Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Física

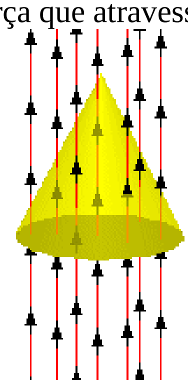
Física III – Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

**Referências bibliográficas:**
**H. – 25-2, 25-3, 25-4, 25-5, 25-6, 25-7**
**S. – 23-2, 23-3, 23-4, 23-6**
**T. – 19-2, 19-4**

## Aula 5: Lei de Gauss

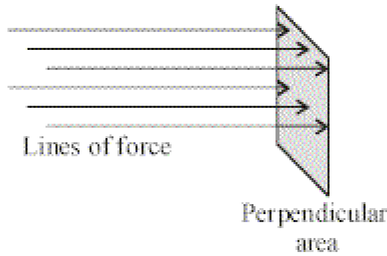
**Karl Friedrich Gauss** (* 30 Abril de 1777 em Brunswick, Duchy of Brunswick, Alemanha; + 23 Feb 1855 em Göttingen, Alemanha) foi um menino prodígio em Matemática, e tornou-se um dos maiores matemáticos da História. Sua primeira descoberta foi a possibilidade de construir, apenas com régua e compasso, um polígono regular de 17 lados, algo que passara desapercebido pelos matemáticos gregos, e pelos 2000 anos seguintes! Suas contribuições mais importantes na Matemática encontram-se na teoria dos Números e na Geometria Diferencial. Ele também fez descobertas importantes em Astronomia, para a qual desenvolveu métodos numéricos até hoje utilizados, como a quadratura Gaussiana e o método dos mínimos quadrados. Em 1831 foi nomeado professor de física na Universidade de Göttingen. Na Física, o nome de Gauss aparece associado à Teoria do Potencial (Lei de Gauss), e ao estudo do magnetismo terrestre.

**Fluxo elétrico:** fluxo das linhas de força que atravessam uma superfície imaginária



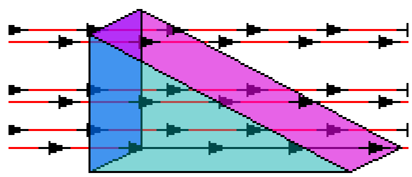
1º. Caso: Campo elétrico uniforme e linhas de força perpendiculares à superfície

$$\boxed{\Phi = EA}$$




Unidade no S.I.: [$\Phi$]=[E][A] = N.m$^2$/C

2º. Caso: Campo elétrico uniforme e linhas de força oblíquas à superfície



Só levamos em conta a projeção da área perpendicular às linhas de força $A_p$ = A cos θ.

$$\boxed{\Phi = E\,A_p = E\,A\cos\theta}$$

**Área vetorial A**: conveniente para cálculos no eletromagnetismo

(i) módulo: área da superfície plana;
(ii) direção: perpendicular à superfície;
(iii) sentido: se a superfície for aberta é arbitrário; caso a superfície seja fechada, o sentido aponta "para fora" da superfície;

como ângulos de lados perpendiculares são iguais,

$$\boxed{\Phi = E \bullet A}$$

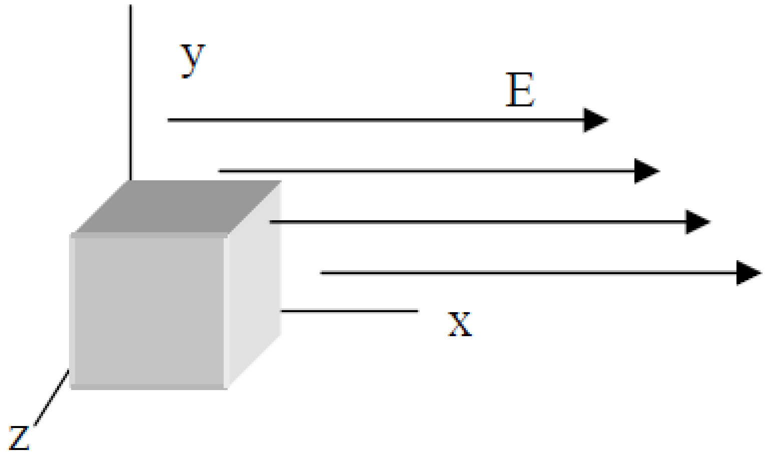
*Recordação: Sejam os vetores dados em termos das componentes cartesianas*

$$\boldsymbol{A} = A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j} + A_z\,\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{B} = B_x\,\boldsymbol{i} + B_y\,\boldsymbol{j} + B_z\,\boldsymbol{k}$$

*onde i, j, k são os versores dos eixos cartesianos x,y,z, respectivamente. Sabemos que* ***i.i* = *j.j* = *k.k*** *= 1, e que* ***i.j* = *i.k* = *j.k*** *= 0, etc O produto interno entre eles é*

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z$$

**Problema resolvido**: As arestas de um cubo medem 1,40 m e estão orientadas segundo os eixos cartesianos numa região de campo elétrico uniforme. Determine o fluxo elétrico através da face superior do cubo se o campo externo **E** for dado por (a) (6,00 N/C) **i**; (b) -(2,00 N/C) **j**; (c) - (3,00 N/C) **i** + (4,00 N/C) **k**.

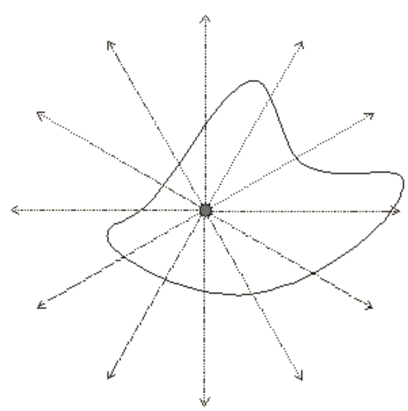



*Solução: A área das seis faces do cubo é A = $a^2$ = $(1,40)^2$ = 1,96 $m^2$. A face superior (vide figura acima) tem área vetorial* ***A*** *=(1,96 $m^2$)* ***j.***

(a) $\Phi$ = **E.A** = 6,00x0 + 0x1,96 + 0x0 = 0
(b) $\Phi$ = **E.A** = 0x0 – 2,00x1,96 + 0x0= -3,92 N.$m^2$/C
(c) $\Phi$ = **E.A** = -3,00x0 + 0x1,96 + 4,00x0 = 0

**Problema proposto:** No problema anterior, calcule o fluxo elétrico através das outras faces do cubo nos três casos. Respostas: Face 1: 0, 3,92, 0; Face 2: 0, 0, 7,84; Face 3: 0, 0, -7,84; Face 4: 11,76, 0, -5,88; Face 5: -11,76, 0, 5,88 (todas as unidades são: N.$m^2$/C)

<u>3º. Caso: Campo elétrico não-uniforme e linhas de força quaisquer</u>



Nesses casos, subdividimos a superfície em elementos infinitesimais de área ("ladrilhos"), de forma que cada elemento de área seja aproximadamente plano, e tão pequeno que o campo elétrico ao longo deste seja aproximadamente uniforme. Para cada elemento de área vetorial dA podemos aplicar a fórmula válida no caso anterior, e obtemos um elemento de fluxo

$$\boxed{d\Phi = E \bullet dA = EdA\cos\theta}$$

O fluxo elétrico através de toda a superfície S é obtido integrando-se os elementos de fluxo

$$\boxed{\Phi = \int d\Phi = \int \ E \bullet dA = \int EdA\cos\theta}$$

se a superfície S for fechada usamos outro símbolo para a integral

$$\boxed{\Phi = \oint_S \ E \bullet dA}$$

Uma integral sobre uma superfície fechada pode em muitos casos ser escrita como uma soma de integrais sobre superfícies abertas.

<u>Exemplo: fluxo elétrico por uma superfície cúbica</u>

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi = \oint_S \ E \bullet dA = \int_1 E.dA + \int_2 E.dA + \int_3 E.dA + \\ \int_4 E.dA + \int_5 E.dA + \int_6 E.dA\end{aligned}}$$

Suponha que o cubo esteja colocado num sistema de coordenadas cartesianas no espaço. As áreas de cada face são A = $a^2$. Os respectivos elementos de área vetorial são

Área 1: **dA** = dA **i**, Área 2: **dA** = - dA **i**,
Área 3: **dA** = dA **j**, Área 4: **dA** = - dA **j**,
Área 5: **dA** = dA **k**, Área 6: **dA** = - dA **k**,

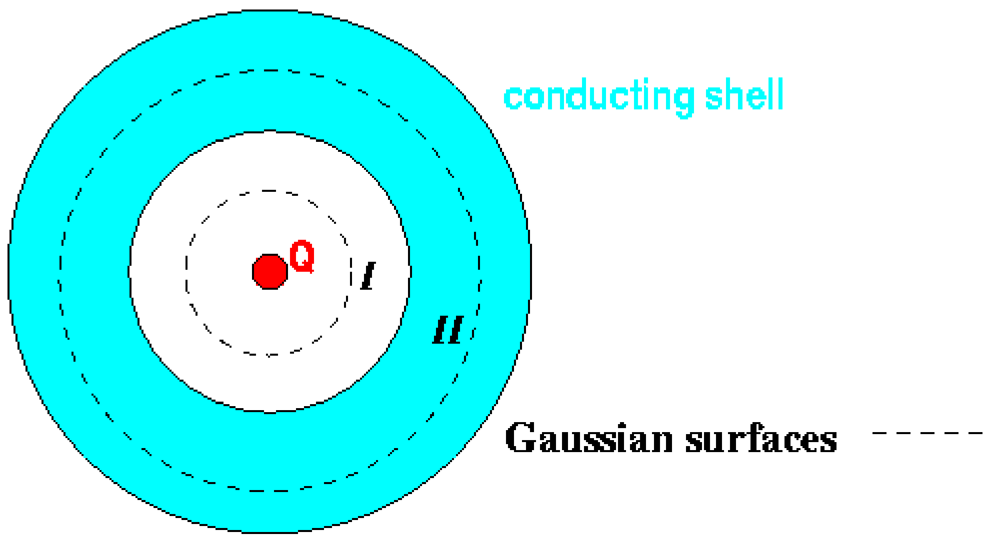
<u>Propriedade importante: uma direção radial é sempre perpendicular a uma circunferência num dado ponto.</u> Mais precisamente, a direção radial é perpendicular à tangente à circunferência no dado ponto. Por isso o elemento de área vetorial **dA** aponta na direção radial para um contorno circular qualquer.

Exemplo: fluxo elétrico por uma superfície cilíndrica

$$\Phi = \oint_S E \bullet dA = \int_{base1} E.dA + \int_{base2} E.dA + \int_{lateral} E.dA$$

- Base 1 (inferior) :**dA** aponta para baixo (sempre para fora do cilindro)
- Base 2 (superior): **dA** aponta para cima. Área das bases $A_1 = A_2 = \pi r^2$
- Lateral: **dA** aponta na direção radial para fora do cilindro. Área da lateral: $A_L = (2\pi r)H$

O cálculo de cada integral depende de como o campo elétrico está alinhado com as superfícies do cilindro, como veremos mais adiante.




**Lei de Gauss: o fluxo elétrico através de uma superfície fechada ("gaussiana") é proporcional à carga líquida que está envolvida pela superfície**

$$\Phi = \oint_S E \bullet dA = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

q´: representa apenas a porção da carga total q que está envolvida pela superfície fechada S

q´: é a carga líquida (soma algébrica das cargas). Ex.: se S envolve cargas de + 3µC, -1µC e – 2 µC, q´= 3-1-2 = 0. Neste caso o fluxo elétrico por S é nulo.

$\varepsilon_o$: constante de permissividade = 8,85 x $10^{-12}$ $C^2$ /N.$m^2$.

Obs.: a constante eletrostática k pode ser representada, no sistema S.I., na seguinte forma

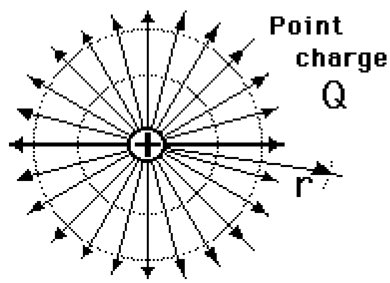
$$\boxed{k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$$

**Problema resolvido**: Uma carga puntiforme +q está a uma distância d/2 diretamente acima do centro de um quadrado de lado d. Qual o fluxo elétrico através do quadrado?

*Solução: Pensemos no quadrado como uma das faces de um cubo de aresta d, em cujo centro encontra-se a carga +q. Como o cubo tem 6 faces, o fluxo por cada face deve ser 1/6 do fluxo pelo cubo:* $\Phi_{cubo} = 6\ \Phi_{quadrado}$. *Pela lei de Gauss* $\Phi_{cubo} = q/\varepsilon_o$. *Logo*

$$\boxed{\Phi_{quadrado} = q/6\varepsilon_o.}$$

**Problema proposto**: O campo elétrico numa certa região da atmosfera está dirigido verticalmente para baixo. Numa altitude de 300 m o módulo do campo é 60,0 N/C, e numa altitude de 200 m, vale 100 N/C. Determine a carga líquida contida num cubo de 100 m de aresta, com as faces horizontais nas altitudes de 200 e 300 m. Resposta: 3,6 μC.




<u>A Lei de Coulomb pode ser vista como um caso particular da Lei de Gauss</u>: considere uma carga puntiforme Q, e uma gaussiana esférica de raio r centrada em q. Como as linhas de força apontam radialmente para fora, o campo elétrico em todos os pontos da esfera é paralelo ao elemento de área vetorial dA. Logo

$$\mathbf{E}\ .\ \mathbf{dA} = E\ dA \cos 0^o = E\ dA$$

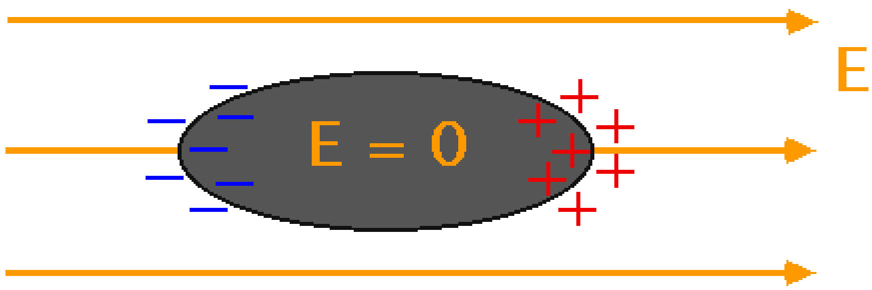
Em todos os pontos da esfera o campo elétrico tem o mesmo módulo ("simetria esférica"), logo E é constante enquanto integramos sobre a superfície S de área $A = 4\pi r^2$. O fluxo elétrico pela superfície esférica S será

$$\boxed{\Phi = \oint_S EdA = E\oint_S dA = EA = E(4\pi r^2)}$$

Pela lei de Gauss $\Phi = q/\varepsilon_o$, de modo que $E(4\pi r^2)=q/\varepsilon_o$. Isolando o campo E obteremos o mesmo resultado fornecido via lei de Coulomb:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

**Condutor carregado isolado em equilíbrio eletrostático**: o campo elétrico em seu interior é nulo (se houvesse campo não-nulo haveria movimento de cargas no seu interior)




Qualquer excesso de carga colocado num condutor isolado em equilíbrio eletrostático mover-se-á inteiramente para a superfície externa do condutor.

Prova: Colocamos uma gaussiana S colada à superfície interna do condutor. Como o campo elétrico dentro do condutor é nulo (E = 0) o fluxo elétrico por S também é zero. A Lei de Gauss $\Phi = q/\varepsilon_o = 0$ implica que q = 0 dentro de S. Logo, se houver qualquer excesso de carga q no condutor (por exemplo, por eletrização), ele não pode estar dentro de S; só pode estar fora de S, isto é, na superfície externa do condutor. CQD

Um excesso de carga num condutor isolado deve estar inteiramente na superfície externa, mesmo que o condutor tenha uma cavidade interna.

Prova: Colocamos, agora, a gaussiana S colada à superfície da cavidade, pelo lado de dentro do condutor. Sabemos que o campo dentro do condutor é nulo, portanto o fluxo elétrico por S também é zero. Logo q = 0 dentro de S, ou seja, não há carga na superfície da cavidade. CQD

**Problema resolvido**: Um condutor isolado de forma arbitrária tem uma carga líquida de +10 μC. Dentro do condutor existe uma cavidade, no interior da qual está uma carga puntiforme + 3,0 μC. Qual a carga (a) sobre a parede da cavidade? (b) sobre a superfície externa do condutor?

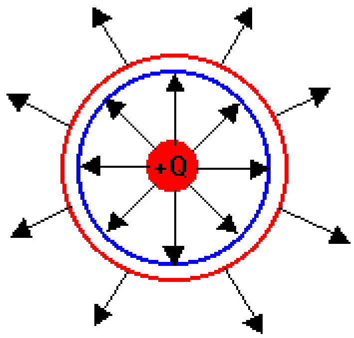
*Solução: q = 3,0 μC: carga dentro da cavidade*
*$q_1$: carga na superfície da cavidade ($S_1$)*
*$q_2$: carga na superfície externa do condutor ($S_2$)*
*$Q = q_1 + q_2 = 10\,\mu C$: carga líquida no condutor*
*(a) Como E = 0 dentro do condutor o fluxo elétrico por $S_1$ é nulo. Da Lei de Gauss aplicada na superfície $S_1$*

$$\Phi = (q + q_1)/\varepsilon_o = 0,\ q + q_1 = 0,\ q_1 = -q = -3{,}0\,\mu C$$

*sendo que essa carga deve estar na parede da cavidade;*

*(b) Como o condutor está isolado, se há um excesso de carga + q no condutor, este deve localizar-se na sua superfície externa ($q_2$). A carga líquida do condutor é $Q = q_1 + q_2$ logo a carga na superfície externa do condutor é*

$$q_2 = Q - q_1 = Q - (-q) = Q + q = 10\ \mu C + 3\ \mu C = +\ 13\ \mu C$$




**Problema proposto**: Uma carga puntiforme + 5,0 μC é colocada no centro de uma esfera metálica oca de raio externo 10 cm e raio interno 9 cm. Que densidades superficiais de carga aparecem sobre (a) a superfície interna, (b) a superfície externa da esfera? (c) Se aproximarmos da esfera um objeto de metal descarregado, suas respostas anteriores serão alteradas? Respostas: (a) - 49 $\mu C/m^2$; (b) 39 $\mu C/m^2$; (c) sim, as densidades de carga não serão mais uniformes sobre as superfícies envolvidas.

**Problema suplementar**: Uma esfera condutora com carga Q é envolvida por uma casca esférica condutora. (a) Qual é a carga líquida sobre a superfície interna da casca? (b) Uma outra carga q é colocada fora da casca. Qual é, então, a carga líquida sobre a superfície interna da casca? (c) Se a carga q for deslocada para uma posição entre a casca e a esfera, qual será a carga líquida sobre a superfície interna da casca? (d) Suas respostas seriam válidas se a esfera e a casca não fossem concêntricas? Respostas: (a) –Q, (b) –Q, (c) –q-Q, (d) Sim.