física nuclear é costume usar, como unidade prática de comprimento, o Fermi ($1fm = 10^{-15}m$) e, como unidade prática de seção de choque, o barn ($1barn = 10^{-28}m^2$). Estas unidades práticas aparecem nas constantes físicas

$$\hbar c = 197,3MeV.fm, \quad \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \alpha\hbar c = \frac{1}{137} \times 197,3MeV.fm$$

de modo que a distância de máxima aproximação (3) é dada diretamente em Fermis pela fórmula prática

$$r_0 = \frac{197,3}{137} \frac{zZ}{T[MeV]} [fm]$$

Na experiência de Geiger-Marsden $T = 7,7MeV$, $z = 2$ e $Z = 79$, de forma que $r_0 \approx 30fm$. Rutherford, corretamente, identificou esta distância como o limite superior para o raio do núcleo atômico, ou seja, o núcleo deve ser seguramente menor do que $\sim 10^{-14}m$. Experiências posteriores de difração de elétrons estimaram os raios nucleares como $\sim 10^{-15}m$. Atualmente usa-se a seguinte fórmula para os raios nucleares

$$R = R_0A^{1/3},$$

onde $R_0 = 1,3fm$ e A é o número de massa (número de prótons mais nêutrons do núcleo). Para o Ouro $A = 197$, de sorte que $R = 7,56fm = 7,56 \times 10^{-15}m$.

5 Comparação entre a teoria e a experiência

Nos artigos descrevendo a experiência de Geiger e Marsden [1, 2] não aparece o conceito de seção de choque. Os autores fornecem diretamente o número observado de cintilações n como função do ângulo de espalhamento θ . Para relacionar os resultados experimentais com a previsão teórica (fórmula de Rutherford) precisamos de uma expressão para o número de partículas espalhadas segundo um determinado ângulo sólido, subtendido pela abertura do detector:

$$\delta\Omega = \frac{\delta A}{R_s^2} \quad (19)$$

onde δA é a área da abertura do detector e R_s a sua distância do alvo. Nas experiências de Geiger e Marsden usou-se uma tela fluorescente com $\delta A = 1mm^2$ e $R_s = 1cm$.

Vamos considerar a folha de Ouro como uma lâmina de área S e espessura t ($t = 2,1 \times 10^{-5}cm$ para folhas finas de Ouro). Nós supomos a folha fina o suficiente tal que possamos desprezar a possibilidade de múltiplos espalhamentos. Seja \mathcal{N} o número de núcleos na folha, supostamente em um mesmo plano. A massa total dos núcleos é

$$\mathcal{N}m_pA = \rho(St) \quad (20)$$

onde m_p é a massa do próton (praticamente igual à do nêutron), A é o número de massa, e ρ é a densidade do material ($\rho = 19,32g/cm^3$ para o Ouro).

Por definição, o número dn de partículas espalhadas por unidade de tempo, por elemento de ângulo sólido $d\Omega$ e segundo um dado ângulo de espalhamento θ é

$$dn = \mathcal{N}F \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega. \quad (21)$$

Observe que multiplicamos a expressão para um único núcleo pelo número de núcleos do alvo (que são atingidos por partículas alfa, no caso de um feixe estreito em relação à área do alvo).

Supondo, ainda, que toda partícula do feixe incidente será espalhada por algum núcleo do alvo de área S , o número total de partículas espalhadas por unidade de tempo será $n = FS$, por definição de fluxo incidente. Substituindo (20) em (21) obtemos, assim, a fração de partículas espalhadas por unidade de tempo num elemento de ângulo sólido

$$\frac{dn}{n} = \frac{\rho t}{Am_p} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega. \quad (22)$$

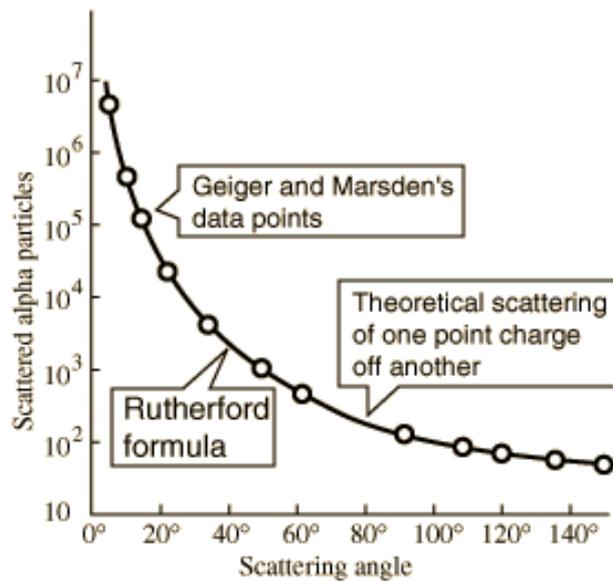


Figura 5: Comparação entre os resultados experimentais de Geiger e Marsden e a fórmula de Rutherford.

que pode ser integrada para fornecer, usando (19) e (18), uma expressão onde podemos comparar os resultados da experiência de Geiger-Marsden com a fórmula de Rutherford para a seção de choque diferencial de espalhamento.

Na Figura 5 mostramos o número n de partículas alfa espalhadas por minuto em função do ângulo de espalhamento θ . Os círculos representam os resultados experimentais de Geiger e Marsden [2] e a curva cheia a previsão teórica fornecida por (22) usando a fórmula de Rutherford (18). Observa-se uma excelente concordância entre teoria e experimento neste caso (ainda que, no artigo original, não tenham sido dadas indicações das incertezas experimentais, de modo que os resultados não têm barras de erro).

Nas Conclusões do seu artigo [2], Geiger e Marsden afirmam que “(com base nos resultados anteriores) pode ser calculado que o número de cargas elementares compondo o centro do átomo é igual à metade do peso atômico.” De fato, sabemos atualmente que para a maioria dos núcleos o número de nêutrons é aproximadamente igual ao número de prótons (mas não exatamente. O núcleo de Ouro tem 79 prótons e 118 nêutrons, por exemplo). Como as massas do nêutron e do próton são praticamente iguais, resulta que o número de cargas elementares (prótons) será aproximadamente igual à metade do número de massa. Só que o nêutron só foi descoberto em 1932 (por James Chadwick, aliás outro discípulo de Rutherford), ou seja, quase vinte anos depois do artigo de Geiger e Marsden!

Referências

- [1] H. Geiger, E. Marsden, *On a diffuse reflection of the α -particles*, Proc. Roy. Soc. London **82**, 495-500 (1909). ¹
- [2] H. Geiger, E. Marsden, *The laws of deflexion of α particles through large angles*, Phil. Mag. **25**, 604 (1913).
- [3] E. Rutherford, *The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom*, Phil. Mag. **21**, 669-688 (1911).
- [4] H. Goldstein, *Classical Mechanics*
- [5] H. Beiser, *Concepts of Modern Physics*

¹Os artigos originais citados aqui podem ser baixados gratuitamente na wikipedia.