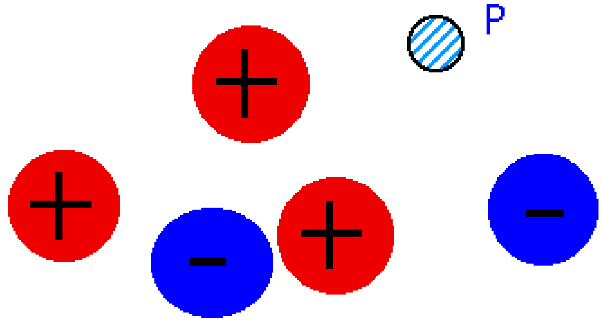
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Física

Física III – Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

Referências bibliográficas:
H. – 24-4, 24-5, 24-6, 24-9
S. – 22-7, 22-9
T. – 18-6, 18-7, 19-1

Aula 4: Campo Elétrico de um Sistema de Cargas Puntiformes

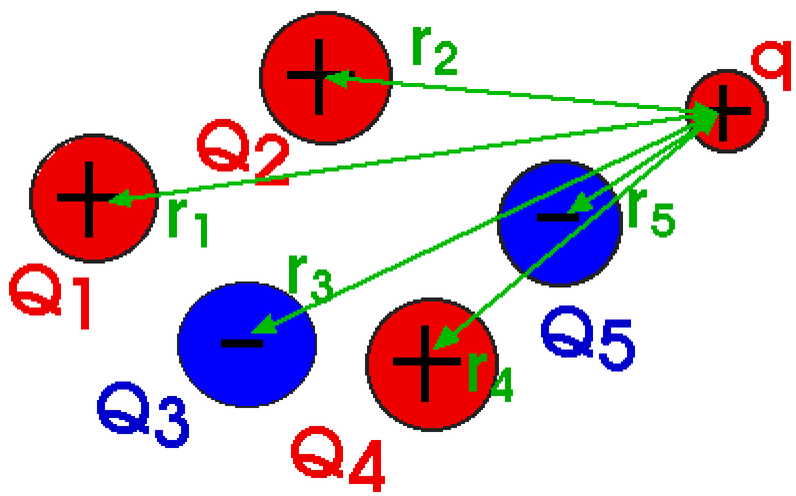
O princípio da superposição também vale para campos elétricos: o campo resultante num ponto é a soma vetorial dos campos produzidos por cada uma das cargas puntiformes de um sistema.



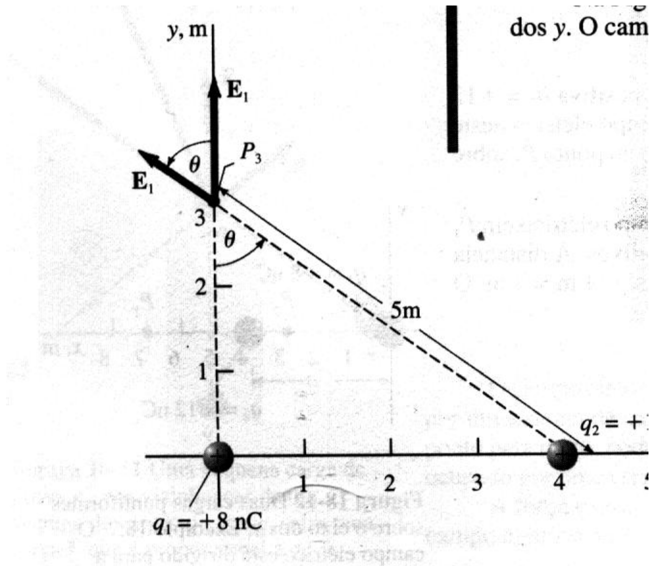
Se as cargas q_1, q_2, ... q_N do sistema estão a distâncias r_1, r_2, ... r_N do ponto P, o campo em P será dado por

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots + \mathbf{E}_N = \Sigma\, \mathbf{E}_i}$$

Onde $\boxed{E_i = k\dfrac{q_i}{r_i^2}}$ em módulo.



Problema Resolvido: Considere um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Há uma carga q_1 = + 8,0 nC na origem do sistema, e uma carga q_2 = + 12 nC no ponto (x=4m,y=0). Determine o campo elétrico no ponto P:(x=0,y=3m).



Solução: O campo produzido pela carga q_1 no ponto P é

$$E_1 = k\frac{q_1}{y^2} = \frac{(8{,}99x10^9)(8x10^{-9})}{3^2} = 7{,}99N/C$$

enquanto o produzido pela carga q_2 é

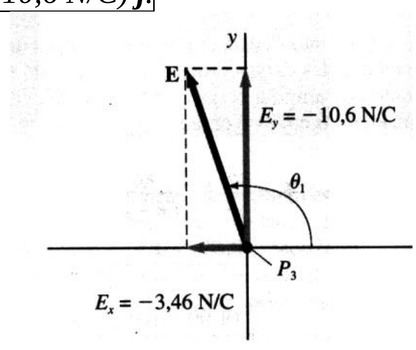
$$E_2 = k\frac{q_2}{r^2} = \frac{(8{,}99x10^9)(12x10^{-9})}{5^2} = 4{,}32N/C$$

onde usamos o teorema de Pitágoras para achar $r^2 = 3^2 + 4^2$.
O campo resultante em P é E = E_1 + E_2, cujas componentes são:

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = 0 - E_2 \text{ sen } \theta = -\ 4{,}32\ (4/5) = -\ 3{,}46 \text{ N/C}$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = E_1 + E_2 \cos\theta = 7{,}99 + 4{,}32\ (3/5) = 10{,}6 \text{ N/C}$$

ou seja $\boxed{\mathbf{E} = -\ (3{,}46\ \text{N/C})\ \mathbf{i} + (10{,}6\ \text{N/C})\ \mathbf{j}.}$



O módulo da resultante é

$$\boxed{E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(-3{,}46)^2 + (10{,}6)^2} = 11{,}2N/C}$$

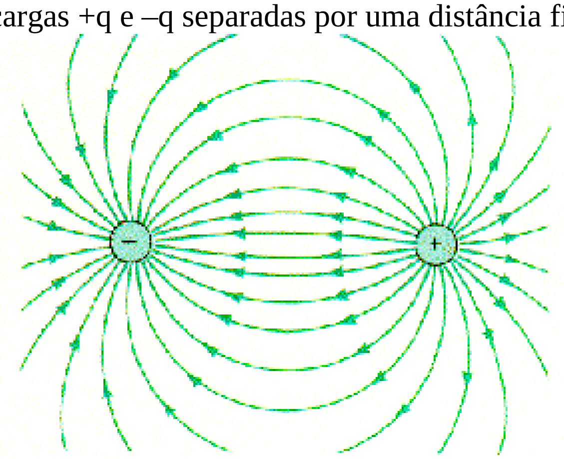
e o ângulo que ***E*** *faz com o eixo das abscissas é dado por*

$$\boxed{tg\,\theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{10{,}6}{-3{,}46} = -3{,}06}$$

tal que $\theta = 108^o$, que é o único ângulo compatível com os valores das componentes.

Problema proposto: Uma carga puntiforme de 5 μC está situada no ponto (x = 1 m,y = 3m), e uma segunda carga puntiforme de -4 μC está fixa no ponto (x = 2 m, y = -2 m). (a) Achar o campo elétrico no ponto (x = -3 m, y = 1 m); (b) Achar a força elétrica sobre um elétron colocado nesse ponto.
Respostas: (a) (1104 N/C) **i** – (1550 N/C) **j**; (b) (1,77 x 10^{-16} N) **i** + (2,48 x 10^{-16} N) **j**

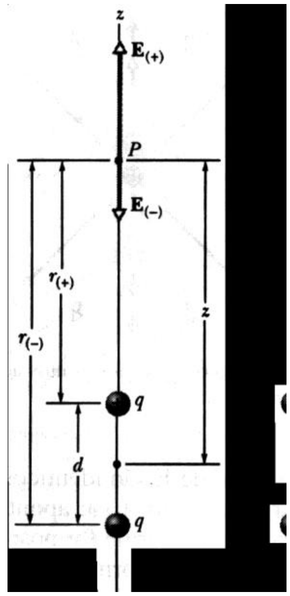
Dipolo elétrico: duas cargas +q e –q separadas por uma distância fixa d



<u>Aplicações</u>: moléculas polares (Ex.: água) apresentam dipolos elétricos permanentes

<u>Campo elétrico no eixo de um dipolo elétrico</u>

d: distância fixa entre as cargas +q e –q
r_+: distância entre a carga +q e o ponto P, onde se está calculando o campo elétrico
r_-: distância entre a carga -q e o ponto P
z: distância entre o centro do dipolo (ponto médio entre as cargas) e o ponto P



$$E_{+} = k\frac{q}{r_{+}^{2}}$$ campo criado pela carga +q

$$E_{-} = k\frac{q}{r_{-}^{2}}$$ campo criado pela carga -q

$$E = E_{+} - E_{-} = kq\left(\frac{1}{r_{+}^{2}} - \frac{1}{r_{-}^{2}}\right)$$ campo resultante no ponto P (expressão exata, mas pouco útil na prática)

Da figura

$$r_{+} = z - \frac{d}{2} = z\left(1 - \frac{d}{2z}\right) \qquad r_{-} = z + \frac{d}{2} = z\left(1 + \frac{d}{2z}\right)$$

de modo que

$$\left(\frac{1}{r_{+}^{2}} - \frac{1}{r_{-}^{2}}\right) = \frac{1}{z^{2}}\left[\left(1 - \frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2z}\right)^{-2}\right]$$

<u>Expressões como esta podem ser aproximadas usando-se o teorema binomial</u>

$$\boxed{(1 \pm x)^{n} \cong 1 \pm nx}$$

válida apenas se x << 1, e que corresponde ao binômio de Newton, desprezadas todas as potências de x superiores a 1. Lembre que, se x <<1, então x^2 << x, x^3 << x^2, e assim por diante. Por exemplo, se x = 0,01, e n = 3

$$(1+0{,}01)^3 \cong 1+3x0{,}01=1{,}03$$

ao passo que o valor exato é $1{,}01^3$ = 1,030301, o que resulta num erro de apenas

$$\frac{1{,}030301-1{,}03}{1{,}030301}=0{,}000292x100\%=0{,}03\%$$

Se o ponto onde calculamos o campo está muito distante do dipolo, então z >> d, ou seja, (d/2z) << 1; de modo que podemos aplicar o teorema binomial

$$\left(1\pm\frac{d}{2z}\right)^{-2}\cong 1\pm(-2)\frac{d}{2z}=1\mp\frac{d}{z}$$

$$E=kq\left(\frac{1}{r_+^2}-\frac{1}{r_-^2}\right)\cong\frac{kq}{z^2}\left[\left(1+\frac{d}{z}\right)-\left(1-\frac{d}{z}\right)\right]=\frac{kq}{z^2}\frac{2d}{z}$$

Momento de dipolo elétrico p: grandeza vetorial

(i) direção: eixo do dipolo
(ii) sentido: da carga negativa para a positiva
(iii) módulo: $\boxed{p = qd}$
Unidade: [p]=[q][d]=C.m no S.I.

Escrevemos o campo elétrico distante do dipolo (e sobre o seu eixo) como

$$\boxed{E\cong\frac{2kp}{z^3}}$$

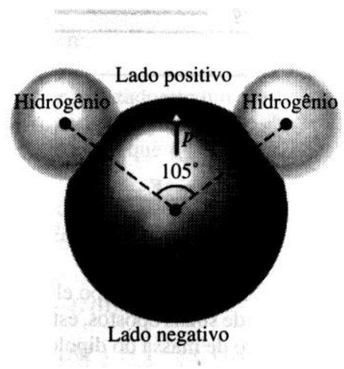
Observe que o campo elétrico cai com o cubo da distância, ou seja, mais rapidamente que o campo de uma carga. Isso se explica pois, como a carga total do dipolo é nula (+q – q = 0) então o campo em P deve-se somente à diferença nas distâncias das duas cargas ao ponto P, que é um efeito mais fraco.

Problema resolvido: O momento de dipolo elétrico do cloreto de sódio ($Na^+ Cl^-$) é igual a 0,2 e.nm, onde e é a carga do elétron. Qual a força elétrica sentida por um próton situado a 500 nm do dipolo?
Solução: Em unidades do S.I. o momento de dipolo é

$$p = 0{,}2 \times (1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(1 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}) = 3{,}2 \times 10^{-29}\ \mathrm{C.m}$$

$$E \cong \frac{2kp}{z^3} = \frac{2x9{,}0x10^9\,x3{,}2x10^{-29}}{(500x10^{-9})^3} = 4{,}61\frac{N}{C}$$

$$F = qE = 1{,}60 \text{ x } 10^{-19}\text{x}4{,}61 = \boxed{7{,}37\text{x}10^{-19}\text{ N}}$$



Problema proposto: Uma molécula de água (no estado de vapor) tem um momento de dipolo elétrico de 6,2 x 10^{-30} C.m. (a) Exprima p em unidades e.nm; (b) Qual a distância entre o centro de carga positiva e o centro de carga negativa da molécula, sabendo-se que ela possui 10 elétrons e 10 prótons? (c) Estime o campo elétrico a 100 nm da molécula. Respostas: (a) 0,0387 e.nm; (b) 3,9 pm; (c) 112 N/C

Movimento de um dipolo elétrico num campo elétrico uniforme

Como a resultante das forças elétricas atuando sobre o dipolo é nula ($F_1 + F_2 = 0$), o dipolo encontra-se em equilíbrio de translação (o centro de massa pode estar em repouso ou em MRU). No entanto, como temos um binário de forças (já que as linhas de ação são paralelas) há um torque resultante, de modo que o dipolo NÃO está em equilíbrio de rotação.

Torque do binário: $\boxed{\tau = -\,F\,d \operatorname{sen}\theta}$, já que d sen θ é o braço do binário. O sinal negativo é convencional para rotações no sentido horário.

Mas F = q E, e p = qd. Logo $\tau = -\,q\,E\,d \operatorname{sen}\theta = -\,p\,E \operatorname{sen}\theta$

Como o torque é uma grandeza vetorial, podemos escrevê-lo como o produto vetorial

$$\boxed{\tau = p \times E}$$

ou seja, na figura o vetor **τ** aponta perpendicularmente para dentro do plano da página (plano que contém os vetores **p** e **E**).

Recordação*: O produto escalar dos vetores* ***A*** *e* ***B*** *é um número real*
A . B*=A B cos θ, onde θ é o ângulo entre eles*
O produto vetorial dos vetores ***A*** *e* ***B*** *é o vetor* ***C*** *=* ***A*** *x* ***B****, onde:*
*- módulo: C = |****C****| = A B sen θ*
- direção: perpendicular ao plano que contém os vetores ***A*** *e* ***B***
- sentido: dado pela regra do parafuso ou do saca-rolhas.

Energia potencial de rotação: o torque exercido pelo campo elétrico sobre o dipolo tende a provocar uma rotação deste, de modo a alinhar o dipolo com o campo elétrico. Da Mecânica, sabemos que a variação de energia potencial é igual a menos o trabalho realizado pelo torque do binário. Lembrando que o torque não é constante, pois depende do ângulo θ, devemos usar a fórmula integral para o trabalho do binário

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -W = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$$

Convencionamos (posição de referência) que $\theta_1 = 90^o$, de modo que $U_1 = 0$. Tirando o índice 2 por comodidade teremos

$$U = -\int_{90^o}^{\theta} \tau d\theta = -\int_{90^o}^{\theta} (-pEsen\theta) d\theta$$

Como tanto p como E são constantes (campo uniforme!) temos

$$U = pE \int_{90^o}^{\theta} sen\theta d\theta = pE(-\cos\theta)_{90^o}^{\theta} = pE(-\cos\theta + \cos 90^o)$$

$$\boxed{U(\theta) = -pE\cos\theta}$$

que pode ser escrita vetorialmente como U(θ) = **- p . E** (produto escalar dos vetores p e E).

Análise de casos particulares:

(a) se $\theta = 0^o$, p e E são paralelos (dipolo alinhado com o campo), U(0)= - pE: valor mínimo da energia potencial, que é a posição de equilíbrio. Torque nulo $\tau(0) = 0$

(b) se $\theta = 90^o$, p e E são perpendiculares, $U(90^o)= 0$ mas torque $\tau(90^o) = - pE$ máximo em valor absoluto

(c) se $\theta = 180^o$, p e E são antiparalelos (dipolo oposto ao campo), $U(180^o)= + pE$: valor máximo da energia potencial, que é uma posição de equilíbrio instável já que $\tau = 0$

Problema resolvido: Considere uma molécula de água num campo elétrico uniforme 1,5 x 10^4 N/C. (a) Qual o torque máximo sobre a molécula? (b) Que trabalho deve ser realizado para girar a molécula da posição de alinhamento com o campo para a posição onde p e E são anti-paralelos?

Solução: (a) Do problema anterior p = 6,2 x 10^{-30} C.m. O torque máximo ocorre quando $\theta = 90^o$. Em valor absoluto

$$\tau = pE = 6{,}2\text{x}10^{-30}\text{x}1{,}5\text{x}10^{4} = 9{,}3 \text{ x } 10^{-26} \text{ N.m}$$

(b) O trabalho é igual à diferença de energia potencial entre as posições onde $\theta = 180^o$ (anti-paralelos) e $\theta = 0$ (paralelos)

$$W = U(180) - U(0) = pE - (-pE) = 2pE = 2 \text{ x } 9{,}3 \text{ x } 10^{-26} = 1{,}9 \text{ x } 10^{-25} \text{ J}$$

Problema proposto: Um dipolo elétrico com momento de 0,02 e.nm faz um ângulo de 20^o com um campo elétrico uniforme de 3 x 10^3 N/C. Calcule os valores do torque e da energia potencial do sistema. Respostas: - 3,28 x 10^{-27} N.m, - 9,02 x 10^{-27} J