Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Física

Física III – Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

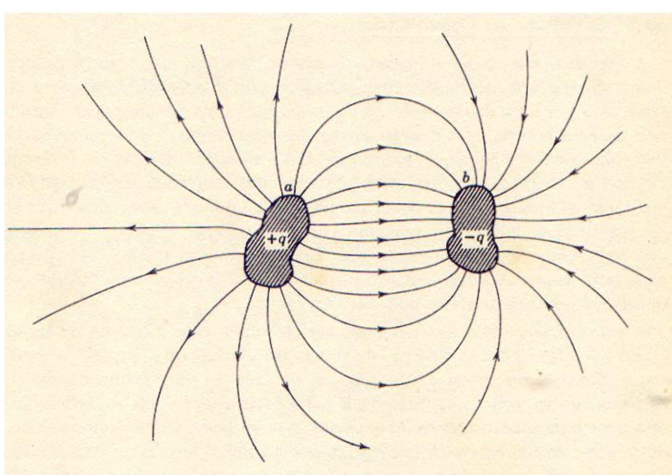
Referências bibliográficas:
H. – 27-2, 27-3, 27-5
S. – 25-2, 25-4
T. – 21-1, 21-2, 21-4

Aula 8: Capacitância

Garrafa de Leyden – inventada em 1745 pelo físico holandês Pieter van Musschenbroek (da Universidade de Leyden): consistia numa garrafa cheia de água e com as paredes metalizadas, um arame passando por uma tampa isolante (rolha) e ligado à parede interna. Seu objetivo era armazenar energia elétrica, tendo sido o antepassado dos atuais capacitores. Foi largamente empregado na pesquisa sobre eletricidade dos pioneiros como Benjamin Franklin.


Capacitor: dispositivo que armazena energia potencial elétrica num circuito. Também chamado "condensador".

<u>Forma genérica</u>: dois condutores isolados e separados de uma certa distância, separados pelo ar ou outro meio isolante. Os condutores têm cargas de mesmo módulo q e sinais opostos.

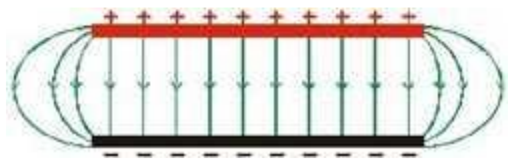


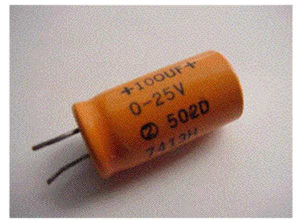
Os condutores são ambos equipotenciais, com potenciais V_a e V_b, com uma ddp $V = V_a - V_b$

Capacitância: carga por unidade de ddp

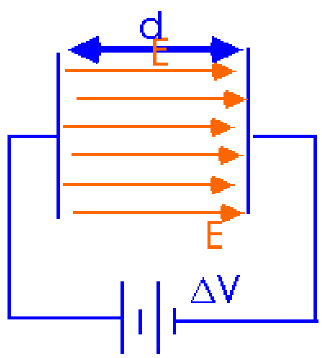
$$\boxed{C = \frac{q}{V}}$$

Unidade no S.I.: [C] = [q]/[V] = C/V = F (Farad)





Capacitor de placas paralelas: cargas + q e –q nas placas paralelas de área A, separadas por uma distância d - campo elétrico entre as placas é aproximadamente uniforme (desprezando efeitos de borda)



A ddp V entre as placas é mantida por uma fonte de tensão (pilha, bateria). Como o campo é uniforme, vale

$$\boxed{V = E\, d}$$

Para calcular o campo elétrico entre as placas, usaremos a Lei de Gauss. Passando uma gaussiana cilíndrica de altura h e área da base A paralela a uma das placas temos

$$\Phi = \oint_S E \bullet dA = \int_{base1} E.dA + \int_{base2} E.dA + \int_{lateral} E.dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

onde q é a carga envolvida pela gaussiana = carga na superfície externa da placa

- Base 1: **dA** é paralelo ao campo **E**, **E . dA** = E dA cos 0° = E dA. Como E é uniforme (constante) $\int_{base1} E.dA = \int_{base1} EdA = E \int_{base1} dA = EA$

- Base 2: como encontra-se dentro da placa condutora, E = 0, logo $\int_{base2} E.dA = 0$

- Lateral: dA é perpendicular ao campo E, **E . dA** = E dA cos 90° = 0,
então $\int_{lateral} E.dA = 0$

$$\varepsilon_0 \Phi = \varepsilon_0 EA = q$$

substituindo na definição de capacitância

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 EA}{Ed} \qquad \text{ou seja,} \qquad \boxed{C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}}$$

Problema resolvido: Uma capacitor de placas paralelas possui placas circulares de raio r = 8,2 cm e separação d = 1,3 mm. (a) Calcule a capacitância; (b) Que carga aparecerá sobre as placas se a ddp aplicada for de 120 V?
Solução: (a)

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = \varepsilon_0 \frac{\pi r^2}{d} = \frac{(8{,}85x10^{-12})\pi(0{,}082^2)}{1{,}3x10^{-3}} = 1{,}44x10^{-10} F = 144 pF$$

(b) q = CV = 1,44x10^{-10} x 120 = 1,73 x 10^{-8} C = 17,3 nC

Problema proposto: Sejam duas placas metálicas planas e quadradas de lado 1,00 m. Qual deveria ser a separação entre as placas, se com elas desejássemos construir um capacitor com capacitância de 1,00 F? É possível construir tal capacitor? Resposta: 8,85 x 10^{-12} m.

Capacitor cilíndrico (garrafa de Leyden): uma casca cilíndrica de raio b envolvendo um cilindro condutor de raio a, ambas de comprimento L. A superfície gaussiana é um cilindro de raio r, onde b < r < a. Da Lei de Gauss:

$$\Phi = \oint_S E \bullet dA = \int_{base1} E.dA + \int_{base2} E.dA + \int_{lateral} E.dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

onde q é a carga envolvida pela gaussiana = carga no cilindro de raio a

- Bases 1 e 2: **dA** é perpendicular ao campo **E**, **E . dA** = E dA cos 90° = 0. Como E é uniforme (constante) $\int_{base1} E.dA = \int_{base2} E.dA = 0$

- Lateral: **dA** é paralelo ao campo **E**, **E . dA** = E dA cos 0° = E dA, onde E é constante apenas sobre a superfície (E depende de r). Logo

$\int_{lateral} E.dA = \int_{lateral} EdA = EA = E(2\pi rL)$, onde A é a área da lateral

$$\varepsilon_0 \Phi = \varepsilon_0 E(2\pi rL) = q$$

Isolando E, que é uma função do raio r, temos

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 Lr}$$

Para calcular a ddp entre os cilindros usamos a fórmula vista na Aula 7, adaptando-a: o índice i refere-se à placa positiva, e f à placa negativa:

$$V = V_+ - V_- = \int_+^- E.ds = \int_+^- E(r)dr$$

já que o vetor **E** é paralelo ao vetor **ds** (elemento de deslocamento), logo

E. ds = E |ds| cos 0° = E dr

Substituindo E(r), e lembrando que tanto q, como L são constantes:

$$V = \int_{r=a}^{r=b} \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 Lr} dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

Usamos a integral elementar $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$ para calcular

$$\int_a^b \frac{dr}{r} = \ln r\Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

substituindo na definição de capacitância

$$C=\frac{q}{V}=\frac{q}{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$ ou seja, $$\boxed{C=2\pi\varepsilon_0\,\frac{L}{\ln(b/a)}}$$

Capacitor esférico: Vimos (Lei de Gauss) que uma casca esférica carregada gera um campo elétrico nulo em pontos em seu interior. No seu exterior, o campo é o mesmo que seria obtido se toda a carga Q da casca estivesse concentrada em seu centro. Sendo R o raio da esfera temos

$$E=\begin{cases} 0 & ,r<R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & ,r\geq R \end{cases}$$

Por extensão, o potencial elétrico gerado pela casca para pontos no seu exterior é o mesmo que o de uma carga puntiforme Q no centro. Então

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \quad \text{se } r\geq R$$

Na superfície da casca r = R, e temos

$$\boxed{V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}}$$

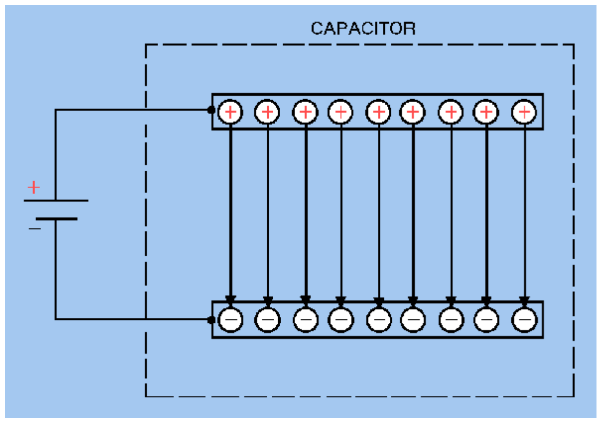
Supondo que a casca esférica é um condutor isolado em equilíbrio eletrostático, vimos que todos os seus pontos têm o mesmo potencial. Logo, mesmo no interior da casca esférica, o potencial, além de ser constante, **continua valendo** kQ/R, que é o seu valor na superfície da casca. Esse resultado vale tanto para uma casca esférica como para uma esfera maciça condutora de raio R.

A partir dessas relações, podemos mostrar que a capacitância de um capacitor esférico: duas cascas esféricas concêntricas de raios a e b, é [vide H., 27-3]:

$$\boxed{C=4\pi\varepsilon_0\,\frac{ab}{b-a}}$$

Energia elétrica armazenada num capacitor: suponha um capacitor inicialmente descarregado. Ligamos suas placas a uma bateria que fornece uma ddp constante V sobre o capacitor. A bateria tem terminais positivo (potencial maior) e negativo (potencial menor). As cargas fluem pelo circuito do ponto de maior para o ponto de menor potencial. Como o capacitor não permite condução, as cargas ficam armazenadas nas placas, e um campo elétrico surge entre elas.

A bateria fornece a energia necessária para realizar trabalho sobre as cargas que se deslocam – <u>ela é um agente externo, pois realiza trabalho W contra o campo elétrico entre as placas.</u> Logo, se a bateria transferiu uma carga q aparece uma ddp V tal que V = + W/q, ou seja, W = V. q



Para um elemento de carga transferida dq temos um trabalho elementar dW = V dq (lembre que a ddp entre as placas é constante). Como C = q/V temos

dW = (q/C) dq.

O trabalho total realizado para carregar o capacitor, desde ele descarregado (q = 0) até uma carga final q = Q é obtido por integração

$$W = \int_i^f dW = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q dq = \frac{1}{C}\frac{q^2}{2}\bigg|_0^Q = \frac{1}{C}\frac{Q^2}{2}$$

Este trabalho é armazenado no capacitor sob a forma de energia potencial elétrica: U = W

$$\boxed{U = \frac{Q^2}{2C}}$$

Como Q = CV, temos U = C^2 V^2/2C, ou seja

$$\boxed{U = \frac{1}{2}CV^2}$$

Problema resolvido: Um capacitor de 60 μF está carregado sob uma ddp de 12 V. Remove-se o capacitor da bateria e aumentamos a separação entre suas placas, de 2,0 mm para 3,5 mm. (a) Qual a carga no capacitor? (b) Qual a energia armazenada inicialmente no capacitor? (c) De quanto é alterada a energia depois de se aumentar a separação entre as placas?

Solução: (a) $Q = C_1V_1 = 60 \times 10^{-6} \times 12 = 7,2 \times 10^{-4}$ *C*

(b) Antes de se aumentar a distância entre as placas

$$U_1 = \frac{1}{2}C_1V_1^2 = \frac{60x10^{-6}x12^2}{2} = 4,32x10^{-3}\,J$$

(c) Após ter sido desligado da bateria, o capacitor mantém a carga Q constante nas suas placas. Como campo elétrico é dado por $E = Q/\varepsilon_0 A$*, ele também permanece constante quando suas placas são afastadas. Já que* $V = Ed$*, temos que a ddp muda quando as placas se afastam:*

$$E = \frac{V_1}{d_1} = \frac{V_2}{d_2} \qquad\qquad V_2 = V_1\frac{d_2}{d_1} = 12\frac{3,5}{2,0} = 21V$$

$Q_1 = Q_2 = Q = constante$ $\qquad$ $C_2 = Q/V_2 = 7,2 \times 10^{-4} / 21 = 3,43 \times 10^{-5}$ *C*

A energia armazenada no capacitor após as placas terem sido afastadas é

$$U_2 = \frac{1}{2}C_2V_2^2 = \frac{34,3x10^{-6}x21^2}{2} = 7,56x10^{-3}\,J$$

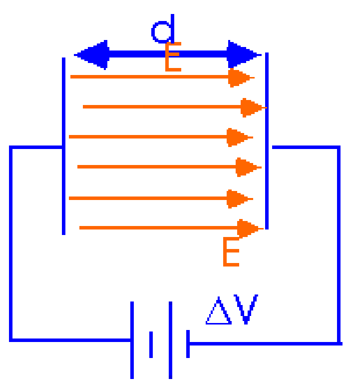
o que resulta num aumento de energia igual a $7,56 \times 10^{-3} - 4,32 \times 10^{-3} = 3,24 \times 10^{-3}$ *J.*

Problema proposto: Suponha, no problema anterior, que uma das placas esteja fixa, a outra sendo livre para se mover. Calcule o trabalho que deve ser feito par afastar as placas de 2,0 para 3,5 mm. Resposta: $3,24 \times 10^{-3}$ J.

Densidade de Energia Elétrica: Podemos imaginar que esta energia U está armazenada no campo elétrico entre as placas do capacitor. A densidade de energia u é a energia U por unidade de volume do campo elétrico

$$\boxed{u = \frac{U}{vol}}$$

Unidade no S.I.: [u] = [U]/[vol] = J/m^3 (Joules por metro cúbico)



Para um capacitor de placas paralelas C = ε_o A/d. A região entre as placas é um prisma ou um cilindro (dependendo da forma das placas) de altura d e área da base A. O volume da região entre as placas é

$$\boxed{\text{vol} = A\,d}$$

Logo

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{CV^2}{2Ad} = \frac{1}{2Ad}\varepsilon_0 \frac{A}{d}V^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2$$

Como o campo elétrico E é uniforme entre as placas E = V/d, logo

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

Essa expressão é **bastante** geral:

a) vale para qualquer geometria do capacitor (cilíndrico, esférico, etc.)
b) vale para qualquer região contendo um campo elétrico, mesmo sem um capacitor (Ex.: onda eletromagnética)

Problema resolvido: Uma esfera metálica isolada cujo diâmetro é 10 cm tem um potencial de 8000 V. Calcule a densidade de energia elétrica próximo à superfície da esfera.
Solução: O campo elétrico e o potencial na superfície de uma esfera de carga Q e raio R são dados, respectivamente, por

$$E = k\frac{Q}{R^2}, V = k\frac{Q}{R}$$

Dividindo as duas equações temos E = V/R=2V/d donde a densidade de energia elétrica é

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{2V}{d}\right)^2 = \frac{8{,}85x10^{-12}}{2}\left(\frac{2x8000}{0{,}1}\right)^2 = 0{,}1133\frac{J}{m^3}$$

Problema proposto: Calcule a densidade de energia elétrica a 1 cm de distância de uma barra longa e fina carregada com uma densidade linear de carga λ = 2,0 μC/m. Resposta: 57,3 J/m^3.