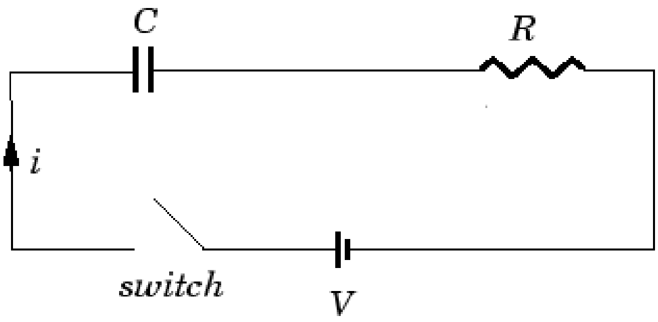
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Física

Física III – Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

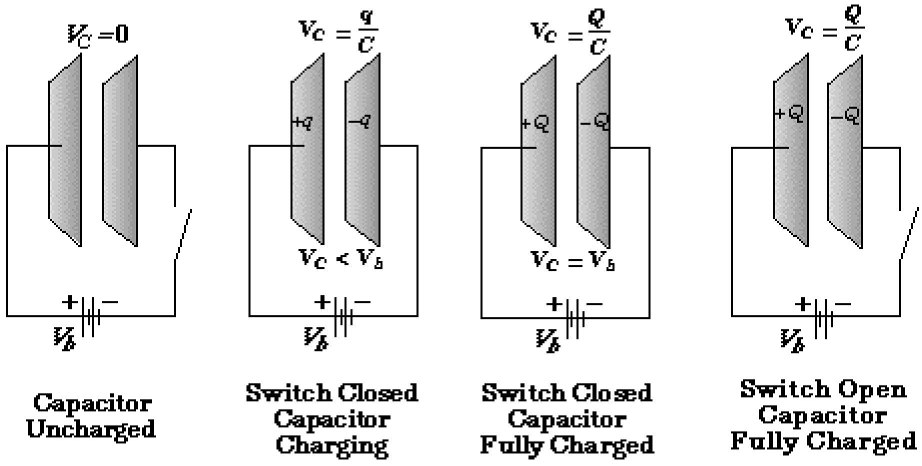
**Referências bibliográficas:**
**H. – 29-8**
**S. – 27-5**
**T. – 23-2**

## Aula 16 - Circuitos RC



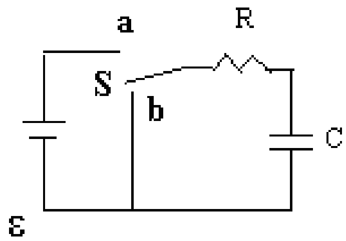

São circuitos onde um resistor de resistência R é associado em série a um capacitor de capacitância C, assim como uma bateria de fem ε. É preciso lembrar que não passa corrente contínua entre as placas de um capacitor, de modo que o tipo de corrente que se vai estudar é variável com o tempo ("comportamento transitório"). Voltaremos a estudar este tipo de circuito mais tarde, quando considerarmos correntes alternadas.

Em primeiro lugar vamos lembrar como se carrega o capacitor (esquecendo por enquanto a resistência). Quando o circuito está aberto, a ddp entre as placas do capacitor é $V_C = 0$. Fechando o circuito com a bateria, cargas positivas + q fluem do pólo positivo da bateria para uma das placas, ao passo que cargas negativas -q fluem do pólo negativo para a outra placa. Com as placas carregadas, a ddp entre elas aumenta para $V_C = q/C$. Neste processo a carga q aumenta com o tempo, é uma função do tempo q = q(t), assim como a ddp no capacitor. O carregamento do capacitor só termina quando a ddp entre as placas for igual à fem da bateria: $V_C = Q/C = ε$. Veja que Q é o <u>valor máximo</u> da carga do capacitor.




Se abrirmos a chave S do circuito o capacitor continua carregado, mesmo sem a bateria (lembre que ele funciona como um acumulador de energia elétrica). Se tirarmos agora a bateria, e conectarmos o capacitor a um resistor, ele irá se descarregar, ou seja q diminuirá agora com o tempo; pois as cargas acumuladas nas placas do capacitor fluem novamente pelo circuito, formando uma corrente elétrica (i = dq/dt) que passa pelo resistor. Quando corrente passa pelo resistor há uma conversão em calor (Efeito Joule), de modo que toda a energia acumulada no capacitor vai ser dissipada pelo resistor. A longo prazo, tanto a carga no capacitor quanto a corrente no resistor serão nulas.

O papel da resistência R é "amortecer" este processo. Por exemplo, se não houvesse resistência, o capacitor iria se carregar instantaneamente. Devido à resistência, no entanto, ele leva algum tempo para atingir a carga máxima Q. Da mesma forma, o capacitor não se descarrega imediatamente, mas aos poucos. Essa é a principal utilidade do circuito RC, o que faz com que seja usado em eletrônica. Por exemplo, a lâmpada do flash da máquina fotográfica necessita para funcionar de uma corrente alta por um tempo muito curto. Antes do flash disparar, duas pilhas de 1,5 V carregam um capacitor através de um resistor. Terminada a carga o flash está pronto para o disparo. Quando se bate a foto, o capacitor descarrega através da lâmpada do flash.




Tratamento matemático do circuito RC

**1o. caso: Capacitor carregando**: quando a chave S está ligada no ponto a, o capacitor é ligado à bateria e ao resistor em série. Aplicando a 1a. Lei de Kirchhoff na malha temos que a soma das ddp´s é nula. Adotando o sentido horário tanto para o percurso como para a corrente i, e partindo do ponto a, temos

$$-Ri - V_C + \varepsilon = -Ri - \frac{q}{C} + \varepsilon = 0$$

Por outro lado, i = dq/dt (pois a carga no capacitor está aumentando com o passar do tempo). Multiplicando tudo por (-1) temos

$$\boxed{R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} - \varepsilon = 0}$$

que é uma equação diferencial, onde a variável independente é o tempo t, e a variável dependente é a carga no capacitor q. Resolver esta equação significa encontrar a função q = q(t) para uma determinada condição inicial, a saber, a carga para o tempo t = 0, que denotamos q(0). Se inicialmente o capacitor está descarregado, então q(0) = 0.

Você não precisa conhecer a teoria completa do cálculo para reconhecer uma solução da equação diferencial acima. Ela é dada por

$$\boxed{q(t) = C\varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right)}$$

Se colocarmos t = 0, teremos q(0) = Cε(1-1) = 0, de fato, como supusemos. A corrente elétrica é

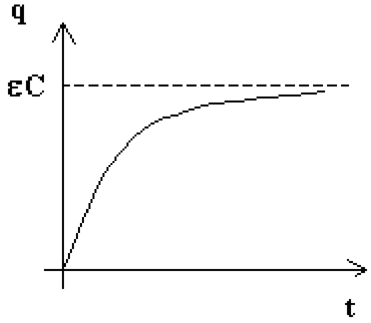
$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}C\varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right) = C\varepsilon\frac{d}{dt}\left(1 - e^{-t/RC}\right) =$$
$$= -C\varepsilon\left(\frac{d}{dt}e^{-t/RC}\right) = -C\varepsilon\left(-\frac{1}{RC}e^{-t/RC}\right)$$

$$\boxed{i(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}}$$

Substituimos q(t) e sua derivada na equação diferencial, para mostrar que ela reduz-se a uma identidade:

$$0 = Ri + \frac{q}{C} - \varepsilon = R\frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC} + \frac{1}{C}C\varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right) - \varepsilon =$$
$$\varepsilon e^{-t/RC} + \varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right) - \varepsilon = 0$$

Calculando o valor da corrente no tempo t = 0 temos i(0) = ε/R, que é a corrente que passa pelo resistor no instante em que ligamos o capacitor à bateria.

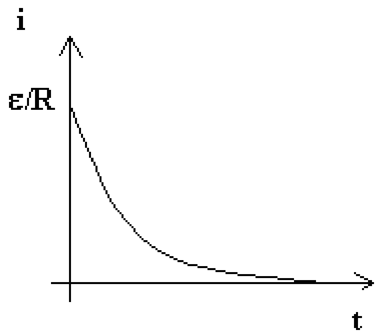



A análise física destes resultados pode ser feita a partir do gráfico da carga e da corrente em função do tempo: a carga no capacitor, inicialmente nula, aumenta com o tempo suavemente. Se tomarmos o limite da carga quando o tempo vai a infinito, teremos

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = C\varepsilon\left(1 - e^{-\infty/RC}\right) = C\varepsilon$$

que é o valor máximo da carga no capacitor: Q = Cε.

A corrente no resistor, por outro lado, é a taxa com que aumenta a carga no capacitor com o passar do tempo. Podemos observar no gráfico que ela diminui exponencialmente com o tempo a partir do seu valor inicial i(0)=ε/R; e tende a zero quando o tempo vai a infinito. Isso é razoável, já que o capacitor pára de se carregar, donde não haverá mais corrente. Se um capacitor estiver energizado e você tocar os seus dois terminais, vai fazer o papel do resistor e certamente levar um choque rápido!




**Problema resolvido:** Uma bateria de 6V, de resistência interna desprezível, é usada para carregar um capacitor de 2 μF através de um resistor de 100 Ω. Achar: (a) a corrente inicial, (b) a carga final no capacitor e (c) o tempo necessário para a carga atingir 90 % do seu valor final.

*Solução: (a)* $i(0)= \varepsilon / R = 6 / 100 = 0{,}06\ A$

*(b)* $Q = C\,\varepsilon = 2 \times 10^{-6} \times 6 = 12 \times 10^{-6}\ C$

*(c)* $q = \frac{90}{100} Q = 0{,}9 C\varepsilon = C\varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right)$

*Dividindo por Cε temos uma equação exponencial*

$$1 - e^{-t/RC} = 0{,}9 \qquad e^{-t/RC} = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

*Aplicando logaritmos a ambos os membros*

$$\ln e^{-t/RC} = - t / RC = \ln 0{,}1 = -2{,}3$$

$$t = 2{,}3\ RC = 2{,}3 \times 100 \times 2 \times 10^{-6} = 4{,}6 \times 10^{-4}\ s = 460\ \mu s$$

**Problema proposto**: No circuito RC do problema anterior, quanto tempo levará o capacitor para ficar: (a) com uma carga de 1 μC? (b) com uma corrente de 0,01 A? Respostas: (a) 17,4 μs; (b) 0,36 ms.

- ddp entre as placas do capacitor: cresce com a carga nas placas

$$\boxed{V_C = \frac{q}{C} = \varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right)}$$

- ddp no resistor: diminui com a corrente no resistor

$$\boxed{V_R = Ri = \varepsilon e^{-t/RC}}$$

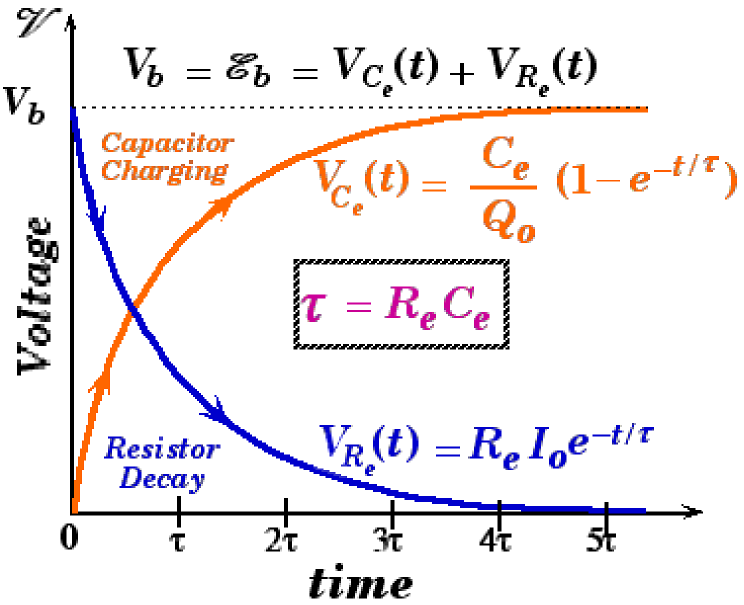
Tanto a ddp no resistor como no capacitor não alcançam imediatamente seus valores finais. Podemos mensurar este efeito definindo uma constante de tempo (verifique que a unidade da combinação RC, Ω.F, realmente é o segundo!)

$$\boxed{\tau = RC}$$

**Problema resolvido:** Mostre que, após uma constante de tempo, a carga no capacitor alcança 63 % do seu valor final.
*Solução: Fazendo $t = \tau$ temos*

$$q(\tau) = C\varepsilon\left(1 - e^{-\tau/RC}\right) = C\varepsilon\left(1 - e^{-1}\right) \cong 0{,}63C\varepsilon = \frac{63}{100}C\varepsilon$$

**Problema proposto**: Quantas constantes de tempo devem decorrer até que um capacitor num circuito RC esteja carregado com mais de 99% do seu valor final? Resposta: cinco

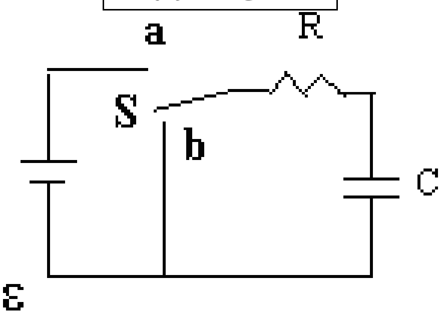



**Time Constant**

| $t$ | $e^{-t/\tau}$ | $1 - e^{-t/\tau}$ |
|---|---|---|
| τ | .368 | .632 |
| 2τ | .135 | .865 |
| 3τ | .050 | .950 |
| 4τ | .018 | .982 |
| 5τ | .007 | .993 |

**2o. caso: Capacitor descarregando**: quando a chave S está ligada no ponto b, o capacitor é desconectado bateria e fica ligado apenas ao resistor em série. Neste caso ε = 0, e a Lei das malhas fornece a equação diferencial:

$$\boxed{R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0}$$




Como, desta vez, inicialmente o capacitor encontra-se totalmente carregado com carga Q, a condição inicial será q(0) = Q = ε C. A solução da equação diferencial é

$$\boxed{q(t) = Qe^{-t/RC}}$$

Como a carga agora diminui com o tempo, a corrente elétrica será definida como

$$\boxed{i(t) = -\frac{dq}{dt} = -Q\frac{d}{dt}e^{-t/RC} = \frac{Q}{RC}e^{-t/RC}}$$

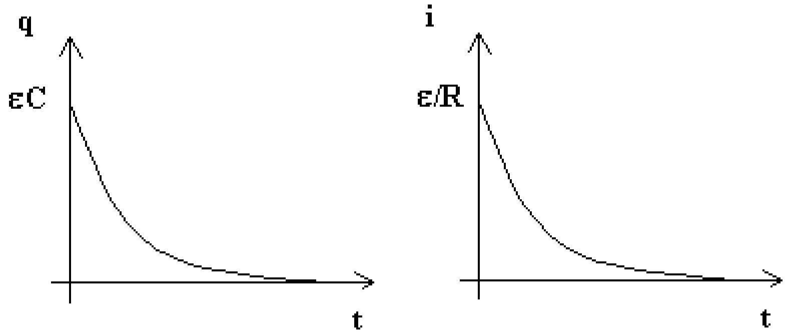
Verificação da solução na equação diferencial

$$0 = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = R\left(-\frac{Q}{RC}e^{-t/RC}\right) + \frac{1}{C}Qe^{-t/RC} = -\frac{Q}{C}e^{-t/RC} + \frac{Q}{C}e^{-t/RC} = 0$$

A carga diminui exponencialmente com o tempo, tendendo a zero quando o tempo vai a infinito. Por outro lado, a corrente inicialmente é

$$i(0) = \frac{Q}{RC} = \frac{Q}{\tau} = \frac{C\varepsilon}{RC} = \frac{\varepsilon}{R}$$

e, quando o tempo t aumenta, também a corrente cai exponencialmente para zero.




**Problema resolvido**: Um capacitor de 4 μF está carregado a 24 V e é ligado a um resistor de 200 Ω. Achar: (a) a constante de tempo; (b) a carga inicial do capacitor; (c) a corrente inicial no resistor; (d) a carga após 4 ms.
*Solução: (a)* $\tau = RC = 200 \times 4 \times 10^{-6} = 0{,}8 \times 10^{-3}$ *s = 0,8 ms*
*(b)* $q(0) = Q = \varepsilon\, C = 24 \times 4 \times 10^{-6} = 9{,}6 \times 10^{-7}$ *C = 96 μC*
*(c)* $i(0) = \varepsilon / R = 24 / 200 = 0{,}12$ *A*
*(d) t = 4 ms:* $q(4) = Q\, exp(-t/\tau) = 96\, exp(-4/0{,}8) = 0{,}647$ *μC*

**Problema proposto**: No circuito do problema anterior, (a) ache a corrente em t = 4 ms; (b) calcule o tempo necessário para que a carga no capacitor atinja 50% do seu valor inicial; (c) ache as ddp´s sobre o resistor e o capacitor após 1,5 constantes de tempo. Respostas: (a) 0,81 mA; (b) 0,55 ms; (c) 5,35 V em ambos.

**Energia no circuito RC**

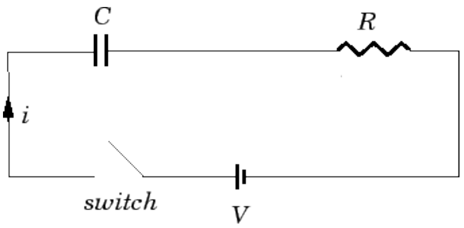
1. Potência = taxa de variação da energia elétrica: $P = \frac{dU}{dt}$

2. Potência fornecida pela bateria: $P_E = \varepsilon i$

3. <u>Potência no capacitor</u>: $P_C = V_C i = \frac{q}{C} i$

4. <u>Potência dissipada no resistor:</u> $P_R = V_R i = Ri^2$ (calor = efeito Joule)

5. <u>Conservação de energia no circuito</u>: $P_E = P_C + P_R$




**Problema resolvido:** Considere o circuito acima, onde C = 1,0 μF, R = 3,0 MΩ, e ε = 4,0 V. Fechamos a chave. Calcule as potências: (a) fornecida pela bateria, (b) no capacitor e (c) dissipada pelo resistor após 1,0 s de fechada a chave.
*Solução: Fechando a chave o capacitor está carregando (use as fórmulas do 1o. caso).*
*constante de tempo: $\tau = RC = 3{,}0 \times 10^6 \times 1{,}0 \times 10^{-6} = 3{,}0$ s*
*carga após t = 1,0 s:*

$$q(1) = C\varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right) = 1x10^{-6}\,x4(1 - e^{-1/3}) = 1{,}13x10^{-6}\,C\,)$$

*corrente após t = 1,0 s:*

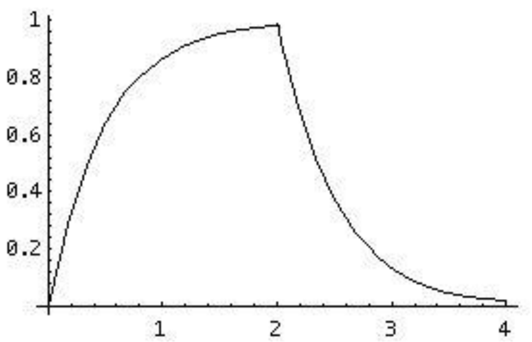
$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} = \frac{4}{3{,}0x10^6} e^{-1/3} = 9{,}55x10^{-7}\,A$$

*(a)* $P_E = \varepsilon i = 4x9{,}55x10^{-7} = 3{,}82x10^{-6}W = 3{,}82\mu W$

*(b)* $P_C = V_C i = \frac{q}{C} i = \frac{1{,}13x10^{-6}\,x9{,}55x10^{-7}}{1{,}0x10^{-6}} = 1{,}08x10^{-6}W = 1{,}08\mu W$

*(c)* $P_R = Ri^2 = 3{,}0x10^6\,x\left(9{,}55x10^{-7}\right)^2 = 2{,}74x10^{-6}W = 2{,}74\mu W$

$$P_E - P_C - P_R = 3{,}82 - 1{,}08 - 2{,}74 = 0$$




**Problema proposto**: Considere o circuito anterior, muito tempo depois do capacitor ter sido carregado. Removemos a bateria. Calcule, agora, as potências no resistor e no capacitor t = 1,5 s após a bateria ter sido removida do circuito. A conservação de energia continua verificada? Resposta: 1,96 μ W em ambos.

**Problema suplementar**: Um capacitor de 1,0 μF com uma energia inicial armazenada de 0,50 J é descarregado através de um resistor de 1,0 MΩ. (a) Qual é a carga inicial do capacitor? (b) Qual a corrente inicial pelo resistor? Após uma constante de tempo, (c) quais as ddp´s sobre o capacitor e o resistor? (d) quais as potências no resistor e capacitor. Respostas: (a) 1,0 mC; (b) 1,0 mA