Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Física

Física III – Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

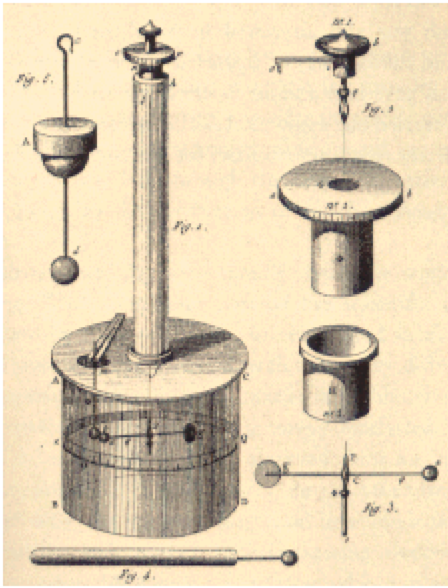
Referências bibliográficas:
H. – 23-4
S. – 22-5
T. – 18-3

Aula 2 – Lei de Coulomb

Charles Augustin de Coulomb *(* 1736, Angoulême, França; + 1806, Paris, França)* trabalhou como engenheiro militar no exército francês, onde realizou pesquisas em matemática e mecânica aplicada, especializando-se no uso de balanças de torção para a medida de forças muito pequenas.

Uma balança de torção consiste essencialmente de uma fibra cuja torção depende linearmente do torque (Lei de Hooke). O torque provocado pela força a ser medida ocasiona uma torção na fibra que pode ser verificada oticamente, adaptando-se um espelho à fibra. Este mecanismo já foi utilizado por Cavendish na verificação da Lei de atração gravitacional de Newton.

Entre 1785 e 1791 Coulomb pesquisou a interação entre cargas elétricas, usando balanças de torção para medir a intensidade da mesma. Sua descoberta mais importante é a dependência da força de interação entre cargas elétricas com o inverso do quadrado da distância que as separa, formalmente idêntica à lei de atração gravitacional descoberta por Isaac Newton.



Força entre duas partículas carregadas (cargas puntiformes) – grandeza vetorial

- <u>Direção</u>: reta que une as duas partículas
- <u>Sentido</u>: cargas de mesmo sinal: repulsiva; de sinais diferentes: atrativa.
- <u>Módulo</u>: dado pela Lei de Coulomb: força elétrica entre duas partículas com cargas elétricas q_1 e q_2 (em coulombs), separadas por uma distância d (em metros):

$$\boxed{F = k\frac{q_1 q_2}{d^2}}$$

onde F: módulo da força elétrica (em Newtons)

k = 8,99 x 10^9 N.m^2/C^2 : constante eletrostática

A força elétrica satisfaz a <u>Terceira Lei de Newton</u>: as forças sobre duas partículas formam um par ação-reação (forças de mesmo módulo, direção e sentidos opostos):

$$\mathbf{F}_{12} = - \mathbf{F}_{21}$$

Princípio de superposição: a força elétrica sobre uma partícula carregada, devido a um sistema de muitas partículas carregadas, é a resultante de todas as forças entre os possíveis pares de partículas.

Recordação de cálculo vetorial: Resultante de um sistema de forças $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ... $\mathbf{F}_N$ é a soma vetorial das mesmas

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_N}$$

<u>Método gráfico (do polígono):</u> colocam-se as flechas que representam os vetores de tal forma que o final de um coincida com o início do outro até terminar a seqüência. A soma vetorial é o vetor que vai do final do primeiro ao começo do último vetor.

<u>Método analítico (por componentes):</u> consideramos as componentes cartesianas dos vetores, como:

$$\mathbf{F}_1 = F_{1x}\,\mathbf{i} + F_{1y}\,\mathbf{j} + F_{1z}\,\mathbf{k}$$

onde **i**, **j**, **k** são os versores correspondentes aos eixos cartesianos x, y, z, respectivamente. As componentes dos vetores do sistema somam-se para cada eixo:

$$\boxed{\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{Nx} \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{Ny} \\ F_z &= F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{Nz} \end{aligned}}$$

O módulo do vetor F é dado por

$$\boxed{F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$

No plano xy, o ângulo que a direção do vetor F faz com o eixo x é dado por

$$\boxed{tg\,\theta = \frac{F_y}{F_x}}$$

A resultante no plano pode ser dada tanto em termos das suas componentes cartesianas, como pelo seu módulo e ângulo θ.

Problema resolvido: Quatro cargas puntiformes +q, -q, +2q, e -2q, onde $q = 1{,}0 \times 10^{-7}$ C, encontram-se fixas nos vértices de um quadrado de lado a = 5,0 cm, conforme a figura abaixo. Determine a força elétrica resultante sobre a carga no vértice inferior esquerdo.

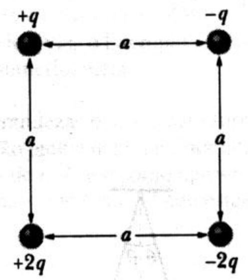


Fig. 23-15 Problema 10.

***Solução**: Vamos inicialmente desenhar todos os pares de forças que envolvem o vértice inferior esquerdo. Usando a Lei de Coulomb temos que os módulos das três forças são*

$$F_1 = k\frac{2q^2}{a^2}$$

$$F_2 = k\frac{2q^2}{2a^2} = \frac{F_1}{2}$$

$$F_3 = k\frac{4q^2}{a^2} = 4F_2$$

Pelo princípio de superposição, a força elétrica sobre a carga em questão é a resultante do sistema de forças, a qual pode ser encontrada pelo método analítico

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0 + F_2 \cos 45^o + F_3$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = -F_1 + F_2 \,\mathrm{sen}\, 45^o + 0$$

$$F_x = 0 + F_2 (\sqrt{2} / 2) + 4 F_2$$

$$F_y = -2F_2 + F_2 (\sqrt{2} / 2)$$

Como

$$F_2 = 9{,}0x10^9\left(\frac{1{,}0x10^{-7}}{5{,}0x10^{-2}}\right)^2 = 3{,}6x10^{-2}\,N$$

temos que

$$F_x = (4 + (\sqrt{2} / 2))\ x\ 3{,}6x10^{-2} = 0{,}17\ N$$

$$F_y = ((\sqrt{2} / 2) - 2)\ x\ 3{,}6x10^{-2} = -\ 0{,}046\ N$$

Em termos dos versores, podemos representar a resultante como

$$\boxed{\boldsymbol{F} = (0{,}17\ N)\ \boldsymbol{i} - (0{,}046\ N)\ \boldsymbol{j}}$$

Ou ainda, o módulo é

$$\boxed{F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{0{,}17^2 + (-0{,}046)^2} = 0{,}176N}$$

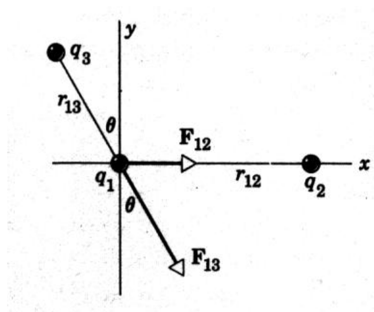
e o ângulo que a resultante faz com o eixo das abscissas é

$$tg\,\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-0{,}046}{0{,}17} = -0{,}270$$

donde $\theta = arctg(-0{,}270)$*, que pode ter dois valores possíveis. Pelas componentes do vetor, o único ângulo possível é a menor determinação:*

$$\boxed{\theta = -0{,}264 \text{ rad} \quad \text{ou} \quad \theta = -15{,}11^0}$$

Problema proposto: A figura abaixo mostra três cargas fixas no plano, q_1 = - 1,0 μC, q_2 = + 3,0 μC, q_3 = - 2,0 μC, separadas por r_{12} = 15 cm, r_{13} = 10 cm, onde θ = 30°. Qual a força elétrica resultante sobre a carga q_1? Resposta: (2,1 N) **i** – (1,6 N) **j**



<u>Equilíbrio (estático) num sistema de cargas</u>: uma carga estará em equilíbrio se a resultante das forças elétricas sobre ela for nula. Pode-se mostrar que este equilíbrio é **instável,** ou seja, se afastada minimamente da sua posição de equilíbrio, uma carga irá afastar-se indefinidamente da mesma.

Problema resolvido: Duas cargas fixas de +1,0 μC e -3,0 μC estão separadas por uma distância de 10 cm. Onde podemos localizar uma terceira carga de modo que ela esteja em equilíbrio estático?

Solução: Seja d a distância entre as cargas fixas, e x a distância entre a terceira carga e a primeira, suposta na origem. Não sabemos nem o módulo nem o sinal da terceira carga q_3*, de modo que iremos supô-la positiva. Neste caso, a única posição de equilíbrio para ela é à esquerda de* q_1 *e* q_2*. Se a carga está em equilíbrio, a resultante deve ser nula, de modo que* $F_1 = F_2$*. Pela Lei de Coulomb*

$$k\frac{q_3 q_1}{x^2} = k\frac{q_3 q_2}{(d+x)^2}$$

Como q_3 é simplificado de ambos os lados da expressão, o fato de termos suposto q_3 não traz conseqüências sobre o resultado final, pois este não dependerá do valor de q_3.

$$\left(\frac{d+x}{x}\right)^2 = \frac{q_2}{q_1} = \frac{3}{1}$$

Observe que q_2 entrou somente com seu módulo, pois o sinal já foi levado em conta na figura, quando especificamos o sentido de F_2.

$$\left(\frac{d+x}{x}\right) = \pm\sqrt{3} \qquad\qquad \frac{d}{x} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Tomando o sinal positivo temos $\boxed{x = 13{,}66\ cm}$, ou seja, à esquerda de q_1. Por outro lado, tomando o sinal negativo teríamos x = - 3,66 cm, de forma que a carga q_3 teria de estar à direita de q_1. Porém, entre q_1 e q_2 não pode haver posição de equilíbrio, já que F_1 e F_2 teriam o mesmo sentido.

Problema Proposto: Duas cargas puntiformes livres +q e + 4q estão a uma distância L uma da outra. Uma terceira carga é colocada de tal modo que todo o sistema fica em equilíbrio. Determine a posição, o módulo e o sinal da terceira carga.
Resposta: carga = - (4q/9), situada à distância (L/3) da carga +q.

<u>Extensão da Lei de Coulomb para distribuições de carga esfericamente simétricas</u>: **Uma esfera carregada atrai ou repele uma carga exterior à esfera como se toda a sua carga estivesse concentrada no seu centro.** Esse fato, conhecido como "teorema das camadas", foi demonstrado pela primeira vez por Isaac Newton, no seu estudo sobre a gravitação. Lembre que tanto a força elétrica como a gravitacional dependem do inverso do quadrado da distância! A esfera carregada nem precisa ser uniforme, basta que a distribuição da sua carga seja esfericamente simétrica, ou seja, que a carga q só dependa do raio r. Este resultado vale, por exemplo, para uma casca esférica carregada. Neste último caso, uma conseqüência notável do teorema das camadas é que a força elétrica sobre uma carga situada no interior da casca esférica é nula.

Problema resolvido: Sejam duas esferas condutoras idênticas e isoladas, 1 e 2, possuindo iguais quantidades de cargas, e bastante separadas. Nestas condições, a força Coulombiana entre elas é F. Suponha que uma terceira esfera idêntica 3, inicialmente descarregada, toque primeiro a esfera 1 e depois a esfera 2 e, em seguida, seja afastada. Qual a nova força Coulombiana F´ que atua sobre a esfera 2?

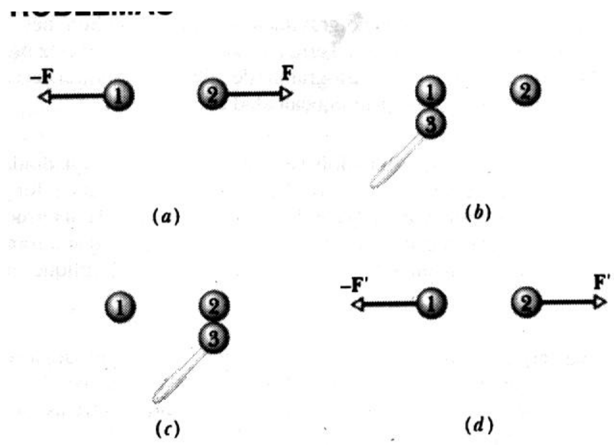


Fig. 23-13 Exercício 7

Solução: (a) Pela Lei de Coulomb aplicada às duas esferas idênticas 1 e 2

$$F = k\frac{q^2}{d^2}$$

onde d é a distância entre os centros das esferas.
(b) Quando a esfera 3 toca a esfera 1 a carga total do sistema (1+3) é igualmente repartida entre as duas (q/2 para cada uma);
(c) A esfera 3 toca a esfera 2, e a carga total do sistema (2+3), q + q/2 = 3q/2, é igualmente repartida entre elas, ficando 3q/4 para cada uma
(d) A esfera 3 sendo afastada, a nova força entre as esferas 1 e 2 é

$$\boxed{F' = k\frac{(q/2)(3q/4)}{d^2} = \frac{3}{8}F}$$

Problema proposto: Duas esferas condutoras idênticas, mantidas fixas, atraem-se com uma força eletrostática de módulo igual a 0,108 N quando separadas por 50,0 cm. As esferas são então ligadas por um fio condutor fino. Quando o fio é removido, as esferas se repelem com uma força eletrostática de módulo igual a 0,0360 N. Quais eram as cargas iniciais das esferas? Resposta: 3,0 μC e -1,0 μC.