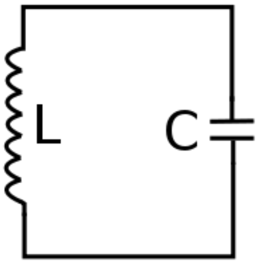
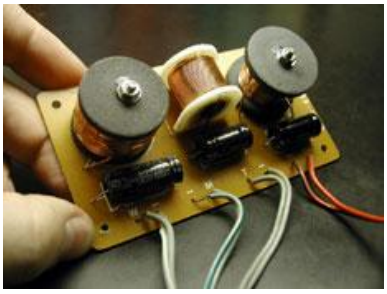
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Física

Física III - Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

Referências bibliográficas:
H. – 35-2, 35-4, 35-5, 35-6
S. – 31-6, 31-7
T. – 28-4

Aula 27 – Circuitos LC e RLC





Circuito LC: consiste de um indutor e um capacitor. O primeiro armazena energia magnética no campo criado em seu interior. O segundo, energia elétrica no campo criado entre suas placas. Supondo inicialmente o capacitor carregado (por uma bateria que é retirada posteriormente), quando o capacitor se descarrega, produzindo uma corrente que passa pelo indutor, a energia elétrica é transformada em energia magnética. Por outro lado, a corrente carrega o capacitor de modo que as placas adquirem sinais opostos, e no final do ciclo a energia magnética é transformada novamente em energia elétrica.

Tanto a carga entre as placas do capacitor como a corrente que passa pelo indutor tem um comportamento cíclico: após um certo período T elas voltam aos valores originais. Esse ciclo tem uma frequência angular característica :

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

O circuito LC apresenta oscilações eletromagnéticas de freqüência bem definida, de modo que ele aparece em aplicações diversas como circuitos de rádio e telecomunicações em geral. Se usarmos um capacitor variável podemos alterar a freqüência do circuito, de modo que ele pode sintonizar a freqüência de uma onda de rádio, por exemplo.

Tratamento matemático do circuito LC

A energia total do circuito é a soma da potencial elétrica e magnética

$$U = U_E + U_B = (1/2)\, L\, i^2 + (1/2)\, q^2/C$$

onde q(t) é a carga nas placas do capacitor, e i(t) é a corrente que passa pelo indutor no instante t.

Na ausência de resistências, não há perda de energia por efeito Joule, então a energia total é conservada: dU/dt = 0 → U = constante. Derivando a expressão acima em relação ao tempo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2C}q^2\right)=0$$

$$\frac{1}{2}L\,(2i)\frac{di}{dt}+\frac{1}{2C}\,(2q)\frac{dq}{dt}=0$$

$$L\,i\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\,q\frac{dq}{dt}=0$$

Mas a intensidade de corrente é i = dq/dt

$$L\,i\frac{d}{dt}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}\,qi=0 \quad (*)$$

Dividindo toda a equação por i obtemos a equação diferencial do circuito LC:

$$\boxed{L\,\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{C}\,q=0}$$

que tem como solução

$$\boxed{q(t) = Q\cos(\omega t+\varphi)}$$

onde: Q = valor máximo da carga nas placas do capacitor
ω = freqüência das oscilações eletromagnéticas
fase = ωt+φ
φ = constante de fase = fase inicial (em t = 0)

A corrente é

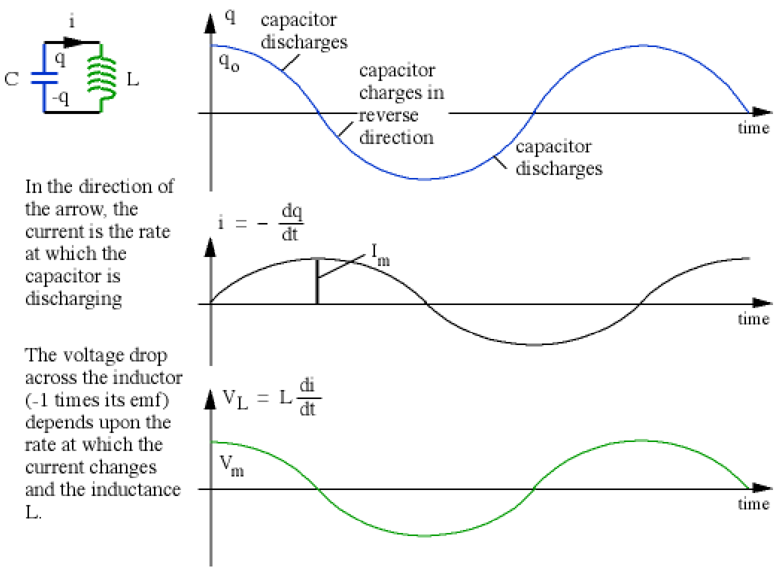
$$\boxed{i=\frac{dq}{dt}=-Q\,\omega\,sen(\omega t+\varphi)}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2}=\frac{di}{dt}=-Q\,\omega^2\,cos(\omega t+\varphi)$$

Substituindo na equação diferencial do circuito

$$L\frac{d^2q}{dt^2}=-LQ\,\omega^2\,cos(\omega t+\varphi)=-\frac{1}{C}\,q=\,-\frac{1}{C}\,Q\,cos(\omega t+\varphi)$$

Comparando vem ω^2 = 1/LC, que dá a freqüência das oscilações no circuito LC. (CQD)



Problema resolvido: Num circuito LC, a indutância e a capacitância valem 25,0 mH e 7,80 μF, respectivamente. No instante t = 0 a corrente é 9,20 mA, a carga do capacitor é 3,80 μC e o capacitor está carregando. (a) Qual o período das oscilações? (b) Qual é a fase inicial? (c) Qual é a carga máxima do capacitor? (d) Qual é a corrente máxima no indutor?

Solução: (a) a freqüência das oscilações é

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{25x10^{-3}x7{,}8x10^{-6}}} = 2{,}26\ x\ 10^3\,\frac{rad}{s}$$

e o período $T = 2\pi/\omega = 2\pi/2{,}26x10^3 = 2{,}78\ x\ 10^{-3}\ s = 2{,}8\ ms$

(b) Em t = 0: q(0) = Q cos φ e i(0) = - Q ω sen φ. Dividindo membro a membro

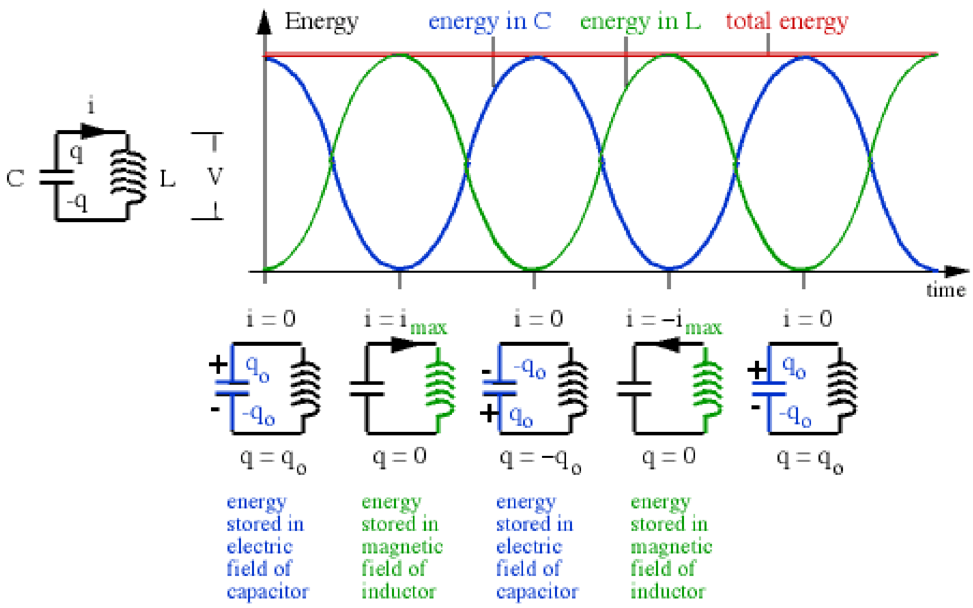
$$\frac{i(0)}{q(0)} = \frac{-Q\omega\ sen\ \varphi}{Q\ cos\ \varphi} = -\ \omega\ tg\ \varphi$$

$$tg\ \varphi = -\frac{1}{2{,}26x10^3}\frac{9{,}20\ x\ 10^{-3}}{3{,}80\ x\ 10^{-6}} = -\ 1{,}071 \quad Logo\ \varphi = -0{,}819\ rad$$

(c) $Q = \frac{q(0)}{cos\ \varphi} = \frac{3{,}80\ x\ 10^{-6}}{cos(-0{,}819\ rad)} = 5{,}56\ x\ 10^{-6}\ C$

(d) $I = \ \omega\ Q = 2{,}26\ x\ 10^3\ x\ 5{,}56\ x\ 10^{-6} = 1{,}26\ x\ 10^{-2}\ A$

Problema proposto: Num circuito LC no qual C = 4,00 μF a ddp máxima através do capacitor durante as oscilações é de 1,50 V e a corrente máxima através do indutor é de 50,0 mA. (a) Qual é a indutância L? (b) Qual a freqüência "comum" (inverso do período) das oscilações? (c) quanto tempo leva para que a carga do capacitor cresça de zero até seu valor máximo? Respostas: (a) 3,60 mH; (b) 1,32 kHz; (c) 0,19 ms.



Conservação de energia no circuito LC

Energia elétrica (armazenada no campo entre as placas do capacitor)

$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega t + \varphi)$$

Energia magnética (armazenada no campo no interior do indutor)

$$U_B = \frac{Li^2}{2} = \frac{LQ^2\omega^2}{2}\, sen^2(\omega t + \varphi) = \frac{LQ^2}{2}\frac{1}{LC} sen^2(\omega t + \varphi) = \frac{Q^2}{2C}\, sen^2(\omega t + \varphi)$$

A Energia total é sempre constante, pois:

$$U = U_E + U_B = \frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{Q^2}{2C}\, sen^2(\omega t + \varphi) = \frac{Q^2}{2C}$$

graças à identidade trigonométrica $sen^2 A + cos^2 A = 1$ para todo arco A.

Problema resolvido: Num circuito LC oscilante constata-se que a energia elétrica é a metade da energia magnética. (a) Qual a carga no capacitor como função da carga máxima Q? (b) Em que instante isso ocorre, em função do período T das oscilações, supondo que inicialmente o capacitor está totalmente carregado?

Solução: (a) Do enunciado $U_B = 2\,U_E$, logo $U = U_E + U_B = 3\,U_E$. Sabemos que a energia total é $U = Q^2/2C$ e a energia elétrica é $U_E = q^2/2C$. Logo $3\,q^2/2C = Q^2/2C$. Dividindo por 2C temos que $q = \pm\frac{Q}{\sqrt{3}}$.

(b) Por hipótese, em t = 0 o capacitor está totalmente carregado, então $q(0) = Q = Q\cos\varphi$. Logo $\cos\varphi = 1$ e $\varphi = 0$. Logo

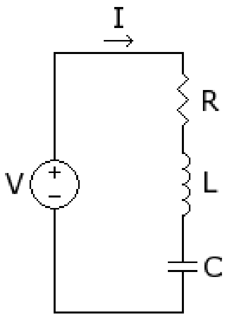
$$q(t) = Q\cos\omega t = \pm\frac{Q}{\sqrt{3}}$$

Dividindo por Q temos $\cos\omega t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ donde $\omega t = 0{,}95$ rad

$t = 0{,}95/\omega = 0{,}95/(2\pi/T) = 0{,}152\,T$

Problema proposto: Num circuito LC com C = 64,0 μF a corrente é dada por i(t) = 1,60 sen(2,500 t + 0,680), onde t é dado em segundos, i em Ampères, e a fase em radianos. (a) Quando, a partir de t = 0, a corrente atingirá seu valor máximo? (b) Qual é a indutância? (c) Qual a energia total? Respostas: (a) 356 μs; (b) 2,5 mH; (c) 3,2 mJ.

Problema suplementar: (a) Num circuito LC oscilante, qual será o valor da carga, expressa em termos da carga máxima Q, que estará presente no capacitor quando a energia estiver igualmente repartida entre o campo elétrico e o campo magnético? Suponha que L = 12 mH e C = 1,7 μF. (b) Quanto tempo levará para que esta condição seja atingida, supondo que inicialmente o capacitor esteja descarregado? Respostas: (a) 0,707 Q; (b) 110 μs.



Circuito RLC: Devido ao resistor, a energia eletro-magnética não é mais conservada, pois ela é dissipada em calor (efeito Joule), com potência R i^2. Se não houver um aporte de energia por parte de uma bateria, com o passar do tempo tanto a carga no capacitor como a corrente no indutor tendem a zero. Vamos inicialmente supor que não haja fontes de tensão no circuito.

Como a potência dissipada em calor é igual à taxa de variação da energia total:

$$\frac{dU}{dt} = -Ri^2$$

Usando a equação (*) da página 2 para representar dU/dt temos

$$L\,i\frac{d}{dt}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}\,qi = -Ri^2$$

Dividindo ambos os membros por i e lembrando que i = dq/dt, chegamos à equação diferencial do circuito RLC:

$$\boxed{L\,\frac{d^2q}{dt^2} + R\,\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}\,q = 0}$$

A solução dessa equação diferencial, supondo como condição inicial que a carga no capacitor é máxima em t = 0: q(0) = Q, é dada por:

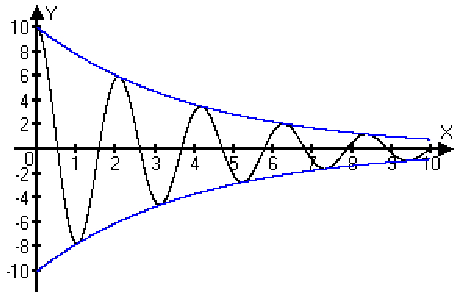
$$\boxed{q(t) = Q\,e^{-Rt/2L}\cos(\omega' t + \varphi)}$$

onde definimos

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

e $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ é a freqüência do circuito LC sem o resistor; φ é uma constante de fase (ou fase inicial). Se a resistência do resistor R for pequena, então ω' ≈ ω = $\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Quando t $\rightarrow\infty$ a função exponencial tende a zero, e $q(\infty) = 0$, como já era de se esperar uma vez que o resistor dissipa toda a energia elétrica em calor. O gráfico da carga como função do tempo é uma oscilação amortecida, cuja envoltória é a função $e^{-Rt/2L}$.



Problema resolvido: Que resistência R deve ser ligada em série com uma indutância L = 200 mH e uma capacitância C = 12,0 μF, a fim de que a carga máxima do capacitor decaia a 99 % do seu valor inicial em 50 ciclos de oscilação?

Solução: supondo R pequeno $\omega' \approx \omega = 1/220 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^{-6} = 615$ *rad/s*

Cada ciclo de oscilação dura um período $T = 2\pi/\omega$*; então 50 ciclos correspondem a 50 períodos, ou a um tempo* $t = 50\ T = 100\ \pi/\omega = 100x\pi/615 = 0{,}51$ *s*

Como $q(0) = Q \cos\varphi = Q$ *então* $\varphi = 0$*. Se, para o tempo t a carga cai a 99/100 do valor inicial Q, então temos*

$$0{,}99\ Q = Q\ e^{-Rt/2L} cos(\omega\ \ t) = \ Q\ e^{-Rt/2L} cos(100\pi) = Q\ e^{-Rt/2L}$$

já que $\cos 100\ \pi = \cos 50 \times 2\pi = +1$*. Dividindo por Q chegamos à equação*

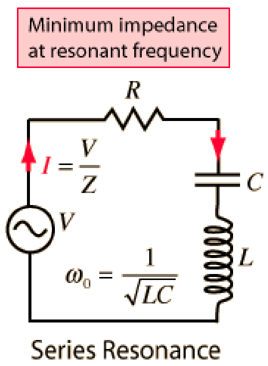
$$0{,}99\ =\ e^{-Rt/2L}$$

E aplicando logaritmos

$$-\frac{Rt}{2L} = ln(0{,}99) =\ -0{,}01$$

$$Logo\ R = \frac{0{,}02\ L}{t} = \frac{0{,}02\ x\ 220\ x\ 10^{-3}}{0{,}51} = 8{,}63\ x\ 10^{-3}\Omega = 8{,}63\ m\Omega$$

Problema proposto: Um circuito RLC tem L = 12 mH, C = 1,6 μF, e R = 1,5 Ω. (a) Depois de quanto tempo a amplitude das oscilações cairá à metade do seu valor inicial? (b) a quantos ciclos de oscilação esse intervalo de tempo corresponde? Respostas: (a) 11 ms; (b) 13 ciclos.



Oscilações forçadas: quando temos uma fonte de tensão alternada (como o gerador AC descrito na aula 28) permanentemente ligada ao conjunto do resistor, capacitor e indutor. Nesse caso a fonte de tensão provê a energia elétrica que é perdida pelo resistor por efeito Joule. Supomos que a tensão da fonte seja dada por

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_m \, sen \, \omega t}$$

onde a freqüência angular $\omega = 2\pi f$, tal que $f = 60$ Hz e $\varepsilon_m = 155$ V é o valor máximo da fem para a rede doméstica no estado do Paraná. Então $\omega = 2\pi \times 60 = 377$ rad/s.

Se a resistência R for pequena, vimos que $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ é, aproximadamente, a freqüência "natural" das oscilações do circuito RLC. No entanto, seja qual for a freqüência natural, as oscilações da carga q(t), da corrente i(t), e da ddp V(t) no circuito, ocorrem com a freqüência angular da fonte de tensão alternada ω. Em outras palavras, a fonte alternada "manda" no circuito.

Como há uma tensão alternada no circuito RLC, também haverá uma corrente alternada resultante (como se verá em maiores detalhes na próxima aula), que oscila com a mesma freqüência, mas defasada em geral da fem alternada:

$$\boxed{i(t) = I \, sen \, (\omega t - \varphi)}$$

onde I é a amplitude, ou valor máximo, e φ é a "diferença de fase".

A amplitude I da corrente depende da relação entre a frequência da fonte AC ω e a frequência natural $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. A amplitude é máxima quando $\omega = \omega_0$, que chamamos de condição de ressonância. Na ressonância, há uma transferência máxima de potência entre a fonte alternada e o circuito oscilante. Fora da ressonância, essa transferência é parcial e a amplitude é baixa. Se não houvesse resistência elétrica, a amplitude seria infinita; como R é diferente de zero, o valor máximo diminui com o aumento de R.