

Eletrodinâmica Clássica II

Introdução e Recapitulação

Prof. Ricardo Luiz Viana

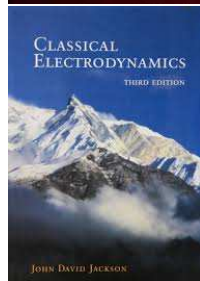
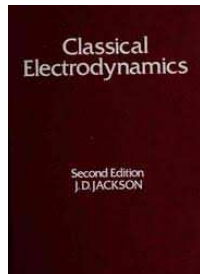
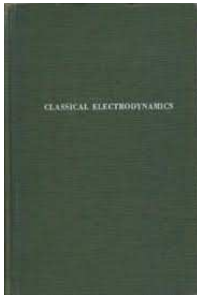
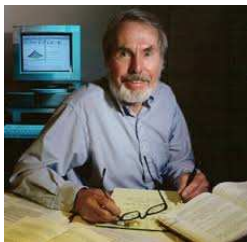
Curso de Pós-Graduação em Física,
Universidade Federal do Paraná
Curitiba, Paraná, Brasil

Ementa

- Recapitulação - Equações de Maxwell
- Ondas eletromagnéticas planas
- Sistemas radiantes simples e difração
- Teoria especial da relatividade
- Cinemática e dinâmica de partículas relativísticas
- Radiação de cargas em movimento
- Colisões entre partículas carregadas, perda de energia e espalhamento

Bibliografia

- John David Jackson (1925-2016), “Classical Electrodynamics”,
- Primeira edição (Wiley, 1962): todo CGS gaussiano
- Segunda edição (Wiley, 1975): todo CGS Gaussiano
- Terceira edição (Wiley, 1998): metade SI, metade CGS



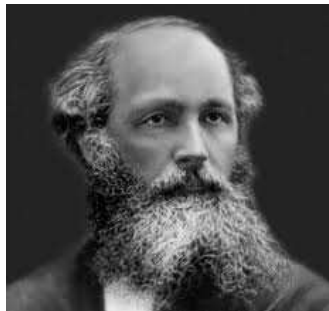
Datas de provas

- 1a. prova - 27/09
- 2a. prova - 29/11
- Prova substitutiva - 18/12

Recapitulação de Eletrodinâmica Clássica I

As equações de Maxwell

- Sistemas de unidades eletromagnéticas
- Equações de Maxwell no vácuo
- Equações de Maxwell em meios materiais
- Condições de contorno



Sistemas de unidades eletromagnéticas

- Sistema internacional (SI), ou MKS: adoção preferencial na ciência e engenharia (livros de eletro da graduação): melhor para cálculos numéricos;
- Sistema gaussiano, ou CGS: adoção em áreas da física atômica, nuclear, astrofísica, etc. (livros de eletro da pós): sistema mais “elegante” porém inconveniente para cálculos numéricos;
- Sistema de Heaviside-Lorentz: CGS “racionalizado”, adoção em teoria quântica de campos (às vezes ainda se faz $c = 1$), equações “enxutas”;

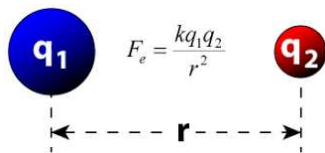
Lei de Coulomb: força elétrica entre cargas puntiformes

- No sistema CGS-gaussiano usamos $k = 1$
- Unidade de carga: $[q]$: statcoulomb (ou e.s.u.). As dimensões de carga são $M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$
- se $q_1 = q_2 = 1$ statcoulomb e $r = 1\text{cm}$, então $F_E = 1\text{dyn}$
- No sistema SI

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,987 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$$

onde

$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$
é a permissividade do vácuo



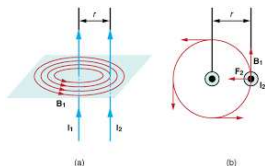
Constante eletrostática k

- Unidade de carga: $[q]$: coulomb. Não se pode expressar a unidade de carga unicamente em função de M , L e T (dimensões diferentes!)
- 1 coulomb **equivale** a $2,997 \times 10^9$ statcoulomb, mas este não é um fator de conversão!
- No SI precisamos definir uma grandeza fundamental adicional (corrente elétrica: SI = MKSA)
- No sistema Heaviside-Lorentz $k = 1/4\pi$
- Unidade de carga equivale a $1/\sqrt{4\pi}$ do statcoulomb ou a $9,410 \times 10^{-11} C$
- Os sistemas SI e HL são “racionalizados”: expressões com simetria plana tem fator 1, cilíndrica 2π e esférica 4π
- O sistema gaussiano não é racionalizado

Força magnética entre correntes elétricas paralelas (por unidade de comprimento dos fios)

- Por razões dimensionais
 $k/\xi = c^2$, onde
 $c = 2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$ é a
 velocidade da luz no vácuo
- No Gaussiano $\xi = 1/c^2$, e a
 unidade de corrente ($[I]$) é o
 statampére
- No SI
 $\xi = \mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ T.m/A}$,
 logo

$$\frac{F_M}{\ell} = 2\xi \frac{I_1 I_2}{r}$$



$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Força magnética entre correntes elétricas

$$\frac{F_M}{\ell} = \frac{2k}{c^2} \frac{I_1 I_2}{r}$$

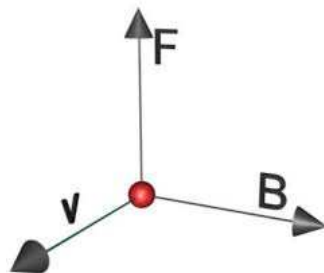
- No SI a unidade de corrente é o ampère (A): para $I_1 = I_2 = 1A$ e $r = 1m$ temos $F_M/\ell = 2 \times 10^{-7} N/m$. Logo no SI $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N/A^2$ (valor exato) é a permeabilidade do vácuo
- Como $i = dq/dt$, desejamos que 1 coulomb = 1 ampère \times 1 segundo
- 1 statampère corresponde a $3,336 \times 10^{-10} A$
- No Heaviside-Lorentz $\xi = 1/4\pi c^2$, e a unidade de corrente corresponde a $(2,821A)c$

Constante eletromagnética g

- Força magnética sobre uma partícula carregada (Lorentz)

$$\mathbf{F}_M = qg\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- No SI $g = 1$
- No gaussiano e no Heaviside-Lorentz $g = \frac{1}{c}$



Resumo

	SI (MKS)	CGS (Gaussiano)	Heaviside-Lorentz
k	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	1	$\frac{1}{4\pi}$
g	1	$\frac{1}{c}$	$\frac{1}{c}$

Equações de Maxwell na forma integral

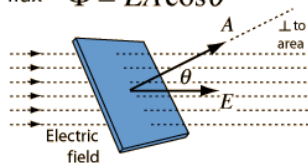
- valem para uma região do espaço de volume V delimitada pela superfície fechada S .
- integral de superfície sobre S : $d\mathbf{a} = \hat{\mathbf{n}}da$ é um elemento de área vetorial, orientada pelo vetor $\hat{\mathbf{n}}$, que por convenção sempre aponta para fora da superfície S em cada ponto desta.
- valem para uma superfície aberta S , delimitada pelo caminho fechado C
- integral de linha sobre C : orientada pelo elemento de arco $d\boldsymbol{\ell}$
- para a superfície aberta S , o elemento de área vetorial $\hat{\mathbf{n}}da$ é orientado segundo a regra da mão direita (dedos no sentido de percurso de C , polegar no sentido de $\hat{\mathbf{n}}$).

Lei de Gauss elétrica

Se $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ é o campo elétrico, a integral do fluxo elétrico por uma superfície fechada S é proporcional à carga líquida q envolvida por S

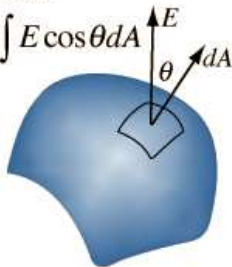
$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 4\pi kq,$$

$$\text{flux} = \Phi = EA \cos \theta$$



Electric flux:

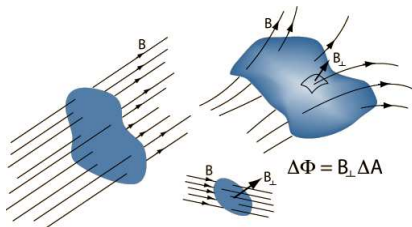
$$\Phi = \int E \cos \theta dA$$



Lei de Gauss magnética

Se $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ é o campo magnético, a integral do fluxo magnético Φ_B sobre uma superfície fechada S é nula, pois não existem monopólos magnéticos isolados

$$\Phi_B = \oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0,$$

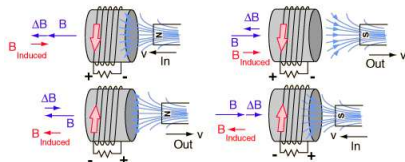


Lei de Faraday

Um fluxo magnético variável com o tempo induz uma força eletromotriz \mathcal{E} igual à circulação de um campo elétrico \mathbf{E} induzido ao longo de um caminho fechado C

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -g \frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

onde $\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$ é o fluxo magnético através de uma superfície S aberta e limitada pelo caminho C . O sinal negativo é devido à Lei de Lenz

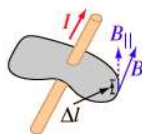


Lei de Ampère-Maxwell

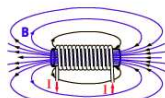
A circulação do campo magnético \mathbf{B} ao longo de um caminho fechado C é proporcional à corrente elétrica líquida I envolvida por C bem como à corrente de deslocamento, que é proporcional à variação temporal do fluxo elétrico

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi k}{gc^2} I + \frac{1}{gc^2} \frac{\partial \Phi_E}{\partial t},$$

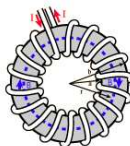
onde $\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$ é o fluxo elétrico através de uma superfície S aberta e limitada por C .



$$\sum B_{||} \Delta l = \mu_0 I$$



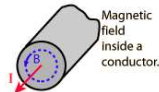
Magnetic field inside a long solenoid.



Magnetic field inside a toroidal coil.



Magnetic field from a long straight wire.



Magnetic field inside a conductor.

Forma integral das Equações de Maxwell no sistema SI

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{q}{\epsilon_0},$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0,$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da,$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Forma integral das Equações de Maxwell no sistema CGS-Gaussiano

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 4\pi q,$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0,$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da,$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da,$$

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

Forma integral das Equações de Maxwell no sistema de Heaviside-Lorentz

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = q,$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0,$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da,$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c} I + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da,$$

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

Equações de Maxwell na forma diferencial

- **Lei de Gauss elétrica:** usando o teorema do divergente transformamos a integral sobre a superfície fechada S numa integral de volume do divergente de \mathbf{E} sobre a região V limitada por S . Com a densidade volumétrica de carga $\rho(\mathbf{r})$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = 4\pi kq = 4\pi k \int_V \rho dV,$$
$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi k\rho) dV = 0.$$

Se a integral acima é nula para um volume V arbitrário, então

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k\rho.$$

- **Lei de Gauss magnética:** aplicando o mesmo raciocínio obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

Lei de Faraday

Usando o Teorema de Stokes transformamos a integral da circulação do campo elétrico \mathbf{E} ao longo de um caminho fechado C na integral de superfície do rotacional de \mathbf{E} ao longo da superfície aberta S , limitada pelo caminho C .

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da = -g \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = -g \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} da,$$
$$\int_S \left(\nabla \times \mathbf{E} + g \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0.$$

Se a integral acima é nula numa superfície S aberta arbitrária, o integrando deve ser identicamente nulo:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -g \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Lei de Ampère-Maxwell

Usamos o Teorema de Stokes para transformar a integral de caminho numa integral de superfície. Além disso, escrevemos a corrente elétrica líquida i atravessando a superfície S (limitada por C) como a integral de uma densidade superficial de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r})$.

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{4\pi k}{gc^2} \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} da + \frac{1}{gc^2} \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} da,$$
$$\int_S \left(\nabla \times \mathbf{B} - \frac{4\pi k}{gc^2} \mathbf{J} - \frac{1}{gc^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0.$$

Se a integral acima é nula em S , assim também o integrando

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi k}{gc^2} \mathbf{J} + \frac{1}{gc^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Forma diferencial das Equações de Maxwell no sistema SI

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Forma diferencial das Equações de Maxwell no sistema CGS-Gaussiano

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Forma diferencial das Equações de Maxwell no sistema de Heaviside-Lorentz

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Campo elétrico no vácuo (SI)

- Lei de Gauss elétrica \rightarrow campo elétrico de uma carga puntiforme q situada na origem: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}/r^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q\mathbf{r}/r^3$
- Se a carga estiver no ponto \mathbf{r}' , o campo será

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

- Sistema de N cargas puntiformes (princípio de superposição):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{a=1}^N \frac{q_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|^3}$$

- Densidade singular de carga $\rho(\mathbf{r}) = \sum_a q_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \rightarrow$
Distribuição contínua de cargas: $dq' = \rho(\mathbf{r}') d^3r'$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Eletrostática no vácuo (SI)

- $\partial/\partial t = 0$ e $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.
- Da lei de Faraday $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$. Então $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, onde $\phi(\mathbf{r})$ é o potencial escalar
- Potencial de uma distribuição de carga

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

- Lei de Gauss elétrica (forma diferencial) \rightarrow equação de Poisson (inomogênea)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2\varphi = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r}')$$

- Se $\rho = 0$: equação de Laplace (homogênea)

$$\nabla^2\varphi = 0$$

Dipolo elétrico

- Momento de dipolo elétrico

$$\mathbf{p} = \sum_a q_a \mathbf{r}_a = \int_V dV' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}')$$

- Potencial de um dipolo elétrico (na origem)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

- Se o dipolo estiver em \mathbf{r}' é só trocar r por $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$
- Campo elétrico de um dipolo (a grandes distâncias)

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{p}}{r^5}$$

Polarização

- Moléculas polares: tem um momento de dipolo elétrico permanente. Ex. H_2O
- Moléculas apolares: podem ter um momento de dipolo elétrico induzido por um campo externo.
- Polarização: momento de dipolo elétrico total médio por unidade de volume $\mathbf{P} = \sum_a N_a \langle \mathbf{p}_a \rangle$
- Polarização espacialmente inhomogênea produz uma densidade volumétrica de cargas de polarização (“cargas ligadas”):

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

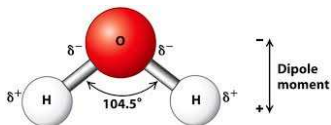
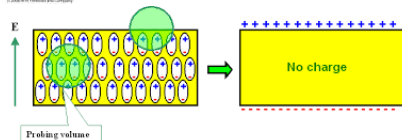


Figure 2.8
Polarization of Matter
© 2008 W. H. Freeman and Company



Lei de Gauss elétrica em meios materiais

- adicionamos a densidade de cargas de polarização à densidade de cargas livres

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho_p) = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P})$$

- Definindo o vetor deslocamento elétrico

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

- a lei de Gauss elétrica num meio material é escrita

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Dielétricos

- relação constitutiva:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

- χ_e : susceptibilidade elétrica
- dielétricos isotrópicos e lineares: $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$
- ϵ : permissividade elétrica
- $K = \epsilon / \epsilon_0 = 1 + \chi_e$: constante dielétrica
- $K = 1$ (vácuo) e $K > 1$ em geral

Material	Dielectric	Material	Dielectric
Acrylic (Plexiglass)	2.7 - 4.5	Polyamide	2.5-2.6
Acrylonitrile Butadiene Styrene (ABS)	2.87	Polycarbonate (Lexan®)	2.9-3.0
Acetal resin (Delrin)	3.6	Polyester film (Mylar)	2.83-4.5
Air	1.000585	Polyethylene	2.27-2.5
Alumina	9.3 - 11.5	Polypropylene	2.25
Asbestos	3.0 - 4.8	Polystyrene	2.4-2.6
Bakelite	3.5-5.0	Polyvinyl Chloride (PVC)	2.8-3.4
Beeswax	2.6-3.0	Porcelain	5.1-6.0
Celluloid	3.3-11	Pyrex Glass	4.3 - 5.0
Epoxy Resin (Cast)	3.6	Quartz	4.2
Formica	3.6 - 6	Rubber Cement	2.7-2.9
FR-4	4.3-5.0	Silicon	11.0 - 12.0
Mica	5.4	Silicone Oil	2.2-2.9
Micarta	3.2-5.5	Silicone Rubber	3.2-9.8
Neoprene	6-9	Silk	2.5-3.5
Nylon	4.0-5.0	Styrene (ABS)	2.8
Paper (clean)	3.0	Teflon (PTFE)	2.1
Paraffin Wax	2.1-2.5	Teflon (glass weave)	2.2-2.8
Phenol resin	4.9	Water (Distilled)	78.5 - 80
		Wax	2.4-6.5

Magnetostática no vácuo (SI)

- $\partial/\partial t = 0$ e $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.
- Lei circuital de Ampère: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$
- Na forma integral

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \underbrace{\oint_C \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} da}_{=I} = \mu_0 I$$

- Campo magnético de um fio retilíneo infinito

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- Lei de Gauss magnética: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$: podemos escrever $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, onde \mathbf{A} : potencial vetor.
- Lei de Ampère no gauge de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}_{=0} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Magnetostática no vácuo

- Equação de Poisson vetorial

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

- Por analogia com a equação de Poisson escalar da eletrostática,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

- Campo magnético (Lei de Biot-Savart)

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Magnetostática no vácuo

- Momento de dipolo magnético

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V dV' \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')$$

- Para um circuito fechado de área A : $m = IA$.
- Potencial vetor gerado por um dipolo magnético

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

- Campo magnético gerado por um dipolo magnético

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{m}}{r^5}$$

Magnetização

- Momentos de dipolo magnético: orbital e intrínseco (spin)
- Magnetização: momento de dipolo magnético total médio por unidade de volume: $\mathbf{M} = \sum_a N_a \langle \mathbf{m}_a \rangle$
- Uma magnetização espacialmente inhomogênea gera uma densidade de corrente de magnetização

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$$

- Uma polarização dependente do tempo leva a uma densidade de corrente de polarização

$$\mathbf{J}_p = (1/\mu_0)\partial\mathbf{P}/\partial t$$

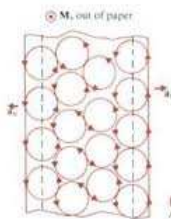
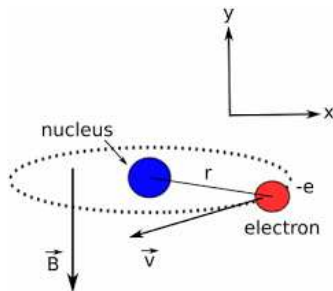


FIGURE 6-10
A cross section of a magnetized material.

Lei de Ampère-Maxwell

- somamos a densidade de corrente “livre” com as densidades de corrente de magnetização e de polarização

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_m + \mathbf{J}_p = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right)$$

- definimos o vetor intensidade magnética $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$
- reescrevemos a lei de Ampère-Maxwell para meios materiais como

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

- as leis de Gauss magnética e de Faraday não são modificadas pela presença de meios materiais

Meios magnéticos

- relações constitutivas para meios não-ferromagnéticos: $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$
- χ_m : susceptibilidade magnética
- meios paramagnéticos $\chi_m \gtrsim 0$
- meios diamagnéticos $\chi_m \lesssim 0$
- $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$
- $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$: permeabilidade magnética

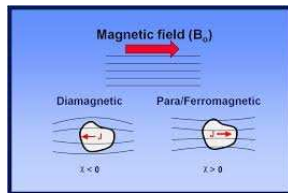
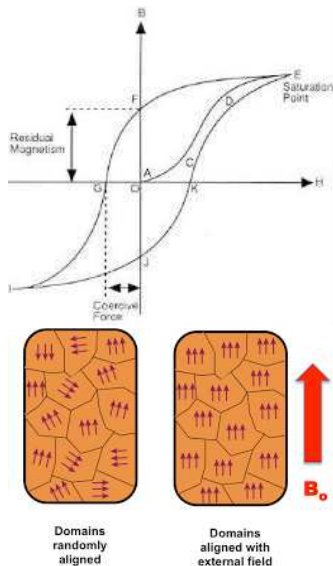


TABLE 30.2 Magnetic Susceptibilities of Some Paramagnetic and Diamagnetic Substances at 300 K

Paramagnetic Substance	χ	Diamagnetic Substance	χ
Aluminum	2.3×10^{-5}	Bismuth	-1.66×10^{-5}
Calcium	1.9×10^{-5}	Copper	-9.8×10^{-6}
Chromium	2.7×10^{-4}	Diamond	-2.2×10^{-5}
Lithium	2.1×10^{-5}	Gold	-3.6×10^{-5}
Magnesium	1.2×10^{-5}	Lead	-1.7×10^{-5}
Niobium	2.6×10^{-4}	Mercury	-2.9×10^{-5}
Oxygen	2.1×10^{-6}	Nitrogen	-5.0×10^{-6}
Platinum	2.9×10^{-4}	Silver	-2.6×10^{-5}
Tungsten	6.8×10^{-5}	Silicon	-4.2×10^{-6}

Meios ferromagnéticos

- a relação $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$ não é linear e apresenta efeitos de memória: curva de histerese
- remanência: $B(H = 0)$
- coercividade: $-H(B = 0)$
- localmente $B = \mu H$ com $\mu \gg 1$
- existência de domínios magnéticos



Meios condutores

- $E = 0$ em seu interior (no equilíbrio eletrostático)
- relação constitutiva linear (lei de Ohm) $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$
- σ : condutividade elétrica

Forma diferencial das Equações de Maxwell para meios materiais

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Condições de contorno

- caixa de pílulas Gaussiana

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_s$$

- σ_s : densidade de carga na interface

$$B_{2n} - B_{1n} = 0$$

- espira Amperiana

$$E_{2t} - E_{1t} = 0$$

- \mathbf{K} : densidade de corrente fluindo na interface

$$H_{2t} - H_{1t} = \mu_0 \mathbf{K}$$

