Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Física

Física III - Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

Referências bibliográficas:
H. – 36-1, 36-3, 36-4, 36-5, 36-6
S. – 32-2, 32-3, 32-4, 32-5, 32-6
T. – 28-1, 28-2, 28-5

Aula 28 – Circuitos de corrente alternada

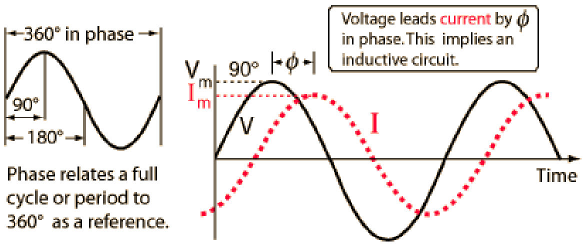
Recordação: uma força eletromotriz (fem) alternada varia senoidalmente com o tempo com freqüência angular $\omega = 2\pi f$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \text{ sen } \omega t$$

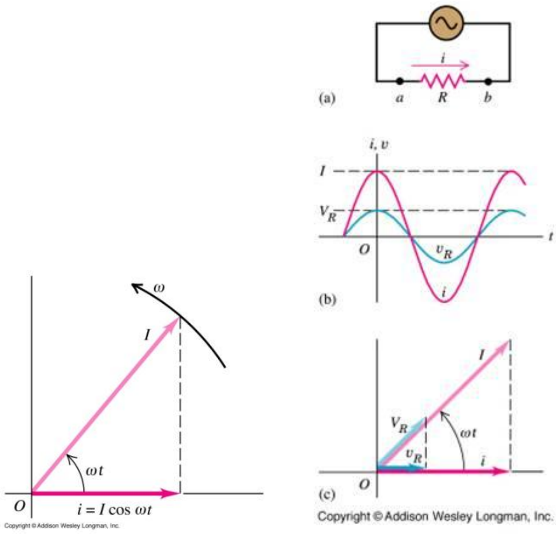
Corrente alternada: oscila com a mesma freqüência, mas defasada em geral da fem alternada:

$$i(t) = I \text{ sen } (\omega t - \varphi)$$

onde I é a amplitude, ou valor máximo, e φ é chamada "diferença de fase".



A fase ωt é um ângulo que vai de 0 a 2π, de forma que uma quantidade que varia senoidalmente pode ser representada por um fasor, que é um vetor girante no sentido anti-horário, cujo módulo é igual à amplitude da quantidade, e onde a fase é o ângulo que o vetor faz com o eixo horizontal. A projeção vertical é o valor instantâneo da quantidade variável.



1. Circuito AC puramente resistivo

Vamos considerar um gerador de tensão alternada $\varepsilon(t) = \varepsilon_m$ sen ωt ligado a um resistor de resistência R. A tensão no resistor é igual à fem do gerador

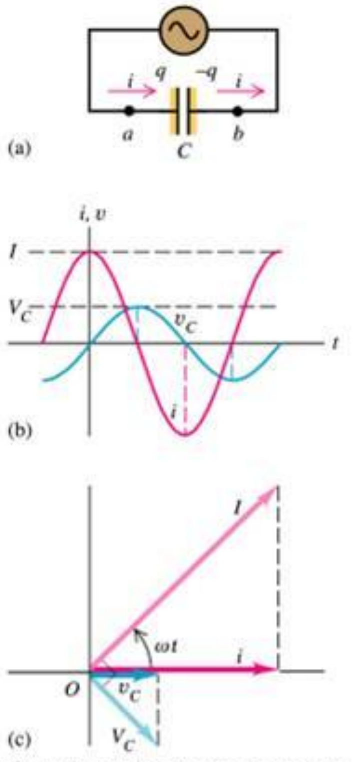
$$v_R = R\ i_R = \varepsilon(t) = \varepsilon_m \text{ sen } \omega t$$

Escrevendo $v_R(t) = V_R$ sen ωt e substituindo junto com $i(t) = I_R$ sen $(\omega t\text{-}\varphi)$ obtemos

$$V_R \text{ sen } \omega t = R\ I_R \text{ sen } (\omega t\text{-}\varphi)$$

que só é satisfeita se $\varphi = 0$ (a corrente está em fase com a tensão) e $\boxed{V_R = R\ I_R}$.

Se essa relação vale para as amplitudes (valores máximos), dividindo ambos os membros por $\sqrt{2}$ temos que ela também vale para os valores eficazes (médias temporais): $\boxed{V_{RMS} = R\ I_{RMS}}$. Logo, quando se trata de corrente alternada num circuito puramente resistivo, podemos tratar como se fosse um circuito de corrente contínua, desde que substituamos as correntes pelos seus respectivos valores eficazes.



2. Circuito AC puramente capacitivo

Uma corrente contínua não pode passar por entre as placas de um capacitor, mas uma corrente alternada "pode", pois ela não envolve o deslocamento efetivo de cargas. Pela definição de capacitância $C = q_C/v_C$, onde q_C é a carga nas placas do capacitor e a ddp entre as placas é

$$v_C = V_C \text{ sen } \omega t. \text{ Logo } \ q_C = C\ V_C \text{ sen } \omega t.$$

A corrente alternada que "passa" pelo capacitor é

$$i_C(t) = \frac{dq_C}{dt} = \omega C\ V_C \cos \omega t = \omega C\ V_C \text{ sen}(\omega t + 90^o)$$

Definimos a "reatância capacitiva" como

$$\boxed{X_C = \frac{1}{\omega C}}$$

$$i_C(t) = \frac{V_C}{X_C}\text{sen}(\,\omega t + 90^o) = I_C\; sen\;(\omega t - \varphi)$$

Donde tiramos duas conclusões:

(i) $\varphi = -90^0$: a corrente está defasada de 90^o (adiantada) em relação à tensão no capacitor (o fasor da corrente é perpendicular ao fasor da tensão, e ambos giram conjuntamente com a mesma freqüência angular);

(ii) temos que $\boxed{I_C = V_C/X_C}$, ou seja, a reatância capacitiva faz, no circuito de corrente alternada, o mesmo papel da resistência num circuito de corrente contínua.

Problema resolvido: Considere um gerador de corrente alternada com amplitude 25,0 V e freqüência angular 377 rad/s, ligado a um capacitor de 4,15 μF. (a) Qual o valor máximo da corrente? (b) no instante em que a corrente é máxima, qual a fem do gerador? (c) quando a fem do gerador é -12,5 V e está crescendo em módulo, em que instante isso ocorre e qual é o valor da corrente?

Solução: (a) A reatância capacitiva é $X_C = 1/\omega C = 1/377 \times 4{,}15 \times 10^{-6} = 639\ \Omega$. Logo, a amplitude da corrente é $I_C = V_C/X_C = \varepsilon_m/X_C = 25/639 = 3{,}91 \times 10^{-2}$ A = 39 mA

(b) como a tensão no capacitor está atrasada de 90^o em relação à corrente, no instante em que a corrente é máxima, a fem do gerador é nula.

(c) Como $\varepsilon(t) = \varepsilon_m$ sen ωt, então -12,5 = 25,0 sen ωt, de modo que

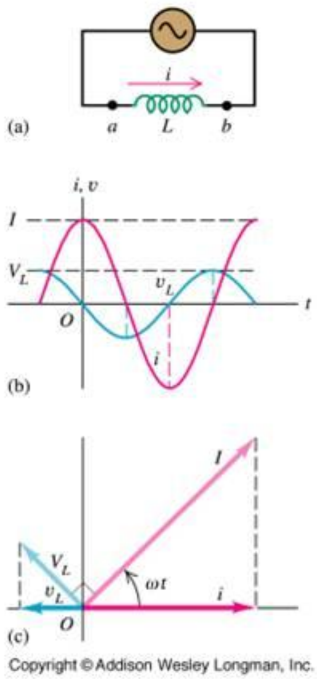
ωt = arc sen (-12,5/25,0) = arc sen (-0,5) = - 0,523 rad ou 3,663 rad (= 0,523 + π)

Por hipótese, a tensão está crescendo em módulo, então a resposta correta é a segunda, e t = 3,663/377 = $9{,}7 \times 10^{-3}$ s = 9,7 ms, sendo a corrente dada por

$$i_C(t) = I_C\; sen(\,\omega t + \pi/2) = 39\; sen\left(3{,}663 + \frac{\pi}{2}\right) = \; 39x\;(-0{,}867) = \; -33{,}8\; mA$$

Problema proposto: Uma fonte de fem alternada, com amplitude 36,0 V e frequência 60,0 Hz, está ligada a um capacitor de 15,0 μF. Calcule: (a) a reatância capacitiva; (b) o valor máximo da corrente elétrica; (c) no instante em que a corrente é nula, qual a fem do gerador? (d) quando a fem do gerador é -12,5 V e está decrescendo em módulo, em que instante isso ocorre e qual é o valor da corrente?

Respostas: (a) 177 Ω; (b) 0,203 A.



3. Circuito AC puramente indutivo

Temos, aqui, um indutor (bobina) em série com uma fonte de tensão alternada. A ddp sobre o indutor é $v_L = V_L$ sen ωt (não esqueça da convenção: letra minúscula = valor instantâneo; letra maiúscula = valor máximo). Logo, pela definição de indutância

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{v_L}{L} = \frac{V_L\, sen\, \omega t}{L}$$

$$di_L = \frac{V_L\, sen\, \omega t}{L}\, dt$$

$$i_L = \int di_L = \int_0^t \frac{V_L\, sen\, \omega t}{L}\, dt = \frac{V_L}{L}\int_0^t sen\, \omega t\, dt = -\frac{V_L}{\omega L}\cos \omega t$$

Definimos a "reatância indutiva" como

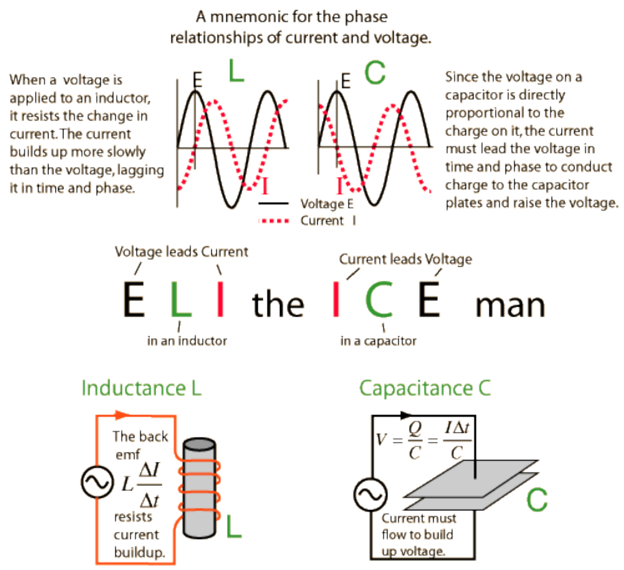
$$\boxed{X_L = \omega L}$$

$$i_L(t) = -\frac{V_L}{X_L}\cos \omega t = -\frac{V_L}{X_L}\mathrm{sen}(\,\omega t - 90^o) = I_C\; sen\;(\omega t - \varphi)$$

Seguem novamente duas conclusões:

(i) $\varphi = 90^0$: a corrente está defasada de 90^o (atrasada) em relação à tensão no capacitor (o fasor da corrente é perpendicular ao fasor da tensão, e ambos giram conjuntamente com a mesma freqüência angular);

(ii) temos que $\boxed{I_L = V_L/X_L}$, ou seja, a reatância indutiva faz no circuito de corrente alternada, o mesmo papel da resistência num circuito de corrente contínua.



Resumo e “macete” para lembrar quem está adiantado ou atrasado em relação a quem: “ELI the ICE man”

Problema resolvido: A saída de uma fonte de fem alternada tem amplitude de 25,0 V e freqüência angular 377 rad/s. A fonte está ligada a um indutor de 12,7 H. (a) Qual o valor máximo da corrente? (b) No instante em que a corrente é máxima, qual é a fem no gerador? (c) qual o valor da corrente quando a fem do gerador é -12,5 V e está crescendo em módulo? (d) a potência está sendo fornecida ou absorvida pela fonte?

Solução: (a) a reatância indutiva é $X_L = \omega L = 377 \times 12{,}7 = 4788\ \Omega$*, de modo que a amplitude de corrente é* $I_L = V_L/X_L = 25/4788 = 5{,}22 \times 10^{-3}$ *A = 5,22 mA*

(b) como a corrente está atrasada de 90^o *em relação à tensão no circuito então, se a corrente* i_L *é máxima, então a tensão no indutor* v_L *é nula. Como* $v_L = \varepsilon$ *, então* $\varepsilon = 0$

(c) sendo $\varepsilon = -12{,}5$ *V para um certo instante t, temos que, de* $\varepsilon = \varepsilon_m \operatorname{sen} \omega t$*,*

$$sen\ \omega t = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} = \frac{-12{,}5}{25{,}0} = -0{,}5$$

que tem, como soluções, os ângulos $\omega t = -0{,}523$ *rad e* $\omega t = 3{,}664$ *rad. Para decidir qual delas é válida, vamos calcular a taxa de variação da fem do gerador:*

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon_m\ \omega \cos \omega t = 25x377 \cos(-0{,}523) = 9425 \times 0{,}866 = 8162 > 0$$

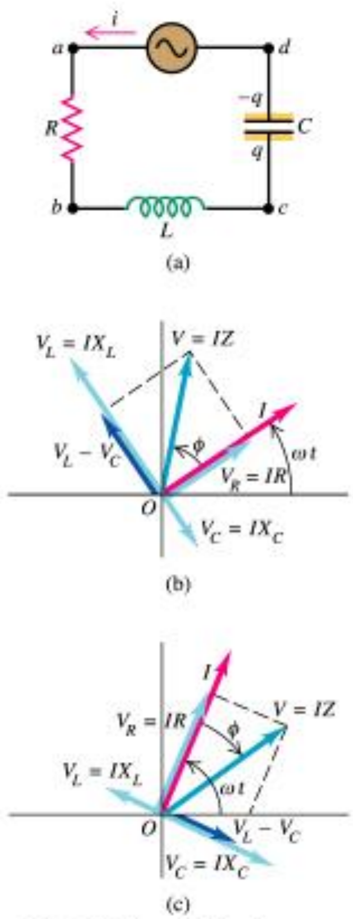
ou seja, a fem está crescendo em módulo para $\omega t = -0{,}523$ *rad. O outro ângulo daria para a derivada um valor negativo: -8162 < 0, contrário ao enunciado.*

A corrente é

$$i_L = I_L \cos \omega t = 5{,}22 \cos(-0{,}523) = 4{,}52\ mA$$

(d) $P = \varepsilon\, i_L = -12{,}5 \times 4{,}52 \times 10^{-3} = -56{,}5 \times 10^{-3}$ *W = -56,5 mW < 0: a fonte está* ***absorvendo*** *energia do circuito nesse instante de tempo.*

Problema proposto: Uma fonte de fem alternada, com amplitude 36,0 V e frequência 60,0 Hz, está ligada a um indutor de 230 mH. Calcule: (a) a reatância indutiva; (b) o valor máximo da corrente elétrica; (c) no instante em que a corrente é nula, qual a fem do gerador? (d) quando a fem do gerador é -12,5 V e está decrescendo em módulo, em que instante isso ocorre e qual é o valor da corrente? Respostas: (a) 86,7 Ω; (b) 0,415 A.



4. Circuito RLC em série

Da lei das malhas, $\varepsilon = v_R + v_C + v_L$, que são as tensões no resistor, capacitor e indutor, respectivamente. Sabemos, dos três casos anteriores, que o fasor de V_R gira juntamente com o fasor da corrente I; assim como o fasor de V_C está atrasado de 90^o em relação ao fasor de I; e o fasor de V_L está adiantado de 90^o em relação ao fasor de I. Somar fasores equivale a somar vetores para um dado instante de tempo t. Sendo assim, temos um triângulo retângulo de lados V_R e $V_L - V_C$, e hipotenusa ε_m. Aplicando Pitágoras

$$\varepsilon_m^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2$$

Pelas definições de resistência e reatâncias $V_R = R\,I$, $V_C = X_C\,I$, e $V_L = X_L\,I$, donde

$$\varepsilon_m^2 = R^2 I^2 + (IX_L - IX_C)^2 = I^2[R^2 + (X_L - X_C)^2]$$

ou, isolando a corrente

$$\boxed{I = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}}$$

Definindo a impedância

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Temos que $\boxed{I = \varepsilon_m/Z}$, ou seja,a impedância faz o papel de resistência equivalente da associação RLC em série.

A defasagem φ entre o fasor da fem e o fasor da corrente pode ser obtida também do triângulo retângulo:

$$tg\ \varphi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR}$$

$$\boxed{tg\ \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}}$$

Problema resolvido: Num circuito RLC operando na freqüência de 60,0 Hz, a tensão máxima no indutor é o dobro da tensão máxima no resistor e o dobro da tensão máxima no capacitor. (a) qual a defasagem entre a corrente e a fem do gerador? (b) sabendo-se que a fem máxima do gerador é 30,0 V, qual deve ser a resistência R para que a corrente máxima seja de 300 mA?

Solução: (a) Do enunciado, $V_L = 2\ V_C = 2\ V_R$; logo $V_C = V_R$ e a defasagem será

$$tg\ \varphi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{2V_R - V_R}{V_R} = 1, \text{ logo } \varphi = 45^0.$$

(b) $\varepsilon_m^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2 = V_R^2 + (2V_R - V_R)^2 = 2\ V_R^2$

$$\text{Logo } V_R = \varepsilon_m/\sqrt{2} = 30{,}0/\sqrt{2} = 21{,}2\ V$$

Por outro lado, a tensão no resistor é $V_R = RI$, de modo que a resistência desejada é

$$R = V_R/I = 21{,}2/300\times10^{-3} = 70{,}7\ \Omega$$

Problema proposto: Uma bobina de indutância 88 mH e resistência desconhecida é ligada em série, juntamente com um capacitor de 0,94 μF, a um gerador de fem alternada que opera à freqüência de 930 Hz. Sabendo-se que a defasagem entre a fem e a corrente é de 75^o, qual a resistência da bobina? Resposta: 89 Ω.

Problema suplementar: Um circuito RLC em série, com L = 2 H, C = 2 μF e R = 20 Ω é excitado por um gerador cuja fem máxima é 100 V e a freqüência é de 60 Hz. Calcule: (a) as reatâncias capacitiva, indutiva, e a impedância; (b) a corrente máxima; (c) a defasagem. Respostas: (a) 1326 Ω, 754 Ω, 572 Ω (b) 0,17 A; (c) – 88^o.

5. Potência em circuitos de corrente alternada

Valor eficaz ou valor médio quadrático da corrente alternada: $I_{RMS} = I/\sqrt{2}$.
Valor eficaz ou valor médio quadrático da fem alternada: $\varepsilon_{RMS} = \varepsilon/\sqrt{2}$

O valor eficaz da potência dissipada no resistor será, portanto $P_{RMS} = R\ I_{RMS}^2$. Usando, agora, a expressão deduzida há pouco: $I = \varepsilon_m/Z$, e dividindo os dois membros por √2 temos que $I_{RMS} = \varepsilon_{RMS}/Z$. Substituindo temos a potência eficaz

$$P_{RMS} = R\left(\frac{\varepsilon_{RMS}}{Z}\right)^2 = R\ \frac{\varepsilon_{RMS}}{Z}\ I_{RMS}$$

Por outro lado, do triângulo retângulo de fasores, tiramos que

$$cos\,\varphi = \frac{V_R}{\varepsilon_m} = \frac{IR}{IZ} = \frac{R}{Z}$$

dito "fator de potência" do circuito, já que a potência média será

$$\boxed{P_{RMS} = \varepsilon_{RMS}\, I_{RMS} \cos\varphi}$$

Num circuito:

- Puramente resistivo: φ = 0, logo o fator de potência será cos 0 = 1 e a potência eficaz será máxima: $P_{RMS} = \varepsilon_{RMS}\, I_{RMS}$
- Puramente capacitivo: φ = -90^0, logo o fator de potência será cos φ = 0 e a potência eficaz será nula: $P_{RMS} = 0$
- Puramente indutivo: φ = 90^0, logo o fator de potência será cos φ = 0 e a potência eficaz será nula: $P_{RMS} = 0$

Problema resolvido: Um motor elétrico é ligado a uma tensão alternada de 120 V (valor eficaz) e freqüência 60 Hz, produzindo trabalho mecânico na taxa de 0,100 hp (1 hp = 746 W). Sabendo-se que ele "puxa" uma corrente de 0,650 A (valor eficaz), calcule: (a) o fator de potência; (b) a resistência do motor. Ela é igual à resistência medida com o motor desligado?

Solução: (a) supondo que não haja perda de energia, a potência útil do motor é igual à sua potência elétrica: P_{RMS} = 0,100 hp (746 W/1 hp) = 74,6 W. Logo

$$cos\,\varphi = \frac{P_{RMS}}{\varepsilon_{RMS}\, I_{RMS}} = \frac{74{,}6}{120x0{,}650} = 0{,}956$$

(b) desconsiderando a indutância do enrolamento do motor, só a sua resistência, temos $P_{RMS} = R\, I_{RMS}^2$, logo $R = 74{,}6/0{,}650^2 = 177\ \Omega$, que será diferente da resistência medida com o motor desligado (com um ohmímetro, por exemplo).

Problema proposto: Um condicionador de ar, ligado à tensão alternada de 120 V – 60 Hz, equivale a uma resistência de 12,0 **Ω** e uma reatância indutiva de 1,30 **Ω**. (a) Ache a impedância do condicionador de ar; (b) Calcule a potência eficaz do condicionador de ar em btu's por hora (1 btu/hora = 0,2930 W). Respostas: (a) 12,1 **Ω**; (b) 1,18 kW.

Problema suplementar: Um circuito RLC em série tem uma resistência de 100 **Ω**, uma indutância de 0,10 H, e um capacitor de 20 μF, ligados a uma fonte de tensão alternada com fem eficaz de 110 V a 60 Hz. Calcule: (a) a corrente eficaz; (b) as tensões eficazes no resistor, indutor e capacitor; (c) o fator de potência; (d) a potência eficaz. Respostas: (a) 0,79 A; (b) 79 V, 0,11 kV e 30 V; (c) 0,719; (d) 62,5 W.

6. Ressonância no circuito RLC em série: vimos que a ressonância entre a fem alternada de freqüência angular ω e o circuito RLC de freqüência "natural" $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ ocorre sempre que $\boxed{\omega = \omega_0}$. Nesse caso, as reatâncias serão iguais, pois:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\sqrt{LC}}{C}\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\boxed{X_L = X_C}$$

$$X_L = \omega L = \omega_0\, L = L\sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{L}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$