Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Física

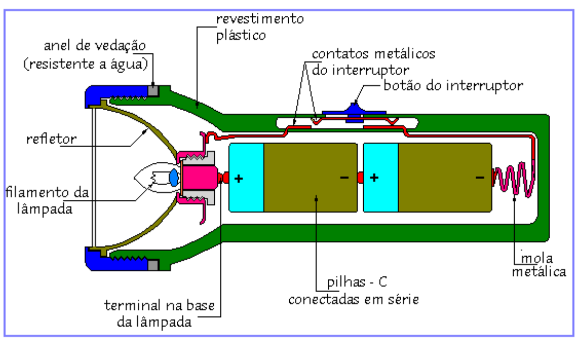
Física III – Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

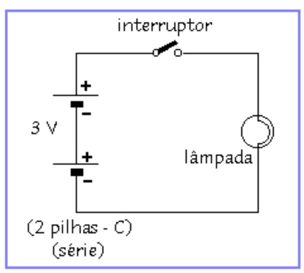
Referências bibliográficas:
H. – 29-3, 29-4, 29-5, 29-6
S. – 27-3
T. – 23-1

Aula 14 – Leis de Kirchhoff

Gustav Robert Kirchhoff (* 1824, Koenigsberg, Prússia; + 1887, Berlim, Alemanha): estudou na Universidade de Koenigsberg, onde foi discípulo de Neumann, com o qual começou a estudar o eletromagnetismo. Em 1845 ele publicou suas duas leis para circuitos elétricos, estendendo assim as descobertas anteriores de Ohm. Em 1850 foi contratado pela Universidade de Breslau, onde continuou a fazer pesquisas em mecânica dos sólidos. Quatro anos depois, foi para a Universidade de Heidelberg onde, além das pesquisas em eletricidade, estudou radiação térmica e espectroscopia do Sol, juntamente com Bunsen, descobrindo os elementos químicos césio e rubídio. Terminou sua carreira acadêmica na Universidade de Berlim como professor de física matemática. Durante quase toda a sua vida teve que usar muletas ou cadeiras de rodas, devido a uma deficiência motora.

Circuitos com Resistores e Baterias



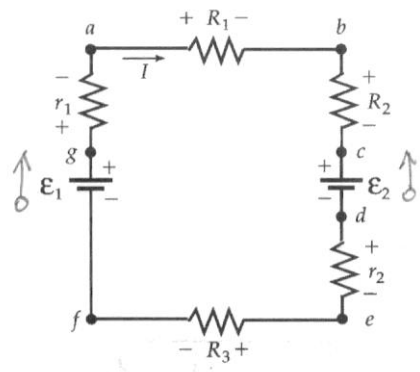


- Malha: um percurso fechado completo de um circuito elétrico.
- Nó: junção de dois ou mais fios elétricos de um circuito.
- Ramo: percurso em um circuito entre dois nós.

1ª. Lei de Kirchhoff (Lei das malhas): a soma algébrica das ddp´s encontradas ao longo de uma malha percorrida num dado sentido deve ser nula – decorre do princípio de conservação da energia.
2ª. Lei de Kirchoff (Lei dos nós): a soma das correntes que entram em um nó é igual à soma das correntes que saem do nó – decorre do princípio de conservação de carga

Procedimento para calcular circuitos com uma malha

1. Adotamos um sentido de percurso da malha (horário ou anti-horário), e um ponto de partida;
2. Arbitramos um sentido para as correntes nos resistores e damos um sentido para as fem nas baterias (do pólo negativo para o positivo)
3. Convenção de sinal para resistores: se o sentido da corrente coincide com o do percurso, a ddp (queda de tensão) pelo resistor é - R i, caso contrário é + Ri
4. Convenção de sinal para baterias: se o sentido da fem coincide com o do percurso, a ddp é igual à fem + ε; caso contrário é – ε.
5. Se queremos a ddp entre dois pontos quaisquer da malha somamos algebricamente as ddp´s apenas do percurso que liga os dois pontos.



Problema resolvido: Considere o circuito acima, onde as baterias têm fem´s são ε_1 = 12 V, ε_2 = 4 V e resistências internas iguais a $r_1 = r_2 = 1\Omega$. Os resistores são $R_1 = R_2 = 5\ \Omega$ e $R_3 = 4\ \Omega$. Calcule (a) a corrente na malha; (b) a ddp entre os pontos **a** e **e**.
Solução: (a) Adotamos um sentido de percurso horário na malha, e ***a*** *como ponto de partida. Arbitramos o sentido da corrente também como horário. Partindo do ponto a, a soma algébrica das ddp´s é nula:*

$$- i R_1 - i R_2 - \varepsilon_2 - i r_2 - i R_3 + \varepsilon_1 - i r_1 = 0$$

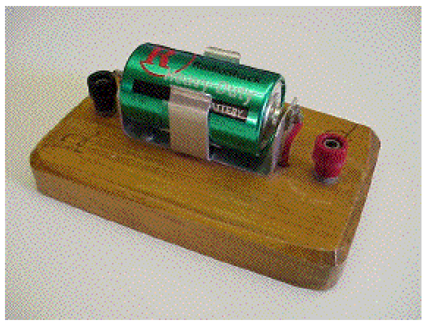
$$i = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2 + R_3 + r_1 + r_2} = \frac{12 - 4}{5 + 5 + 4 + 1 + 1} = 0{,}5A$$

Como a corrente deu positiva, sabemos que nossa escolha para o sentido de i foi correta (se i desse negativo, saberíamos que o sentido correto seria o oposto!). Na bateria ε_1 *a corrente vai do pólo negativo para o positivo, ou seja, a bateria está se descarregando neste processo. Já na bateria* ε_2 *a corrente está indo do pólo positivo para o negativo, de modo que a bateria está se carregando (isto é, operando no sentido reverso do processo eletroquímico). (b) Para determinar a ddp entre a e e partimos de a somando todas as ddp´s encontradas no percurso (vamos manter o sentido horário)*

$$V_a - i\,R_1 - i\,R_2 - \varepsilon_2 - i\,r_2 = V_b$$

$$V_a - V_b = i\,R_1 + i\,R_2 + \varepsilon_2 + i\,r_2 = 0{,}5(5 + 5 + 1) + 4 = 9{,}5\ V$$

Problema proposto: No problema anterior, ache a ddp entre **c** e **e**, e entre **a** e **f**. Respostas: 11,5 V e 4,5 V.



Do problema anterior, a ddp entre os pontos **a** e **f** (terminais da bateria 1) é 11,5 V, menor que a fem da bateria (12,0 V), pois na medida que a bateria se descarrega, parte da sua potência é dissipada na resistência interna. Também, a ddp entre os pontos **c** e **e** (terminais da bateria 2) é 4,5 V, maior, portanto, que a fem da bateria (4,0 V). Isso ocorre pois a bateria 2 está, de fato, sendo carregada, ou seja, ela opera reversivelmente (de fato, a bateria 2 consome energia gerada pela bateria 1). Devido à sua resistência interna, uma bateria real não pode ser completamente reversível.

Problema resolvido: No circuito anterior, ache a potência elétrica de saída em cada uma das baterias e a potência total dissipada pelos resistores.

Solução: potência fornecida pela bateria 1: $P = \varepsilon_1 i = 12 \times 0{,}5 = 6{,}0\ W$ *(taxa de liberação de energia elétrica para o circuito)*

Potência dissipada pela resistência interna da bateria 1: $P = r_1\, i^2 = 1 \times 0{,}5^2 = 0{,}25\ W$

Potência de saída da bateria 1 $= 6{,}0 - 0{,}25 = 5{,}75\ W$

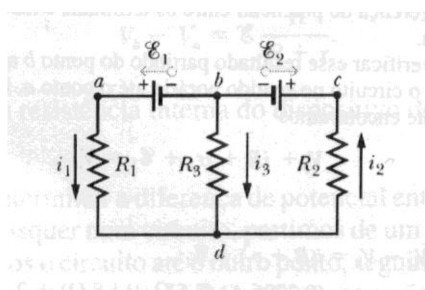
Potência dissipada pelos resistores $P = (R_1 + R_2 + R_3)\, i^2 = (5+5+4) \times 0{,}5^2 = 3{,}5\ W$

Por conservação de energia, a potência de saída na bateria 2 é $P = 5{,}75 - 3{,}5 = 2{,}25\ W$

De fato, como $P = \varepsilon_2\, i = 4 \times 0{,}5 = 2{,}0\ W$ *(taxa de armazenamento de energia na bateria, que opera reversivelmente) e a potência dissipada pela resistência interna da bateria 2:* $P = r_2\, i^2 = 1 \times 0{,}5^2 = 0{,}25\ W$*, então a potência de saída da bateria 2 é* $2{,}0 + 0{,}25 = 2{,}25\ W$

Problema proposto: Uma bateria de automóvel em bom estado tem fem ε_1 = 12 V e resistência interna r_1 = 0,02 Ω. Uma bateria fraca tem fem ε_2 = 11 V e mesma resistência interna. Desejamos fazer uma "chupeta" na bateria fraca, ligando-a por cabos grossos de resistência total R = 0,01 Ω a uma bateria em bom estado. (a) Como devemos ligar corretamente as duas baterias? (b) Qual a corrente? (c) Qual a corrente, caso ligássemos incorretamente as baterias? Que poderia ocorrer nesse caso? Solução: (a) positivo com positivo, negativo com negativo; (b) 20 A; (c) 460 A.

<u>Circuitos com várias malhas</u>: aplicamos a 1ª. Lei a todas as malhas (percursos fechados independentes) que podemos encontrar, e a 2ª lei a todos os nós (quinas **não são** nós!)



Problema resolvido: No circuito acima, onde ε_1 = 12 V, ε_2 = 4 V, R_1 = 2 Ω, R_2 = 5 Ω, R_3 = 4 Ω ache a corrente em cada ramo do circuito, e a ddp entre os pontos **b** e **d**.

Solução: (a) Temos três malhas: 1 (abda), 2 (bcdb) e 3 (abcda) e dois nós: b e d. Arbitramos sentidos de percurso anti-horários para as três malhas, e "chutamos" os sentidos das correntes nos resistores e das fem´s nas baterias. Temos 3 resistores, ou seja, 3 correntes desconhecidas i_1, i_2 e i_3. Logo precisamos de apenas 3 equações, de modo que <u>não precisaremos usar todas as leis de Kirchoff disponíveis.</u>

- *2ª. Lei - Nó d:* $i_1 + i_3 = i_2$
- *1ª. Lei - Malha 1, partindo de b:* $+ \varepsilon_1 - i_1 R_1 + i_3 R_2 = 0$
- *1ª. Lei - Malha 2, partindo de b:* $- i_3 R_3 - i_2 R_2 - \varepsilon_2 = 0$

que podemos rearranjar

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 + i_3 &= 0 \\ -2\, i_1 + 4\, i_3 &= -12 \\ -5\, i_2 - 4\, i_3 &= +4 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Resolvendo pela regra de Cramer, o determinante principal é

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 38$$

e os determinantes secundários são

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -12 & 0 & 4 \\ 4 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 92,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -12 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 24,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -12 \\ 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -68$$

de modo que as correntes em cada ramo do circuito são dadas por

$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{92}{38} = 2{,}42A,$$

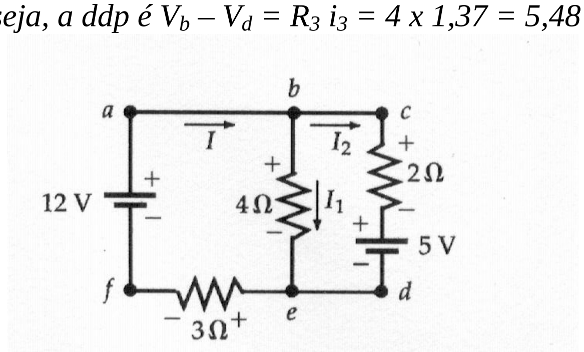
$$i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{24}{38} = 0{,}63A \;,$$

$$i_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-68}{38} = -1{,}79A$$

Como o sinal deu negativo, então o sentido correto da corrente é o oposto do indicado na figura!

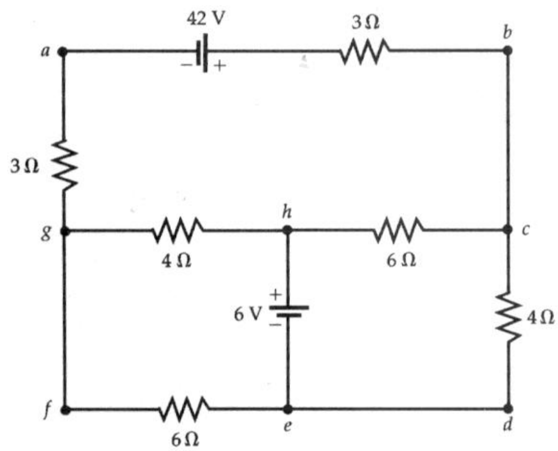
Check da lei dos nós: $i_1 + i_3 = 2{,}42 - 1{,}79 = 0{,}63 = i_2$

(b) $V_b - R_3\, i_3 = V_d$, *ou seja, a ddp é* $V_b - V_d = R_3\, i_3 = 4 \times 1{,}37 = 5{,}48$ *V*

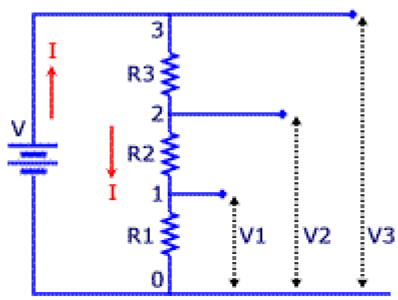


Problema proposto: No circuito figurado acima, $\varepsilon_1 = 2{,}1$ V, $\varepsilon_2 = 6{,}3$ V, $R_1 = 1{,}7\ \Omega$, $R_2 = 3{,}5\ \Omega$, ache a corrente em cada ramo do circuito, e a ddp entre os pontos **a** e **b**. Respostas: (a) $i_1 = 0{,}82$ A, $i_2 = -0{,}40$ A, $i_3 = 0{,}42$ A; (b) + 4,9 V**.**

Problema suplementar: Achar a corrente em cada malha do circuito abaixo.   Respostas: 4 A, 1 A e 3 A.



<u>Circuitos divisores de tensão</u>



A junção entre cada par de resistores é ligada ao terminal de uma chave seletora múltipla. Pela posição da chave em cada uma de suas vártias derivações, pode-se conseguir uma determinada fração da ddp V fornecida pela bateria nos terminais de saída. A divisão da ddp entre as várias derivações depende dos valores das resistências no divisor de tensão. No circuito acima, uma ddp V pode ser dividida pelos resistores associados em série, tal que a corrente na malha seja (da 1a. lei de Kirchhoff):

$$i = \frac{V}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Se tomarmos a primeira derivação da chave, entre os pontos 0 e 1, teremos a ddp

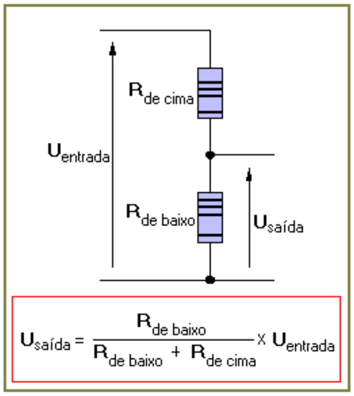
$$V_1 = R_1 i = \frac{VR_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

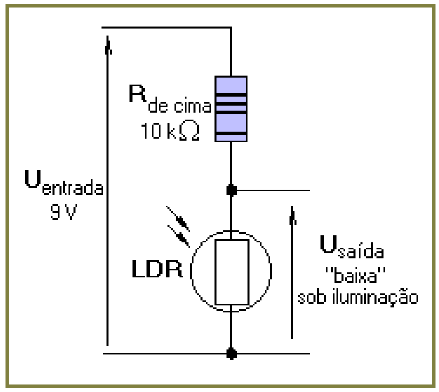
se a derivação for entre os pontos 0 e 2, a ddp é

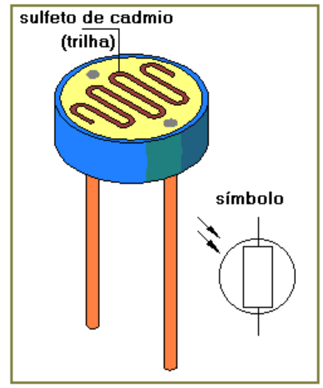
$$V_2 = R_2 i = \frac{V(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

ao passo que, entre os pontos 0 e 3, obviamente V_3 = V.

Se os resistores são substituídos por um potenciômetro com um contato deslizante, a ddp de saída pode ser qualquer fração de V. Como R = ρ L / A, temos que a fração procurada será o quociente entre o comprimento total da resistência L e a distância entre o ponto 0 e o contato deslizante L_d. Este é o princípio do controle de volume de aparelhos áudio-visuais.







Problema resolvido: Considere o circuito divisor de tensão com dois resistores figurado acima. (a) Mostrar a fórmula para a tensão de saída; (b) Substituimos o resistor de baixo por um sensor luminoso (LDR), que é um resistor a base de sulfeto de cádmio, e cuja resistência diminui com o aumento da intensidade de luz incidente (500 Ω para luz brilhante e 200 kΩ para sombra). Considerando a tensão de entrada 9V e o resistor de cima R = 10 kΩ, ache as tensões de saída para luz brilhante e sombra.

Solução: (a) A corrente é $i = U_{entrada}/R_{eq}$*, onde* $R_{eq} = R_{de\ baixo} + R_{de\ cima}$ *é a resistência equivalente da associação em série. A tensão de saída é a ddp no resistor de baixo, ou seja*

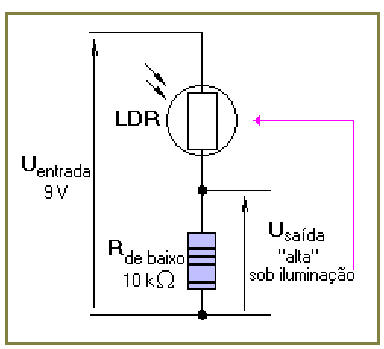
$$U_{saida} = R_{debaixo} i = R_{debaixo} \frac{U_{entrada}}{R_{eq}} = \frac{R_{debaixo}}{R_{debaixo} + R_{decima}} U_{entrada}$$

(b) Se o LDR está sob iluminação intensa $R_{debaixo} = 500\ \Omega$

$$U_{saida} = \frac{500}{500 + 10x10^3} x9 = 0{,}43V \quad (\textit{baixa tensão})$$

Se o LDR está na sombra $R_{debaixo} = 200\ k\Omega$

$$U_{saida} = \frac{200x10^3}{200x10^3 + 10x10^3} x9 = 8{,}57V \quad (\textit{alta tensão})$$

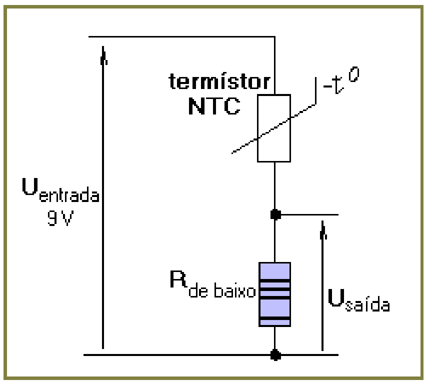


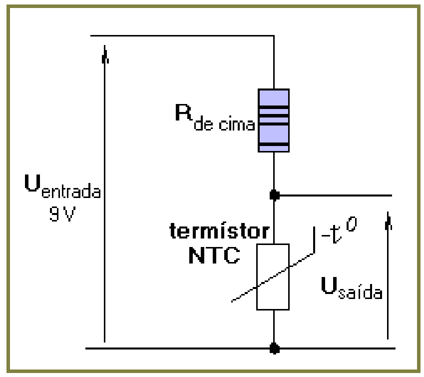
Problema proposto: Considere a variação acima do circuito divisor de tensão para projetar um "sensor de escuro", que pode ser usado para acender uma lâmpada quando falta luz natural, e apagá-la automaticamente quando há luz natural suficiente. Ache a tensão de saída para luz brilhante e para sombra. Respostas: 8,57 V e 0,43 V.

Circuitos divisores de tensão são muito usados com sensores. O LDR é um exemplo de sensor de luminosidade. Os termistores são resistores sensíveis à temperatura, ou seja, sua resistência é alterada (tipicamente diminui) com a temperatura de uma maneira conhecida. Os termistores NTC são feitos a partir de um óxido metálico. A curva característica de um termistor NTC pode ser bem ajustada por uma função exponencial

$$R(T) = R(T_0)\exp\left[\beta\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right]$$

onde $T_0 = 25^oC = 298$ K é uma temperatura de referência, e β é um fator numérico. Vamos considerar um termistor com $R(T_0) = 20$ kΩ e $\beta = 4200\ K^{-1}$.





Problema resolvido: Considere o circuito divisor de tensão (figura à esquerda) que use o termistor como um sensor de incêndio: quando altas temperaturas são detectadas, a tensão de saída é alta o suficiente para acionar uma campainha. Ache o valor da resistência de baixo se desejamos uma tensão de 4 V para temperatura de 100^o C.

Solução: Na temperatura de T = 100 + 273 = 373 K a resistência do termistor é

$$R(373) = 20x10^3 \exp\left[4200\left(\frac{1}{373} - \frac{1}{293}\right)\right] = 920{,}6\ \Omega$$

Tensão de entrada = 9V Usando o termistor como resistor "de cima", a tensão de saída no resistor "de baixo" é 4 V. Aplicando na fórmula do problema anterior temos

$$4 = \frac{R_{debaixo}}{R_{debaixo} + 920{,}6} x9 \qquad R_{debaixo} = 736{,}5\ \Omega$$

Problema proposto: Suponha que o termistor do problema anterior seja usado para um "sensor de frio", num circuito divisor de tensão que forneça uma alta tensão de saída quando a temperatura seja de 4^o C (figura à direita). (a) Mostre que a maior variação na tensão de saída ocorre se os dois resistores têm igual resistência; (b) Nestas condições, calcule o valor da resistência a ser colocada em série com o termistor. Respostas: Δ T = $T_e/2$, 58,22 kΩ