Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Física

Física III - Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

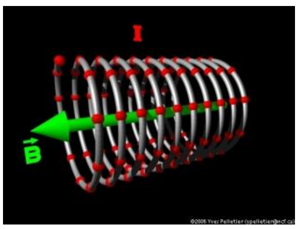
Referências bibliográficas:
H. – 33-2, 33-3, 33-4, 33-5, 33-6
S. – 31-3, 31-4, 31-5
T. – 26-7, 26-8, 26-9

Aula 25 - Indutores

Joseph Henry (*17/12/1797, Albany, Estados Unidos; + 13/05/1878, Washington, Estados Unidos) Estudou na Academia de Albany (New York) onde tornou-se posteriormente professor de filosofia natural (o nome dado à física até meados do Séc. XIX). Em 1830, enquanto trabalhava na construção de eletroímãs (na sua sala de aula, transformada no verão em laboratório), descobriu a indução eletromagnética independentemente de Faraday. Em 1832 foi contratado pelo College of New Jersey, que mais tarde tornou-se a conhecida Universidade de Princeton. Foi diretor da Smithsonian Institution (Washington) desde 1846, quando da sua fundação, até a sua morte, tendo desempenhado um importante papel no desenvolvimento científico dos Estados Unidos. Descobriu a auto-indução em circuitos elétricos, trabalhou no envio de sinais elétricos à distância e explicou as bases para a criação de transformadores. Apesar do seu êxito profissional, muitas das suas descobertas passaram despercebidas na época; talvez por utilizar uma metodologia qualitativa, recorrendo raramente à matemática nos seus artigos. Após a sua morte, a unidade de indutância no Sistema Internacional, foi batizada de henry, em reconhecimento do seu trabalho.

Capacitores: criam campos elétricos numa dada região do circuito

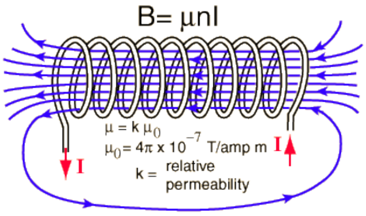
Indutores ou bobinas: criam campos magnéticos numa dada região do circuito.



1. **Definição de indutância** de uma bobina qualquer com N espiras, conduzindo uma corrente i

$$L = \frac{N\Phi}{i}$$

onde Φ é o fluxo magnético que atravessa cada espira da bobina. Unidade no S.I. [L] = [Φ]/[i] = Wb/A = Henry (H)



2. **Indutância de um solenóide com N espiras e comprimento ℓ**

Fluxo magnético: supondo campo magnético uniforme dentro do solenóide com as linhas de força perpendiculares à seção reta, é $\Phi = BA$ para cada espira.

Na aula sobre lei de Ampére vimos que o campo no interior do solenóide é uniforme com módulo dado por $B = \mu_0\, n\, i$ (supondo núcleo de ar para o solenóide), onde $n = N/\ell$ (número de espiras por unidade de comprimento). Logo

$$L = \frac{N\Phi}{i} = \frac{NBA}{i} = \frac{N\mu_0\, n\, i\, A}{i} = (n\ell)\mu_0\, n\, A$$

Dividindo por L temos a indutância por unidade de comprimento do solenóide:

$$\frac{L}{\ell} = \mu_0 n^2 A$$

Problema resolvido: Um solenóide de 30 cm de comprimento é feito ao se enrolar 2000 voltas de fio de cobre num tubo oco de diâmetro 1,0 polegada (=2,54 cm). (a) Calcule a indutância desse solenóide; (b) Determine o fluxo magnético por espira quando o solenóide é percorrido por uma corrente de 500 mA.
Solução: (a) Sendo $A = \pi d^2/4$ e $n = N/\ell$ temos

$$L = \mu_0 \ell \left(\frac{N}{\ell}\right)^2 \frac{\pi d^2}{4} = \frac{4\pi x 10^{-7} x 2000^2 x \pi x 0{,}0254^2}{4x0{,}30} = 8{,}49\; x\; 10^{-3}\; H \approx 8{,}5\; mH$$

(b) $\Phi = IL/N = 0{,}5 \text{ x } 8{,}49\; x\; 10^{-3} / 2000 = 2{,}12 \text{ x } 10^{-6}$ Wb = 2,12 μWb

Problema proposto: Construimos um solenóide de 2,0 m de comprimento e com seção reta circular de diâmetro 4,0 cm, enrolando uma única camada de fio de cobre isolado (de diâmetro 2,5 mm). (a) Supondo que as espiras adjacentes se toquem, e que a espessura do isolamento seja desprezível, quantas espiras tem o solenóide? (b) Calcule a indutância do solenóide; (c) Qual a corrente que deve passar pelo solenóide para que o fluxo magnético total seja de 3,0 mWb? Respostas: (a) 800; (b) 0,505 mH; (c) 5,94 A.

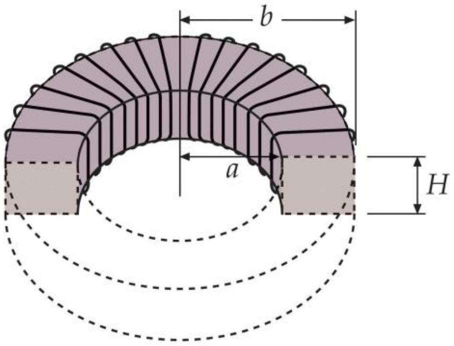
3. Indutância de um toróide com N espiras

O campo magnético no interior da espira não é uniforme, como mostramos na aula sobre Lei de Ampère. Então, a rigor, temos de usar o caso 3 para o fluxo magnético. A integral resultante pode ser efetuada analiticamente para o caso de um solenóide com seção reta retangular de lados b-a e H, onde a e b são os raios interno e externo do toróide, respectivamente. O resultado é

$$\Phi = \int B.dA = \frac{\mu_0 iNH}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Aplicando a definição de indutância L = NΦ/i, onde i é a corrente e N o número de espiras, temos uma expressão exata para a indutância do toróide:

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 H}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

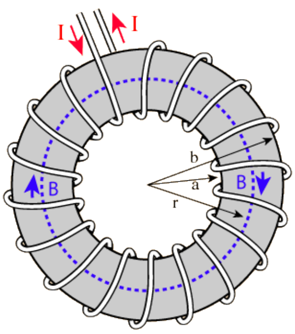


Podemos, todavia, encontrar facilmente uma expressão aproximada, imaginando que o toróide resultou do encurvamento de um solenóide retangular de comprimento ℓ = 2πr. Desprezamos o efeito da curvatura toroidal, o que é tanto melhor quanto mais longo seja o solenóide. Então a indutância será aproximadamente

$$L \approx \mu_0 n^2 A\ell = \mu_0 \left(\frac{N}{\ell}\right)^2 A\ell$$

$$\boxed{L \cong \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}}$$

onde r é o raio do centro da seção reta, tomado a partir do eixo do toróide, e A é a área da seção reta (vide figura).



Problema resolvido: Considere um toróide com N = 2000 espiras, onde o raio do centro do toróide é 100 cm e o raio da seção reta é 1 cm. (a) Calcule a indutância usando a fórmula aproximada deduzida anteriormente; (b) Calcule o fluxo magnético total no interior do toróide quando o enrolamento é percorrido por uma corrente de 2,0 A.
Solução: (a) A seção reta tem área $A = \pi r^2 = \pi \times 0{,}01^2 = \pi \times 10^{-4}\ m^2$.

$$L \approx \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r} = \frac{4\pi x 10^{-7} x 2000^2 x\ \pi\ x\ 10^{-4}}{2\pi\ x\ 100} = 2{,}5\ \mu H$$

(b) $N\Phi = Li = 2{,}5 \times 10^{-6} \times 2{,}0 = 5{,}0\ \mu Wb$

Problema proposto: Seja um toróide com N = 1250 espiras e seção reta retangular, com raio interno a = 90 cm e raio externo b = 95 cm, bem como uma altura H = 3 cm. (a) Use a fórmula exata para calcular a indutância. (b) Use a fórmula aproximada que deduzimos anteriormente. (c) Estime o erro percentual relativo cometido no uso da fórmula aproximada, em comparação com a fórmula exata. Respostas: (a) 0,50688 mH; (b) 0,50675 mH; (c) 0,02 %.

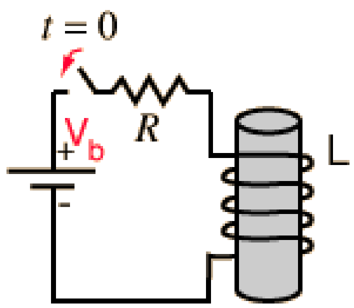
Auto-indução: quando há mudança na corrente que passa por uma bobina, aparece uma fem induzida ε_L na própria bobina (lei de Faraday) que se opõe à mudança.
Da definição de indutância, NΦ = Li; então a fem auto-induzida na bobina será

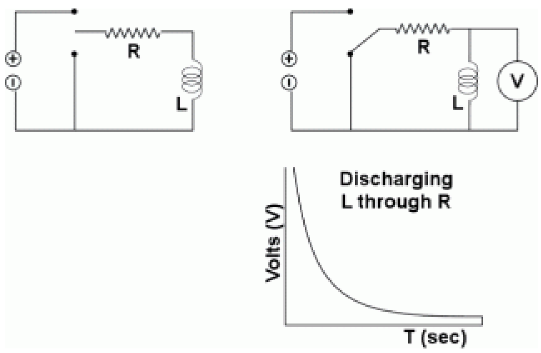
$$\varepsilon_L = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(N\Phi)}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt}$$

Se a indutância L for constante

$$\boxed{\varepsilon_L = -L\frac{di}{dt}}$$

(i) Se i aumenta, $di/dt > 0$, então $\varepsilon_L < 0$: a fem opõe-se ao aumento
(ii) Se i diminui, $di/dt < 0$, então $\varepsilon_L > 0$: a fem opõe-se à diminuição





Circuitos LR: são circuitos constituídos de um indutor associado em série com um resistor, e ambos podem ser ligados a uma fonte de tensão contínua. Note que, como o indutor é uma bobina feita de um fio que tem resistência elétrica, às vezes nem precisamos incluir explicitamente o resistor no problema.

Regra dos sinais para indutores: se a o sentido da fem auto-induzida coincide com o sentido de percurso na malha então o sinal da fem ε_L é negativo; se é oposto ao percurso então é positivo (cuidado! é o oposto da fem gerada por uma fonte de tensão!).

I. A chave é ligada e a fonte de tensão é ligada em série com o indutor e o resistor: a corrente elétrica aumenta no resistor e no indutor, gerando nesse último uma fem auto-induzida que retarda o aumento da corrente

Supondo o percurso no sentido horário da malha do circuito acima, e arbitrando o sentido horário para a corrente, pela primeira lei de Kirchhoff a soma das quedas de tensão na malha é igual a zero:

$$-\mathrm{Ri} + \varepsilon_L + \varepsilon \quad = 0$$
$$-\mathrm{Ri} - \mathrm{L}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} + \varepsilon \quad = 0$$

Que é uma equação diferencial para a corrente i(t), cuja solução é, supondo que em t = 0 a chave foi fechada e a corrente inicial é nula (i(0) = 0):

$$\boxed{i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right) \qquad \textit{(corrente aumentando)}}$$

Constante de tempo indutiva:

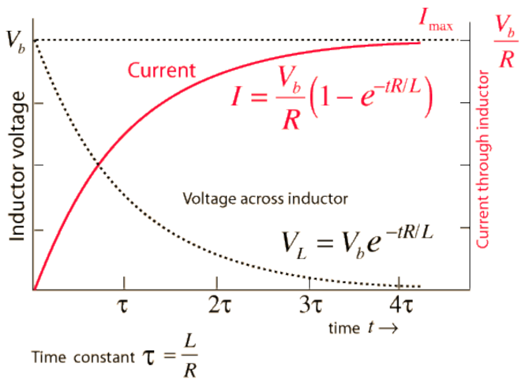
$$\boxed{\tau_L = \frac{L}{R}}$$

a) Tensão sobre o resistor:

$$V_R = R\, i(t) = \varepsilon\left(1 - e^{-Rt/L}\right) = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$

b) Tensão sobre o indutor:

$$V_L = -\varepsilon_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{\varepsilon}{R}(-1)e^{-\frac{Rt}{L}}\left(-\frac{R}{L}\right) = \varepsilon\, e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$



II. A fonte de tensão é desconectada do circuito: a corrente elétrica diminui no resistor e no indutor, gerando nesse último uma fem auto-induzida que retarda a diminuição da corrente.

Fazendo ε = 0 na equação diferencial do circuito temos

$$\mathrm{Ri} + \mathrm{L}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} = 0$$

Supondo que, em t = 0, a corrente no circuito é i(0) = ε/R, a solução agora é

$$\boxed{i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-Rt/L} \qquad \textit{(corrente diminuindo)}}$$

Observe que, agora, as tensões sobre o resistor e o indutor são iguais para qualquer instante de tempo. A tensão sobre o resistor será

$$V_R = R\ i(t) = \varepsilon e^{-Rt/L} = \ \varepsilon e^{-\frac{t}{\tau_L}} = V_L$$

Problema resolvido: Um solenóide de indutância 6,30 μH está ligado em série a um resistor de 1,20 kΩ. (a) Ligando-se uma bateria de 14,0 V, quanto tempo leva para que a corrente no resistor atinja 80% do seu valor final? (b) Calcule as tensões no resistor e no indutor nesse instante de tempo.

Solução: a constante de tempo indutiva é

$$\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{6{,}30\ x\ 10^{-6}}{1{,}20\ x\ 10^{3}} = 5{,}25\ x\ 10^{-9} s = 5{,}25\ ns$$

(a) o valor final da corrente no resistor é i(t=∞)= ε/R. Para que i = (80/100) ε/R

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right) = 0{,}8\frac{\varepsilon}{R}$$

$$e^{-\frac{t}{\tau_L}} = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

Aplicando logaritmos neperianos a ambos os membros

$$-t/\tau_L = \ln 0{,}2 = -1{,}61$$

$$t = 1{,}61\tau_L = 1{,}61\ x\ 5{,}25\ ns = 8{,}45\ ns$$

(b) as tensões sobre o resistor e o indutor serão, respectivamente:

$$V_R = \varepsilon\left(1 - e^{-Rt/L}\right) = \ 14{,}0\left(1 - e^{-\frac{8{,}45}{5{,}25}}\right) = 14{,}0(1 - 0{,}199) = 11{,}2\ V$$

$$V_L = \ \varepsilon\ e^{-\frac{t}{\tau_L}} = 14{,}0\ e^{-\frac{8{,}45}{5{,}25}} = 2{,}79\ V$$

Problema proposto: A corrente num circuito RL cai de 1,0 A para 10 mA no primeiro segundo após a remoção da bateria do circuito. (a) Sendo a indutância de 10 H, calcule a resistência do circuito. (b) Após uma constante de tempo indutiva, calcule a tensão no resistor e no indutor. Respostas: (a) 46 Ω; (b) 0,37 V para ambas.

Energia magnética armazenada no indutor: a energia potencial elétrica fornecida pela bateria vai sendo transformada em energia magnética no indutor e calor no resistor.

Multiplicando por -i a equação diferencial do circuito RL na etapa de aumento da corrente, e rearranjando os termos, chegamos ao "balanço de energia"

$$\mathrm{Ri}^2 + \mathrm{Li}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} = \ \varepsilon\ \ \mathrm{i}$$

que espelha a conservação de energia eletromagnética:

$$P_E = P_R + P_L$$

- $P_E = \varepsilon\, i$ = potência elétrica fornecida pela fonte de tensão
- $P_R = Ri^2$ = potência dissipada no resistor sob a forma de calor (efeito Joule)
- $P_L = Li(di/dt)$ = potência envolvida na transformação de energia elétrica em magnética

Como potência = energia / tempo, denotando a energia magnética por U_B temos

$$P_L = \frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt}$$

ou $dU_B = L\, i\, di$. Integrando de i = 0 (quando t = 0) até uma corrente qualquer i temos

$$U_B = \int dU_B = L\int_0^i i\,di$$

$$\boxed{U_B = \frac{1}{2}Li^2}$$

Problema resolvido: Num circuito RL cuja constante de tempo indutiva seja de 37,0 ms a corrente é nula em t = 0. Em que instante a taxa de dissipação de energia no resistor é igual à taxa com que a energia magnética está sendo armazenada no indutor?
Solução: Por hipótese $P_L = P_R$. Logo $P_E = P_L + P_L = 2\,P_L$,ou $\varepsilon\, i = 2\,Li\,(di/dt)$

Usando a fórmula para a corrente aumentando

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$

e a expressão obtida para a ddp no indutor chegamos a

$$\varepsilon i = 2Li\frac{di}{dt} = 2Li\frac{\varepsilon}{R}(-1)e^{-\frac{Rt}{L}}\left(-\frac{R}{L}\right) = 2i\varepsilon\, e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

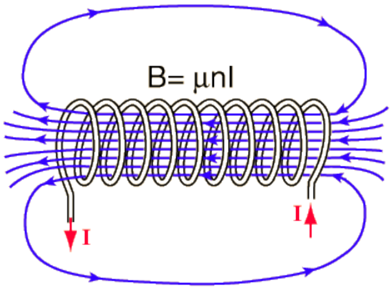
Dividindo ambos os membros por εi chegamos à equação exponencial

$$e^{-\frac{t}{\tau_L}} = \frac{1}{2}$$

Aplicando logaritmos $t = \ln 2\ \tau_L = 0{,}69 \times 37 = 25{,}6$ ms

Problema proposto: Num circuito RL de indutância 2,0 H, resistência 10 **Ω**, e uma fonte de tensão de 100 V, após 0,10 s de termos ligado a chave, calcule (a) a potência fornecida pela fonte; (b) a potência dissipada pelo resistor; (c) a potência magnética no indutor. Respostas: (a) 393 W; (b) 155 W; (c) 238 W.

Densidade de energia magnética: podemos imaginar que a energia está sendo armazenada no campo magnético gerado pelo indutor, da mesma forma que a energia era armazenada no campo elétrico entre as placas de um capacitor.



Se o solenóide tiver área da seção reta A e comprimento ℓ, o volume da região interna é vol = A ℓ. A densidade de energia magnética é a energia por unidade de volume

$$u_B = \frac{U_B}{vol} = \frac{Li^2}{2A\ell} = \frac{(\frac{L}{\ell})i^2}{2A}$$

Mas vimos no começo da aula que a indutância de um solenóide, por unidade de comprimento, é dada por

$$\frac{L}{\ell} = \mu_0 n^2 A$$

$$u_B = \frac{(\mu_0 n^2 A)i^2}{2A} = \mu_0 n^2 \frac{i^2}{2}$$

Mas o campo magnético no interior do solenóide é B = $\mu_0 n \;\; i$ Logo, multiplicando e dividindo por μ_0

$$u_B = \frac{\mu_0 \mu_0 n^2 i^2}{2\mu_0}$$

$$\boxed{u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

Essa expressão vale para qualquer tipo de indutor e mesmo na ausência de indutores!

Problema resolvido: É dado um cubo de aresta 10 cm. Compare a energia elétrica e a magnética associadas a campos elétricos e magnéticos uniformes de intensidades 100 kV/m e 1,0 T, respectivamente, na região do espaço ocupada pelo cubo.

Solução: O volume do cubo é vol = a^3 *=* $(0{,}10\ m)^3$ *=* $0{,}001\ m^3$*. A energia magnética será*

$$U_B = vol\ x\ u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}(vol) = \frac{1{,}0^2 x 0{,}001}{2x4\pi x 10^{-7}} = 400\, J$$

Vimos que a densidade de energia elétrica é $U_E = \varepsilon_0 E^2/2$*. A energia elétrica dentro do cubo será*

$$U_E = vol\ x\ u_E = \frac{\varepsilon_0\, E^2}{2}(vol) = \frac{8{,}85x10^{-12}x10^5 x0{,}001}{2} = 44\, \mu J$$

Problema proposto: Qual deve ser o módulo de um campo elétrico uniforme para que tenha a mesma densidade de energia de um campo magnético de 0,50 T? Resposta: 150 MV/m