Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Curso de Pós-Graduação em Física
Eletrodinâmica Clássica II

Quarta Lista de Exercícios

Cap. IV: Dinâmica de Partículas Relativísticas e Campos Eletromagnéticos

1. (a) Mostre, a partir do Princípio de Hamilton, que duas Lagrangianas que diferem apenas pela derivada total em relação ao tempo de uma função das coordenadas e do tempo, são equivalentes no sentido de que ambas fornecem as mesmas equações de Euler-Lagrange do movimento; (b) Mostre explicitamente que a transformação de calibre $A^\alpha \to A^\alpha + \partial^\alpha \Lambda$ dos potenciais na Lagrangiana da partícula carregada

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} + \frac{q}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} - q\Phi,$$

gera outra Lagrangiana equivalente.

2. Uma partícula carregada encontra-se instantaneamente no plano equatorial do campo magnético Terrestre a uma distância R do centro da Terra. O vetor velocidade da partícula $\mathbf{v}$ faz um ângulo α (tal que $\tan\alpha = v_\parallel/v_\perp$) com o plano equatorial. Suponha que o campo magnético da Terra seja dipolar, ou seja,

$$\mathbf{B}(r,\theta) = \frac{M}{r^3}\left(\hat{\mathbf{z}} - 3\cos\theta\hat{\mathbf{r}}\right),$$

onde M é uma constante positiva e $\hat{\mathbf{z}}$ está direcionado ao longo do eixo magnético Terrestre, sendo θ o ângulo polar entre $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$.

(a) Mostre que a equação das linhas de força do campo magnético é $r(\theta) = R\sin^2\theta$;

(b) Supondo que as partículas carregadas espiralem ao longo das linhas de força com raio $a \ll R$, e que o fluxo magnético determinado pela trajetória é um invariante adiabático, mostre que a latitude λ magnética máxima atingida pela partícula (devido ao efeito de espelho magnético) é determinada implicitamente pela equação

$$\tan^2\alpha = \frac{\sqrt{1+3\sin^2\lambda}}{\cos^6\lambda} - 1.$$

(c) Faça um gráfico de λ em função de α e determine aproximadamente os valores de α para os quais a partícula atingirá a superfície da Terra (de raio R_0), para alguns valores da razão R/R_0.

3. Sabe-se que existem campos eletromagnéticos sem fontes numa dada região localizada do espaço. Considere as várias leis de conservação contidas na integral da expressão

$$\partial_\alpha M^{\alpha\beta\gamma} = 0$$

sobre todo o espaço, sendo

$$M^{\alpha\beta\gamma} = \Theta^{\alpha\beta}x^{\gamma} - \Theta^{\alpha\gamma}x^{\beta}$$

e o tensor de energia-momentum do campo eletromagnético é

$$\Theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(g^{\alpha\mu}F_{\mu\lambda}F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F_{\mu\lambda}F^{\mu\lambda}\right)$$

(a) Mostre que, quando β e γ são ambos índices espaciais, decorre o princípio de conservação do momentum angular total do campo eletromagnético;

(b) Mostre que, quando $\beta = 0$, a lei de conservação pode ser escrita como

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{c^2\mathbf{P}_{EM}}{\mathcal{E}_{EM}},$$

onde $\mathbf{R}$ é o vetor de posição do "centróide" dos campos eletromagnéticos, definido pela relação

$$\mathbf{R}\int u d^3x = \int \mathbf{x} u d^3x.$$

onde u é a densidade de energia do campo eletromagnético, $\mathbf{P}_{EM}$ e $\mathcal{E}_{EM}$ são, respectivamente, o momentum linear e a energia dos campos.

4. Consideremos um campo escalar $\phi(x^{\mu})$ descrito pela densidade de Lagrangiana $\mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi)$. Uma transformação infinitesimal do campo

$$\phi(x^{\mu}) \to \phi'(x^{\mu}) = \phi(x^{\mu}) + \delta\phi(x^{\mu})$$

induz uma variação infinitesimal na Lagrangiana $\delta\mathcal{L}$. Esta transformação é dita uma *simetria* se é possível mostrar, sem usar as equações de movimento, que existe um quadrivetor Λ^{μ} tal que

$$\delta\mathcal{L} = \partial_{\mu}\Lambda^{\mu}.$$

(a) Seja a Lagrangiana $\mathcal{L}{=}\lambda\phi^{*}\phi$. Mostre que a transformação $\delta\phi = i\alpha\phi$, com α real, é uma simetria;

(b) Considere uma translação infinitesimal no espaço de Minkowski: $x'^{\mu} = x^{\mu} - \epsilon^{\mu}$, onde $\epsilon\mu$ é um quadrivetor de módulo muito pequeno. Mostre que $\delta\phi = \epsilon^{\nu}\partial_{\nu}\phi$;

(c) Seja a Lagrangiana de Klein-Gordon

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi - \frac{\lambda^2}{2}\phi^2.$$

Mostre que a translação infinitesimal do ítem (b) é uma simetria.

5. Emmy Noether (1882 – 1935) é considerada a mais importante mulher na história da matemática. Uma de suas contribuições mais importantes é o chamado Teorema de Noether (1915), que diz que a cada simetria contínua corresponde uma quadricorrente conservada J^{μ}, chamada "corrente de Noether", pois satisfaz uma lei de conservação na forma $\partial_{\mu}J^{\mu} = 0$.

(a) Seja Λ^μ o quadrivetor definido no problema 3. Mostre que a corrente de Noether é dada por

$$J^\mu = \Lambda^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi.$$

(b) Considere as translações infinitesimais do ítem (b) do problema 4. Mostre que a corrente de Noether é

$$J^\mu = -\epsilon^\nu \Theta^\mu_\nu,$$

onde T^μ_ν é o tensor de energia-momentum. A sua conservação, portanto, pode ser encarada como uma aplicação do teorema de Noether.

(c) Transformações de Lorentz infinitesimais são rotações infinitesimais no espaço de Minkowski, caracterizadas por

$$x'^\mu = x^\mu + x_\nu \omega^{\mu\nu},$$

onde $\omega^{\mu\nu}$ é um quadritensor antisimétrico. Mostre que esta é uma simetria, onde

$$\Lambda^\nu = -\omega^\nu_\mu x^\mu \mathcal{L}.$$

(d) Obtenha a corrente de Noether no ítem anterior;

(e) Usando o teorema de Noether, mostre que decorre a lei de conservação do momentum angular

$$\partial_\mu M^\mu_{\beta\lambda} = 0,$$

onde definimos o tensor de terceira ordem misto (densidade de fluxo de momentum angular)

$$M^\mu_{\beta\lambda} = x_\beta T^\mu_\lambda - x_\lambda T^\mu_\beta.$$

6. Considere a densidade de Lagrangiana do campo eletromagnético

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

(a) Sejam translações infinitesimais no espaço de Minkowski. Obtenha, a partir da corrente de Noether, o tensor de energia-momentum T^μ_λ;

(b) Mostre que T^μ_λ não é invariante de calibre, mas que isso não afeta a lei de conservação de energia e momentum linear;

(c) Verifique que T^μ_λ não é simétrico. Para simetrizá-lo, nós consideramos a variação infinitesimal do campo

$$\delta A_\nu = -\epsilon^\lambda \partial_\lambda A_\nu,$$

e somamos e subtraimos o termo $-\epsilon^\lambda \partial_\nu A_\lambda$ (procedimento de Belinfante-Rosenfeld). Obtenha a corrente de Noether correspondente e mostre que o tensor de energia-momentum torna-se agora

$$\Theta^\mu_\lambda = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} F_{\lambda\nu} - \delta^\mu_\lambda \mathcal{L}.$$

(d) Verifique que Θ^μ_λ é invariante de calibre e que é simétrico.

7. Em 1936 o físico romeno Alexandru Proca propôs uma teoria para fótons hipotéticos com massa m_γ baseada na densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\mu^2}{8\pi} A_\mu A^\mu - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu,$$

onde $\mu = m_\gamma c/\hbar$ é o inverso do comprimento de onda Compton correspondente.

(a) Mostre que as equações de Lagrange correspondentes são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \mu^2 A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

(b) Desenvolva as equações acima para encontrar as equações de Maxwell inomogêneas correspondentes;

(c) Determine o tensor de energia-momentum e o simetrize de acordo com o procedimento de Belinfante-Rosenfeld (vide Problema 6c);

(d) Obtenha as componentes do tensor de energia-momentum simétrico e a lei de conservação correspondente.

Respostas e/ou Sugestões

2. (a) A equação das linhas de força é $\mathbf{B} \times \boldsymbol{d\ell} = \mathbf{0}$.

(b) Use o resultado de (a) para exprimir $|\mathbf{B}|$ em função de R e θ. Depois calcule o fluxo magnético delimitado pela giração da partícula no plano equatorial. Use o fato que há um invariante adiabático dado por $cp_\perp^2/2qB$ onde $p_\perp = mv_\perp$. Aplicando também a conservação da energia cinética, ache primeiro uma relação entre $v_\parallel$ em função de θ e das condições iniciais. Os pontos de retorno (espelho) você acha impondo a condição $v_\parallel = 0$.

4. (a) $\Lambda^\mu = 0$; (b) considere que $\phi'(x'^\mu) = \phi(x^\mu)$ e expanda o lado esquerdo em série de potências, desprezando termos quadráticos. (c) $\Lambda^\nu = \epsilon^\nu \mathcal{L}$;

5. (c) Mostre primeiro que $\delta\mathcal{L} = -\omega^\nu_\mu x^\mu \partial_\nu \mathcal{L}$ e imponha a anti-simetria de ω. (e) Mostre primeiro que

$$\omega^{\lambda\beta} \partial_\mu \left(x_\beta T^\mu_\lambda \right) = 0$$

e lembre que o produto de um tensor simétrico por um anti-simétrico é identicamente nulo.

7. (c)

$$T^\mu_\nu - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\alpha} \partial_\nu A_\alpha + \frac{1}{16\pi} \delta^\mu_\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{\mu^2}{8\pi} \delta^\mu_\nu A_\beta A^\beta.$$

$$\Theta^\mu_\nu = T^\mu_\nu + \frac{1}{4\pi} F^{\mu\alpha} \partial_\alpha A_\nu$$

(d) A parte do tensor energia-momentum relativa à massa do fóton será

$$\Theta^{\mu\sigma}_{Proca} = -\frac{\mu^2}{8\pi} \left(\Phi^2 - \mathbf{A}^2 \right) g^{\mu\sigma}$$

Obs: Para os problemas 4, 5 e 6 você pode consultar `http://www.fma.if.usp.br/~fleming/noether/index.html`.