Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Física

Física III – Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

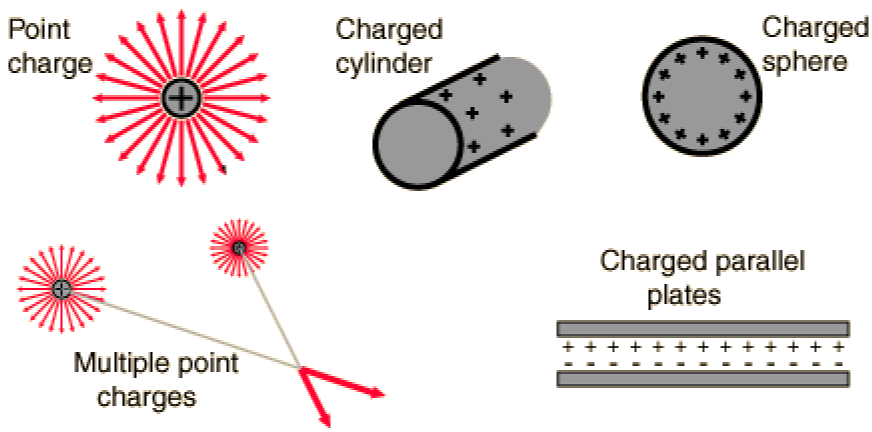
Referências bibliográficas:
H. – 25-7, 25-9, 25-10, 25-11
S. – 23-5
T. – 19-3

Aula 6: Aplicações da Lei de Gauss

Recordando a Lei de Gauss: o fluxo elétrico através de uma superfície fechada ("gaussiana") é proporcional à carga líquida que está envolvida pela superfície**.**

$$\Phi = \oint_S E \bullet dA = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

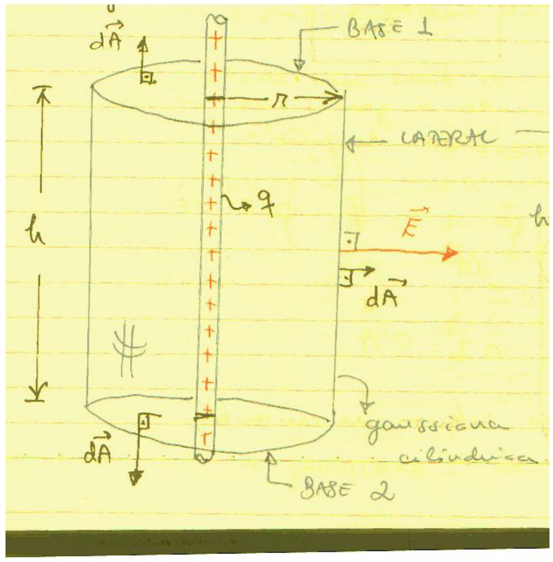
onde q´ representa apenas a porção da carga que está envolvida pela gaussiana S.
ε_o = 8,85 x 10 $^{-12}$ $C^2/N.m^2$: constante de permissividade



Podemos utilizar a Lei de Gauss para calcular o campo elétrico produzido por distribuições contínuas de carga, quando as mesmas exibirem algum tipo de simetria espacial. Quando não houver tais simetrias, o cálculo via Lei de Gauss é tão complicado, em geral, como o obtido pela Lei de Coulomb por integração direta.

1º. Caso: Simetria Cilíndrica

<u>Campo elétrico de uma barra não-condutora infinitamente longa e uniformemente carregada:</u> superfície gaussiana S é um cilindro de raio r e altura h



Considerações de simetria:

(i) o campo elétrico tem direção radial, ou seja, é perpendicular a todos os pontos da lateral da gaussiana cilíndrica;

(ii) o campo elétrico tem o mesmo módulo em todos os pontos da lateral da gaussiana.

$$\boxed{\Phi = \oint_S E \bullet dA = \int_{base1} E.dA + \int_{base2} E.dA + \int_{lateral} E.dA}$$

$$\boxed{E \bullet dA = EdA\cos\theta}$$

Usando a consideração (i), E tem direção radial
Base 1: como **E** é perpendicular a **dA**, $\theta = 90^o$, cos $90^o = 0$, **E . dA** = 0
Base 2: novamente **E** é perpendicular a **dA**, $\theta = 90^o$, cos $90^o = 0$, **E . dA** = 0
Lateral: como **E** é paralelo a **dA**, $\theta = 0^o$, cos $0^o = 1$, **E . dA** = E dA

Usando a consideração (ii) E é constante ao longo da lateral

$$\boxed{\Phi = \int_{lateral} E.dA = E \int_{lateral} dA = E(2\pi r)h}$$

pois a área da superfície lateral do cilindro (retângulo) é o comprimento da base ($2\pi r$) multiplicado pela altura h.

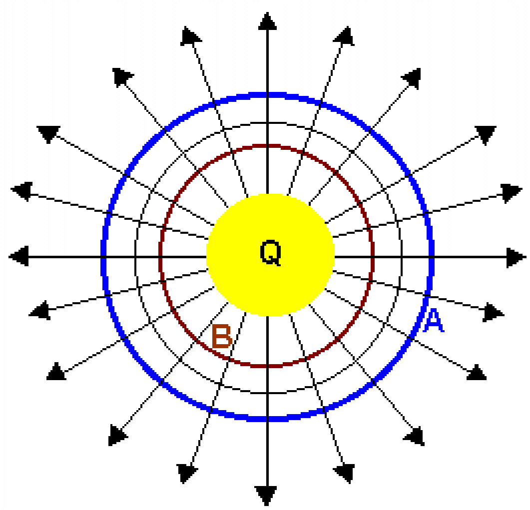
Carga envolvida pela gaussiana: como a barra está uniformemente carregada, a parte dentro da gaussiana cilíndrica tem comprimento h. Densidade linear de carga $\lambda = q/h$. $q = \lambda$ h.

Lei de Gauss: $\Phi = q/\varepsilon_o$

$E(2\pi r)h = \lambda\, h/\varepsilon_o$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

O campo elétrico gerado pela barra cai com o inverso da distância (**não** é uniforme!). As linhas de força têm direções radiais a partir da barra. Se a carga da barra é positiva as linhas apontam para fora da barra, caso contrário (carga negativa) apontam para dentro.



Problema resolvido: Um longo tubo metálico de raio R = 3,0 cm, com paredes condutoras finas, tem uma densidade linear de cargas $\lambda = 2{,}0 \times 10^{-8}$ C/m. Determine o campo elétrico a distâncias r = 1,5 cm e r = 5,0 cm do eixo do tubo.
Solução: (a) r = 1,5 cm está dentro do tubo. A gaussiana S é um cilindro de raio r < R e altura h. O fluxo elétrico por S foi encontrado como sendo

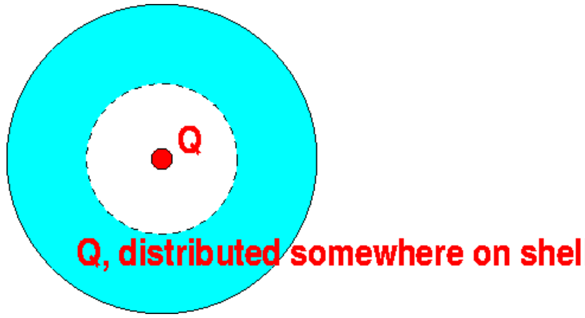
$$\Phi = \int_{lateral} E.dA = E \int_{lateral} dA = E(2\pi r)h$$

Pela lei de Gauss $\Phi = q/\varepsilon_o$, onde q = 0 é a carga envolvida pela gaussiana. Logo $\Phi = 0$ e

E = 0.

(b) r = 5,0 cm está fora do tubo. Com uma gaussiana cilíndrica, o fluxo é o mesmo, mas a carga envolvida é $q = \lambda\, h$. Logo $\Phi = q/\varepsilon_o = \lambda\, h/\varepsilon_o = E(2\pi r)h$ fornece

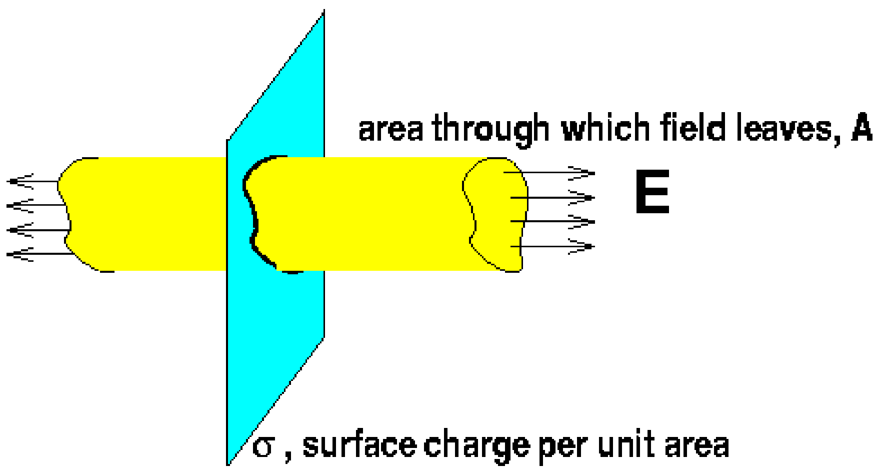
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2{,}0x10^{-8}}{2\pi x 8{,}85x10^{-12}\, x 0{,}05} = 7{,}2x10^3\, \frac{N}{C}$$



Problema proposto: Uma barra cilíndrica condutora longa de comprimento L, com uma carga total +q, é envolvida por uma casca cilíndrica condutora (também de comprimento L) com uma carga total – 2q. Determine: (a) o campo elétrico em pontos fora da casca condutora; (b) a distribuição de carga sobre a casca condutora; (c) o campo elétrico entre a casca e a barra. Respostas: (a) $E=-q/(2\pi\varepsilon_o rL)$; (b) q´=-q, q´´=-q;(c) $E=+q/(2\pi\varepsilon_o rL)$;

2º. Caso: Simetria Plana

Campo Elétrico de uma Plano Infinito de Cargas: placa plana não-condutora fina e infinitamente extensa, com uma carga distribuída uniformemente sobre sua superfície. A superfície gaussiana S é um cilindro de raio da base r e altura 2r que intercepta a placa perpendicularmente.



Considerações de simetria:

(i) E é perpendicular à placa, em particular é perpendicular às bases do cilindro;

(ii) E é constante para todos os pontos a uma mesma distância r da placa, ou seja, constante para as bases do cilindro;

(iii) E aponta para fora dos dois lados da placa, se esta for positivamente carregado, e para dentro dos dois lados da placa se esta for negativamente carregada.

$$\boxed{\Phi = \oint_S E \bullet dA = \int_{base1} E.dA + \int_{base2} E.dA + \int_{lateral} E.dA}$$

$$\boxed{E \bullet dA = EdA\cos\theta}$$

Usando a consideração (i) **E** é sempre perpendicular à placa
Base 1: como **E** é paralelo a **dA**, $\theta = 0^o$, cos $0^o = 1$, **E . dA** = E dA
Base 2: novamente **E** é paralelo a **dA**, $\theta = 0^o$, **E . dA** = E dA
Lateral: **E** é perpendicular a **dA**, $\theta = 90^o$, cos $90^o = 0$, **E . dA** = 0

Usando a consideração (ii) **E** é constante ao longo da lateral

$$\boxed{\Phi = \int_{base1} E.dA + \int_{base2} E.dA = 2E\int_{base1} dA = 2EA}$$

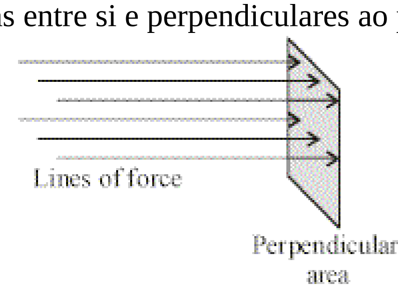
Carga envolvida pela gaussiana: carga de um círculo de área A. Obs. Nem precisamos escrever $A = \pi r^2$, pois a área é simplificada no cálculo. Densidade superficial de carga $\sigma = q/A$. $q = \sigma A$

Lei de Gauss: $\Phi = q/\varepsilon_o$

$2EA = \sigma A$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

O campo elétrico de um plano infinito é uniforme: não depende da distância r ao plano, e as linhas de força são paralelas entre si e perpendiculares ao plano de cargas



Se o plano está positivamente carregado, as linhas de campo afastam-se do plano em ambos os lados. Se o plano está negativamente carregado, as linhas convergem para o plano também em ambos os lados.

Problema resolvido: Um plano infinito (não-condutor) com densidade superficial de carga $\sigma = + 4{,}0$ nC/m^2 está no plano yz de um sistema de coordenadas cartesianas. Um segundo plano infinito tem densidade superficial de carga $\sigma = - 4{,}0$ nC/m^2, está num plano paralelo ao plano yz, em x = 2,0 m. Achar o campo elétrico em (a) x = 1,8 m; (b) x = 5,0 m; (c) x = - 2,0 m.

Solução: (a) x = 1,8 m está entre os dois planos. O campo elétrico gerado por qualquer um dos dois planos tem módulo

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{4x10^{-9}}{2x8{,}85x10^{-12}} = 226\frac{N}{C}$$

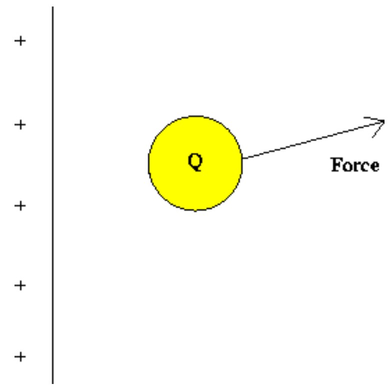
Tanto E_1 como E_2 apontam para a direção x positiva na região entre os dois planos, logo a resultante dos campos elétricos é a soma dos mesmos

$$E_a = E_1 + E_2 = 2x226 = 452\frac{N}{C}$$

(b) x = 5,0 m está à direita dos dois planos. Neste caso E_1 aponta para x positivo, mas E_2 para x negativo. A resultante é a diferença dos dois campos

$$E_b = E_1 - E_2 = 226 - 226 = 0$$

(c) x = -2,0 m está à esquerda dos dois planos. Novamente o campo resultante será nulo, pois é a diferença dos dois campos.

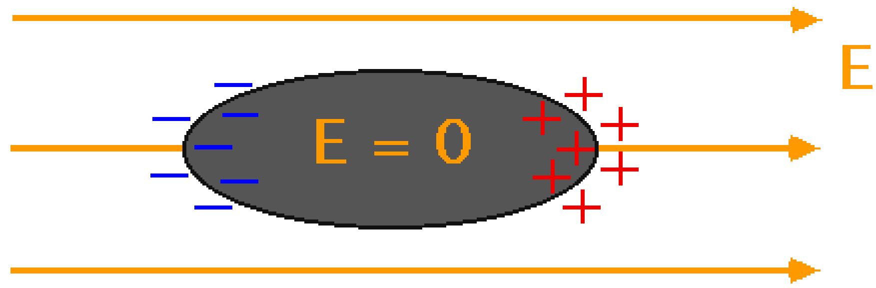


Problema proposto: Uma pequena bola não condutora de massa m = 1,0 mg e carga q = 2,0 x 10^{-8} C está suspensa de um fio isolante que faz um ângulo $\theta = 30^o$ com um plano infinito de cargas vertical. Calcule a densidade superficial de carga do plano. Dica: considere o peso da bola e aplique as condições de equilíbrio da bola. Resposta: 5,0 nC/m^2.

Em geral, o campo elétrico nas proximidades de QUALQUER superfície condutora é perpendicular à superfície e tem módulo

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

A demonstração segue essencialmente os mesmos passos da que foi apresentada para a simetria plana, pois vale para a região imediatamente próxima de qualquer ponto da superfície do condutor, independentemente da forma deste. Em particular, o campo elétrico produzido por um plano infinito **condutor não** é $\sigma/2\varepsilon_o$, e sim σ/ε_o, em conformidade com o resultado anterior.



Condutor isolado num campo elétrico externo: Dentro do condutor vimos na aula passada que E = 0. As linhas de força no exterior do condutor são tais que interceptam perpendicularmente a superfície do condutor. O módulo do campo é proporcional à densidade superficial de carga no condutor. Quanto maior a densidade de linhas de força que entram ou saem do condutor numa certa região, maior a carga superficial nesta região.

3º. Caso: Simetria Esférica

<u>Campo elétrico gerado por uma casca esférica de raio R</u>

1) para pontos fora da casca (isto é, a distâncias radiais r > R): superfície gaussiana S é uma esfera de raio r envolvendo a casca. Como as linhas de força apontam radialmente para fora, o campo elétrico em todos os pontos da esfera é paralelo ao elemento de área vetorial dA. Logo

$$\mathbf{E}\ .\ \mathbf{dA} = E\ dA \cos 0^{o} = E\ dA$$

Em todos os pontos da esfera o campo elétrico tem o mesmo módulo ("simetria esférica"), logo E é constante enquanto integramos sobre a superfície S de área $A = 4\pi r^2$. O fluxo elétrico pela superfície esférica S será

$$\boxed{\Phi = \oint_S EdA = E\oint_S dA = EA = E(4\pi r^2)}$$

Pela lei de Gauss $\Phi = q/\varepsilon_o$, de modo que $E(4\pi r^2)=q/\varepsilon_o$. Isolando o campo E

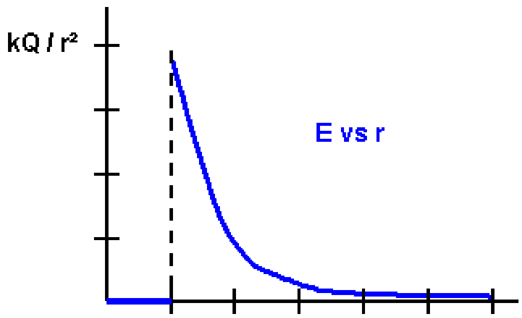
$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}}$$

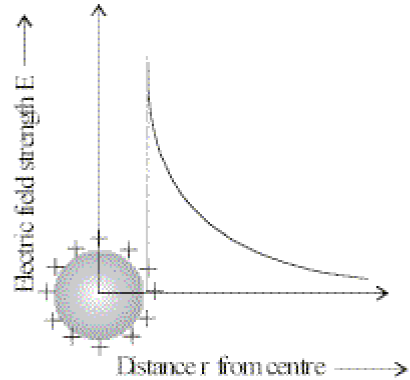
ou seja, o campo elétrico para pontos fora da casca é o mesmo que seria obtido se toda a carga da casca estivesse concentrada em seu centro.

2) para pontos dentro da casca (isto é, a distâncias radiais r < R): o fluxo elétrico é o mesmo do caso anterior, pois a gaussiana é novamente uma esfera de raio r (só que dentro da casca)

$$\boxed{\Phi = \oint_S EdA = E\oint_S dA = EA = E(4\pi r^2)}$$

Pela lei de Gauss $\Phi = q/\varepsilon_o$. Como q = 0 dentro da casca, E = 0.





Problema resolvido: Considere uma esfera maciça de raio R = 3,0 cm uniformemente carregada com uma carga Q = + 5,0 nC. Calcule o campo elétrico para pontos situados à distância radial de r = 2,0 cm.

Solução: O fluxo elétrico, devido à simetria esférica, continua sendo dado por $\Phi = E(4\pi r^2)$ que, pela lei de Gauss, é proporcional à carga q envolvida pela gaussiana esférica de raio r. Supondo uma densidade volumétrica de carga uniforme

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{4\pi R^3/3}$$

então a carga q envolvida pela gaussiana de raio r < R dentro da esfera maciça é dada por

$$\rho = \frac{q}{V'} = \frac{q}{4\pi r^3/3}$$

Dividindo membro a membro estas expressões temos

$$q = Q\frac{r^3}{R^3}$$

$$\Phi = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3} = \frac{9{,}0x10^9\,x5{,}0x10^{-9}\,x0{,}02}{0{,}03^3} = 3{,}33x10^4\ \frac{N}{C}$$

Problema proposto: Uma casca esférica fina de raio R = 3,0 m tem o centro na origem e uma densidade superficial de carga σ = 3,0 nC/m^2. Uma carga puntiforme q = 250 nC está sobre o eixo dos y, em y = 2m. Achar o campo elétrico resultante sobre o eixo dos x em (a) x = 2m, e (b) x = 4 m. Resposta: (a) (199 N/C) **i** – (199 N/C) **j** ; (b) (290 N/C) **i** – (50 N/C) **j**