

Colisões elásticas entre duas esferas: Um tratamento intermediário para estudantes de graduação

Ricardo L. Viana e Alcione S. Fernandes

Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná
81531-990 Curitiba, PR
viana@fisica.ufpr.br

(Recebido: 21 de maio de 2003)

Resumo: Fazemos uma análise dinâmica de colisões unidimensionais elásticas entre duas esferas, levando em conta as deformações elásticas das esferas durante a colisão. São estudadas a força entre as esferas e o domínio de contacto como função da distância de deformação, bem como o tempo total de colisão.

Palavras-chave: Colisões, dinâmica, elasticidade, deformação elástica

Abstract: We perform a dynamical analysis of one-dimensional elastic collisions between two spheres, taking into account the elastic deformations of the spheres during the collision. We study the force between the spheres as well as the contact domain as functions of the deformation distance and the total collision time.

Key words: Collisions, dynamics, elasticity, elastic deformation

1 Introdução

O estudo de colisões em Física Básica é um dos pontos mais importantes do seu programa por uma série de razões: a) introduz o conceito de impulso de uma força e o teorema do impulso-momento linear; b) é um problema clássico de aplicação dos princípios de conservação da energia e do momento linear para sistemas de partículas; c) configura um sistema de partículas no qual é simples a distinção entre o referencial do laboratório e o do centro de massa; d) introduz idéias aplicáveis em Física Nuclear e de Altas Energias, uma vez que colisões são processos usuais de investigação da estrutura da matéria. O tratamento usual dos livros-texto introdutórios [1, 2]

considera em detalhes o caso de colisões unidimensionais e bidimensionais elásticas. Textos mais elaborados [3, 4] consideram também colisões bidimensionais inelásticas.

Em quase todos os textos introdutórios, a abordagem se restringe à análise da dinâmica do processo colisional empregando cinemática e leis de conservação. No entanto, a colisão propriamente dita é vista de forma superficial. Usa-se normalmente o teorema do impulso-momento linear e uma estimativa para o tempo de colisão para obter o valor médio da força com que uma esfera atua sobre a outra (formam um par ação-reação). Colisões inelásticas são tratadas fenomenologicamente por meio de um fator “Q” correspondente às perdas de energia mecânica.

Isso é natural, pois para entender os detalhes da colisão, mesmo elástica, é necessário estudar a deformação dos corpos que colidem. Esse é o objetivo da teoria da elasticidade, que só será vista pelo estudante – e ainda assim de forma introdutória – algumas unidades mais à frente no curso de Física Básica. Por outro lado, ainda que o tratamento matemático do problema da colisão (e, de modo geral, do contacto) entre corpos deformáveis seja razoavelmente bem conhecido [5], a análise da colisão elástica entre duas esferas gera resultados analíticos fáceis de se trabalhar, no sentido de dar ao estudante de primeiro ano uma compreensão mais detalhada do que realmente está ocorrendo durante a colisão.

O objetivo deste trabalho é extrair da solução rigorosa do problema de contacto entre duas esferas (que é um caso particular do contacto entre duas superfícies geodésicas quaisquer) alguns resultados que podem ser aplicados ao problema de colisão elástica de duas esferas de massas, raios e materiais diferentes, dentro de algumas limitações do modelo. Na segunda seção, iremos rever os resultados da análise dinâmica de uma colisão unidimensional elástica. Na seção III, apresentaremos alguns detalhes da solução do problema elástico, introduzindo os conceitos básicos que se fizerem necessários, de modo que esta seção é auto-suficiente para um leitor que não conheça previamente o assunto. Na seção IV, faremos uma aplicação numérica das expressões encontradas, e, finalmente, exporemos nossas conclusões.

2 Dinâmica de uma colisão elástica

Sendo por hipótese uma colisão elástica, a energia cinética total do sistema antes da colisão é igual à energia cinética total após a colisão, no referencial do laboratório. Suponhamos, ainda, que a colisão é unidimensional, o que simplificaria a análise elástica. A conservação de energia pode ser escrita como (as variáveis sem primos são pré-colisionais, e, com primos, pós-colisionais, cf. Figura 1):

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad (1)$$

onde as esferas têm massas m_1 , m_2 , e raios R_1 , R_2 . Suponha, também, que as esferas não apresentam velocidades angulares ($\vec{\omega} = \vec{0}$).

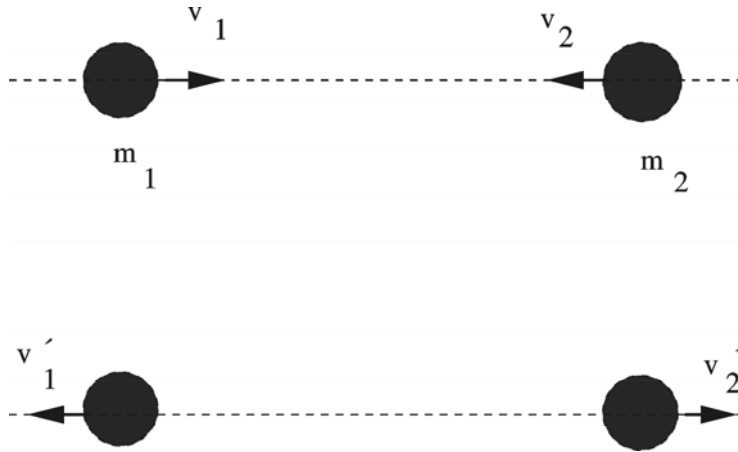


Figura 1. Uma colisão unidimensional entre duas esferas.

Para analisar a colisão é conveniente passar para o referencial do centro de massa do sistema formado pelas duas esferas, ou seja, o sistema de referência no qual o centro de massa está em repouso. Neste referencial a energia cinética total para o movimento relativo, antes da colisão, é constante e dada por

$$K_{rel} = \frac{1}{2} \mu v_{rel}^2 \quad (2)$$

onde

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

é a massa reduzida do sistema, e $\vec{v}_{rel} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ é a velocidade relativa entre os centros das esferas.

Durante a colisão as esferas comprimem-se mutuamente devido ao seu caráter elástico. Elas se deformam formando um domínio de contacto circular (Figura 2). A diferença entre a soma dos raios das esferas e a distância entre seus centros d será denominada distância de deformação

$$h = (R_1 + R_2) - d \quad (4)$$

e mede a deformação longitudinal das duas esferas em contacto. Ainda durante a colisão, teremos uma energia cinética associada à velocidade relativa de deformação $\dot{h} = dh/dt$, e uma energia potencial elástica que depende da distância de deformação $U(h)$, ainda a determinar (depende da solução do problema elástico). Usando o fato que a colisão é elástica, o princípio de conservação de energia fornece

$$\frac{1}{2} \mu v_{rel}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{h}^2 + U(h) \quad (5)$$

Quando toda a energia cinética for transformada em energia potencial elástica do sistema, a velocidade de deformação é nula, de modo que a máxima distância de deformação h_{max} é dada implicitamente pela equação

$$U(h_{max}) = \frac{1}{2}\mu(v_{rel}^0)^2 \quad (6)$$

onde v_{rel}^0 é a velocidade relativa antes do início da colisão.

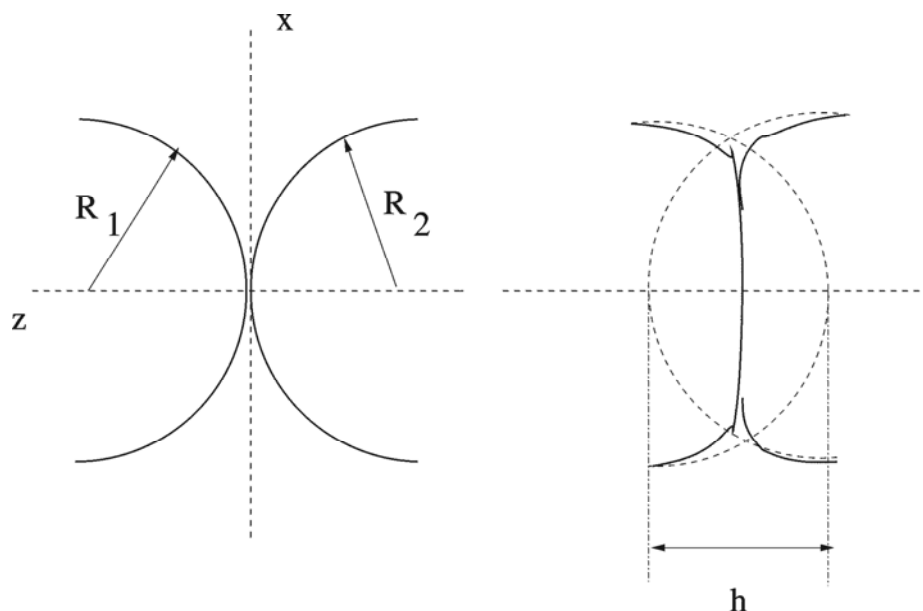


Figura 2. Geometria essencial da deformação das esferas durante a colisão.

Já o tempo de duração total da colisão, τ , é o dobro do tempo necessário para a distância de deformação variar desde 0 (no início da colisão) até h_{max} , ou seja

$$\tau = 2 \int_0^{h_{max}} \frac{dh}{\dot{h}} \quad (7)$$

Substituindo \dot{h} a partir da Eq. (5), e supondo que h deva ser sempre uma quantidade positiva, obtemos

$$\tau = 2 \int_0^{h_{max}} \frac{dh}{\sqrt{v_{rel}^2 - \frac{2}{\mu}U(h)}} \quad (8)$$

3 Solução do problema de contacto elástico

Heinrich Hertz, o descobridor das ondas eletromagnéticas, foi, também, um estudioso de problemas da teoria da elasticidade e o primeiro estudioso a resolver, em 1882, o problema de contacto entre corpos deformáveis. O tratamento completo

do problema geral do contacto entre duas superfícies quaisquer de corpos elásticos pode ser encontrado em livros-texto de teoria da elasticidade, como o da coleção de Física Teórica de Landau e Lifshitz [5]. A solução é um *tour de force* analítico, pois emprega técnicas emprestadas da teoria do potencial de um elipsóide.

Os problemas de contacto elástico têm uma enorme importância tecnológica, pois componentes móveis de máquinas sempre possuem folgas para acomodar expansões térmicas, permitir adequada lubrificação, etc. Devido ao movimento de engrenagens, eixos, e outros componentes, ocorrem impactos intermitentes. Logo, é importante estudar como eles ocorrem em tais sistemas, inclusive pela possibilidade de haver um comportamento dinâmico complexo, como caos [6]. A literatura técnica sobre o assunto é razoavelmente extensa [7, 8].

Devido à complexidade dos métodos matemáticos envolvidos nesta dedução, limitar-nos-emos a apresentar as deduções válidas para objetos esféricos, mas considerando massas, raios e materiais diferentes, dentro de limites que serão discutidos mais à frente. Mesmo assim, é conveniente definir alguns conceitos básicos que serão empregados nesta seção.

Quando uma barra é submetida a uma tração (Figura 3) ao longo de uma direção (z , por exemplo), ela tipicamente sofrerá um alongamento nessa direção $\Delta z = z_f - z_i$. A variação fracional desse alongamento se diz sua deformação longitudinal $u_z = \Delta z/z$. Existe, por sua vez, uma tensão longitudinal σ_z , definida como $\sigma_z = F/A$, onde F é a força de tração e A a área da seção reta da barra.

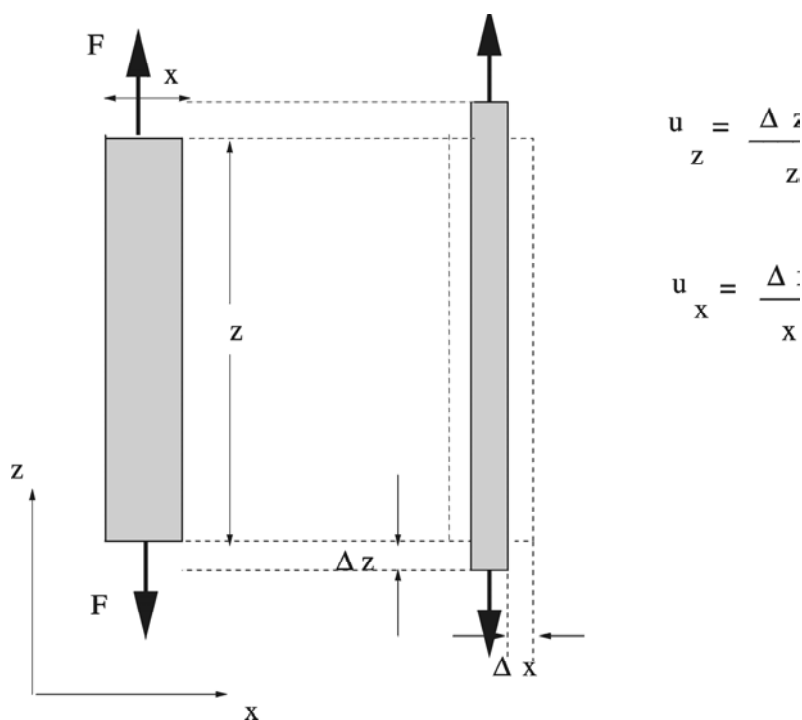


Figura 3. Deformações de uma barra prismática sujeita à tração longitudinal.

O módulo de Young é definido como a razão entre a tensão e a deformação longitudinais¹

$$E = \frac{\sigma_z}{u_z} \quad (9)$$

e tem as mesmas unidades da tensão, ou seja, N/m^2 ou Pa no Sistema Internacional. Valores típicos para materiais são da ordem de gigapascal. Para o aço, por exemplo, temos que E é da ordem de $200GPa$, ao passo que para a madeira vale $13GPa$ [1].

Além desse alongamento longitudinal u_z , observa-se que a barra também sofre uma deformação na direção transversal (como a direção x , por exemplo), escrita u_x (Figura 3). O coeficiente de Poisson é o valor absoluto da razão entre ambos

$$\nu = \left| \frac{u_x}{u_z} \right| \quad (10)$$

e é adimensional. Para a maioria dos materiais, o coeficiente de Poisson varia tipicamente entre 0,1 e 0,5 [9].

À medida que as esferas se tocam e começam a deformar-se mutuamente, a distância de deformação h vai crescendo monotonicamente de zero até um valor máximo. Ao mesmo tempo, cresce também a força $F(h)$ com que uma esfera atua sobre a outra (elas formam um par ação-reação, e a terceira lei de Newton é válida). Pode-se mostrar [5] que o módulo dessa força cresce com a deformação de acordo com a equação

$$F = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} h^{3/2} \quad (11)$$

onde é definido

$$D = \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \quad (12)$$

onde E_i e ν_i são os módulos de Young e coeficiente de Poisson, respectivamente, para a esfera i ($i = 1, 2$).

Podemos definir uma constante elástica conveniente a partir da expressão (que envolve apenas parâmetros elásticos das esferas), por

$$k = \frac{4}{5D} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (13)$$

com D dado pela Eq. (12), de modo que a equação da força entre as esferas, Eq. (11), torna-se

$$F = \frac{5}{4} k h^{3/2} \quad (14)$$

Observe-se que essa expressão difere da lei de Hooke para uma mola ($F = kh$), em pelo menos dois aspectos: a relação força-deformação não é linear e o coeficiente de

¹Este resultado foi enunciado em 1678 por Robert Hooke, como resultado de experiências com barras metálicas. Forma a base da Lei de Hooke para deformações de molas.

proporcionalidade é ligeiramente maior que um (para molas helicoidais, tipicamente $k \sim 100N/m$).

Dada a lei da força, Eq. (14), podemos deduzir uma expressão para a energia potencial elástica a partir da definição ($F = |\partial U/\partial h|$)

$$U(h) = \frac{1}{2}kh^{5/2} \quad (15)$$

que tem a forma da expressão hookeana $F = kh^2/2$. A distância máxima de deformação pode agora, com o auxílio da Eq. (6), ser escrita como

$$h_{max} = \left(\frac{\mu}{k}\right)^{2/5} v_{rel}^{4/5} \quad (16)$$

Da mesma maneira, podemos usar a Eq. (8) para determinar a duração total da colisão

$$\tau = 2 \int_0^{h_{max}} \frac{dh}{\sqrt{v_{rel}^2 - \frac{k}{\mu}h^{5/2}}} \quad (17)$$

No apêndice mostramos que esta integral pode ser resolvida analiticamente, fornecendo o resultado

$$\tau \approx 2,94 \left(\frac{\mu^2}{k^2 v_{rel}}\right)^{1/5} \quad (18)$$

Na referência [5], prova-se que o domínio, ou região de contacto entre as duas esferas, é um círculo de raio a (Figura 4), e que o raio varia com a distância de deformação h como

$$a(h) = \left(F(h)D \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)^{1/3} = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} h} \quad (19)$$

onde usamos a Eq. (11); de modo que, na deformação máxima, também o raio do círculo de contacto será máximo.

Podemos novamente supor que a linha que une o centro das duas esferas está orientada na direção z , e que, conseqüentemente, a compressão é efetuada ao longo dela. Neste caso, x e y são direções perpendiculares. A distribuição da tensão de compressão ao longo do domínio de contacto pode ser calculada pela fórmula [5] (cf. Figura 4)

$$p_z(x, y, h) = \frac{3F(h)}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \left(\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right)} \quad (20)$$

que é uma distribuição parabólica de pressões para $h = const.$. O valor máximo da pressão ocorre evidentemente ao longo da linha de contacto, e vale

$$p_{zmax} = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi a^2} = \frac{3}{2} \bar{p} \quad (21)$$

onde \bar{p} é a pressão média causada pela colisão entre as esferas.

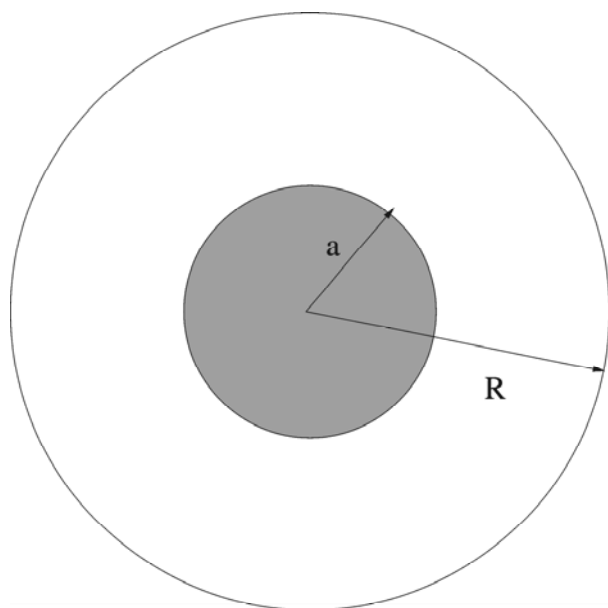


Figura 4. Domínio de contacto entre as esferas durante a colisão.

As expressões mostradas anteriormente são muito semelhantes àquelas válidas para o caso em que uma esfera colide com uma superfície de um meio elástico semi-infinito. Em particular, a força entre os corpos em contacto depende de $x^{3/2}$, em analogia com Eq. (14), onde x é a distância correspondente de deformação devido ao contacto [8]. Assim como na Eq. (18), também a duração total do contacto é proporcional a $V_0^{-1/5}$, onde V_0 é a velocidade da esfera em relação à superfície.

4 Um exemplo numérico

Vamos, por simplicidade, considerar duas esferas idênticas:

$$m_1 = m_2 = m, \quad R_1 = R_2 = R, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu, \quad E_1 = E_2 = E \quad (22)$$

o que simplifica bastante as fórmulas apresentadas na seção anterior. A massa reduzida é $\mu = m/2$, e os parâmetros elásticos nas Eqs. (12) e (14) ficam

$$D = \frac{3}{2} \left(\frac{1 - \nu^2}{E} \right), \quad k = \frac{4}{5D} \sqrt{\frac{R}{2}} \quad (23)$$

Sejam duas esferas de aço (para o qual temos $E = 2,0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ e $\nu = 0,19$ [9]) de raios $R = 2,0 \text{ cm}$ e massas iguais a $m = 0,26 \text{ kg}$ (a densidade do aço é 7860 kg/m^3). Vamos supor uma velocidade relativa de $0,60 \text{ m/s}$, como por exemplo

num experimento no qual as esferas se aproximam com velocidades iguais a 30cm/s . Nesse caso, a deformação máxima das duas esferas (no ponto em que sua velocidade instantânea é nula) é dada pela Eq. (16) como $h_{max} = 2,8 \times 10^{-5}\text{m} \approx 0,030\text{mm}$.

Para essa deformação, a força máxima entre as esferas é dada pela Eq. (14) e é igual a $F_{max} = 2100\text{N}$. Ainda nessa situação, o raio máximo do círculo de contacto é dado pela Eq. (19) como $a = 0,54\text{mm}$. O valor máximo da força de contacto equivale aproximadamente ao peso de um objeto de massa quase igual a 220kg ! Esse valor tão alto ajuda a entender a deformação das esferas quando em contacto (da ordem de frações de milímetro), ainda que por um intervalo de tempo muito pequeno, como veremos a seguir.

A relação entre a distância de deformação e a força de contacto entre as esferas, Eq. (19), pode ser observada na Figura 5. A força cresce com a deformação à potência $3/2$. Na mesma figura, mostramos que o raio do domínio de contacto cresce com $h^{1/2}$ (cf. Eq. (19)). Finalmente, o tempo total de contacto entre as esferas é dado pela Eq. (18) como $\tau = 1,4 \times 10^{-4}\text{s} \approx 140\mu\text{s}$. Para colisões entre pequenas esferas de aço e uma superfície de um meio semi-infinito do mesmo material, a teoria do contacto elástico prevê tempos de contacto na faixa entre $10\mu\text{s}$ e $100\mu\text{s}$ [8], o que está de acordo com nossa estimativa. Por outro lado, o tempo de contacto entre uma bola de baseball e o taco é tipicamente de $1,2\text{ms}$ [1]. A grande diferença entre este valor e o nosso deve-se às diferentes propriedades elásticas dos materiais em contacto.

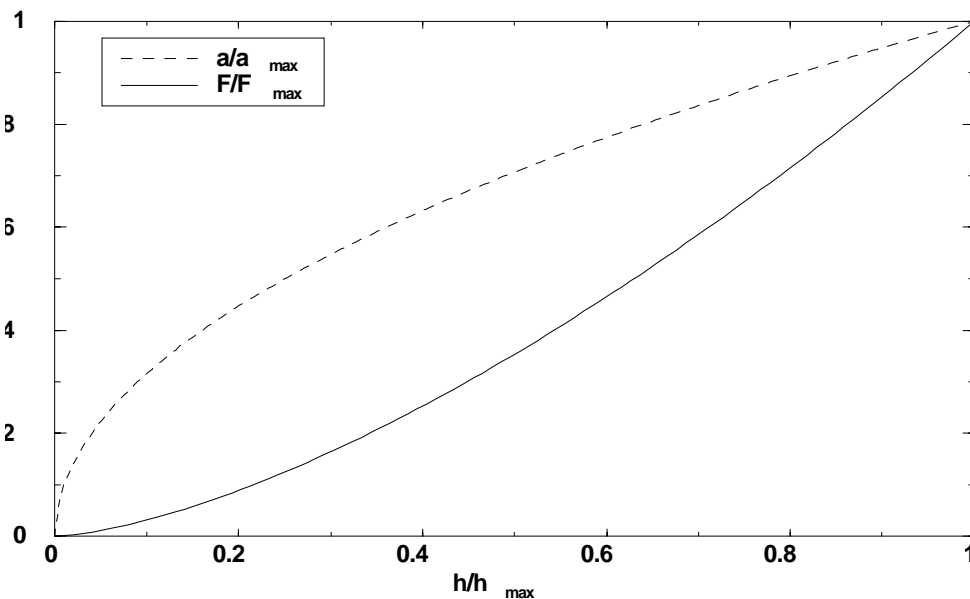


Figura 5. Força de contacto entre as esferas e raio do domínio de contacto (normalizados) como função da distância de deformação.

Supondo, no referencial do laboratório (Figura 1), que cada esfera esteja se aproximando com velocidade de $v_1 = v_2 = v = 0,3\text{m/s}$ (pois a velocidade relativa

é $v_{rel} = v_1 + v_2 = 0,6m/s$, o teorema do impulso-momento linear nos diz que a variação do momento linear de cada esfera é igual ao impulso sobre ela

$$\Delta p = p' - p = m(v' - v) = J = \int_{t=0}^{t=\tau} F(t)dt \approx \bar{F}\tau \quad (24)$$

onde \bar{F} é o valor médio da força entre as esferas. Logo, como $\vec{v}' = -\vec{v}$ temos a seguinte estimativa

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\tau} = \frac{2mv}{\tau} \approx 1135N \quad (25)$$

que é cerca de 54% do seu valor máximo. Desse modo, podemos inferir que a função $F(t)$ deva ter um pico relativamente simétrico em relação ao valor máximo (Figura 6). A forma exata desta curva é um pouco complicada de se obter, visto que temos de achar $F(t(h))$, o que implica fazer a integral em (18) numericamente desde $h = 0$ até um valor genérico h para achar t ; e posteriormente aplicar a Eq. (14) para determinar a força neste instante.

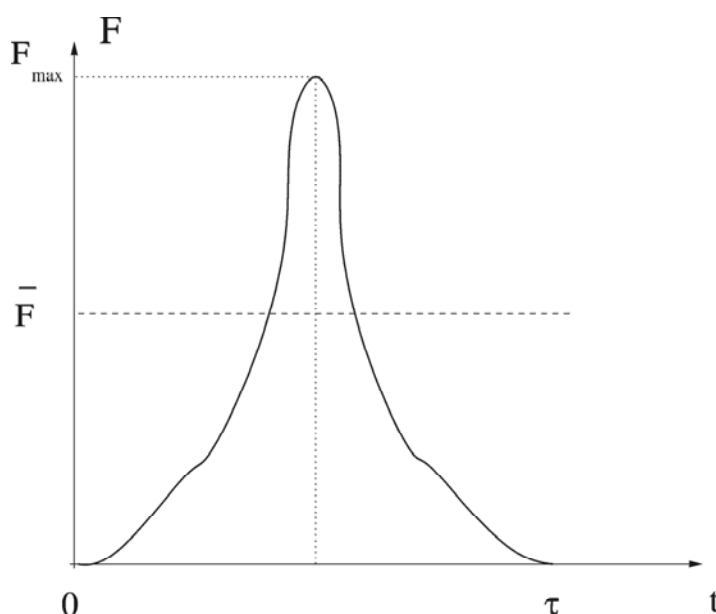


Figura 6. Força de contacto entre as esferas em função do tempo (esquemáticamente).

5 Conclusões

Neste trabalho nós empregamos resultados conhecidos da teoria da elasticidade relativos ao contacto de corpos sólidos para obter informações detalhadas sobre a deformação que duas esferas experimentam quando colidem. Nós restringimos ao caso de colisões unidimensionais elásticas de esferas. Nos livros-texto elementares, o tempo de colisão é introduzido como uma informação adicional, sem indicações de como este possa ser calculado e/ou medido. O conhecimento desse dado permite-nos

saber o valor médio da força entre as esferas. Aplicamos os resultados teóricos para duas esferas idênticas de aço. Os resultados indicam que o tempo de colisão é da ordem de frações de milissegundos, e que a deformação máxima experimentada pelas esferas é da ordem de frações de milímetro.

Embora a solução exata do problema elástico tenha sido usada, há pelo menos três ressalvas a fazer quanto à utilização do presente modelo. A primeira é a de que, mesmo a baixas velocidades relativas entre as esferas, há sempre dissipação de energia do tipo térmica e sonora. A segunda é a de que as velocidades relativas das esferas não podem ser da ordem da velocidade do som dentro das esferas (no caso do aço, essa velocidade é da ordem de 6000m/s). Caso contrário, teríamos de levar em conta que a colisão entre as esferas geraria vibrações nestas, o que leva a um regime fortemente inelástico. Outra limitação importante a nossos resultados é que o regime elástico (onde a relação tensão-deformação é linear) pode já não ser válido rigorosamente em muitos casos. Vimos que a pressão máxima na direção longitudinal ocorre ao longo da linha de contacto das esferas, dada pela Eq. (21). O maior valor dessa pressão ocorrerá quando a força entre as esferas for máxima e quando o domínio de contacto tiver o maior raio possível.

No exemplo numérico que vimos, o valor máximo da força é da ordem de 2000N , mas concentrada num domínio de raio máximo de pouco mais que meio milímetro. Isso gera uma grande tensão longitudinal igual a $3,47 \times 10^9\text{Pa}$, que é superior ao limite elástico do aço (que vale $2,50 \times 10^8\text{Pa}$), e inclusive a seu limite de ruptura (que vale $4,0 \times 10^8$). Nesse caso, porém, os possíveis danos às esferas que colidem são limitados pelo tempo muito curto em que as forças agem, que é da ordem de cem microssegundos. De fato, a maioria dos impactos parece gerar tensões acima dos limites elásticos em um intervalo de tempo muito curto. Nesse caso, para obter resultados mais precisos, deve-se empregar uma análise elasto-plástica de impactos [8]. No entanto, a teoria elástica é extremamente útil para determinar estimativas que levem em conta aspectos físicos da colisão, e pode ser considerada uma primeira aproximação para esses e outros problemas de impactos entre corpos sólidos.

Agradecimentos

Este trabalho teve apoio financeiro parcial do CNPq, Fundação Araucária (Estado do Paraná) e FUNPAR/UFPR. Os autores desejam agradecer ao Professor Ibrahim El Chamma Neto (UTP) por uma leitura crítica do manuscrito e pelas discussões enriquecedoras.

Apêndice: Cálculo da integral do tempo de colisão

Vamos obter o valor da integral

$$I = \int_0^{h_{max}} \frac{dh}{\sqrt{v_{rel}^2 - \frac{k}{\mu} h^{5/2}}} \quad (26)$$

que aparece no cálculo do tempo de colisão. Fazendo a transformação de variáveis

$$x = \frac{h}{h_{max}} \quad (27)$$

obtemos

$$I = \left(\frac{\mu^2}{k^2 v_{rel}} \right)^{1/5} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{5/2}}} \quad (28)$$

Usando a fórmula [10]

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x^b)^{c-1} dx = \frac{1}{b} B\left(\frac{a}{b}, c\right) \quad (29)$$

onde

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (30)$$

é a função beta, temos que

$$I = \left(\frac{\mu^2}{k^2 v_{rel}} \right)^{1/5} \frac{2}{5} B\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\mu^2}{k^2 v_{rel}} \right)^{1/5} \frac{2}{5} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2/5)}{\Gamma(9/10)} \quad (31)$$

e usamos que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Para as outras funções gama, podemos usar uma tabela dessas funções como em [11], mas normalmente estas contêm valores da função para argumentos entre 1,0 e 2,0. Para trabalhar com argumentos menores que um, como aqui, devemos usar a identidade

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad (32)$$

Logo, $\Gamma(2/5) = (5/2)\Gamma(7/5) \approx 2,21815$ e $\Gamma(9/10) = (10/9)\Gamma(19/10) \approx 1,068633$.

Substituindo estes resultados na equação (7), obtemos

$$\tau = 2I \approx 2,943 \left(\frac{\mu^2}{k^2 v_{rel}} \right)^{1/5} \quad (33)$$

que é a expressão que procurávamos.

Referências

- [1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fundamentals of Physics*, 6th. ed. John Wiley & Sons: New York, 1993.
- [2] P. Tipler, *Física*. Volume 1 - Mecânica, 3a. ed. LTC: Rio de Janeiro, 1995.
- [3] H. M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica. 1 - Mecânica*. Edgard Blücher: São Paulo, 1987.
- [4] K. R. Symon, *Mecânica*. Campus: Rio de Janeiro, 1982.
- [5] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Théorie de L'Élasticité*. Mir: Moscou, 1967; *Theory of Elasticity*, 3rd ed. Pergamon Press: Oxford, 1986.
- [6] Vários sistemas de interesse tecnológico que possuem impacto intermitente são discutidos em: J. Jerrelind, A. Stensson, *Chaos, Solitons and Fractals* **11**, 2413 (2000). O comportamento caótico em sistemas mecânicos pode ser visto no livro-texto de F. C. Moon, *Chaotic Vibrations*. John Wiley and Sons: New York, 1987.
- [7] W. Goldsmith, *Impact*. Edward Arnold Publ.: London, 1960.
- [8] F. C. Moon, *Applied Dynamics: with Applications to Multibody and Mechatronic Systems*. John Wiley and Sons: New York, 1998.
- [9] F. Sears, M. W. Zemansky, H. D. Young, *Física 2*. LTC: Rio de Janeiro, 1983.
- [10] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, 5th ed. Academic Press: New York, 1994.
- [11] M. Abramowitz e I. A. Stegun (Editores), *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publ.: New York, 1970.