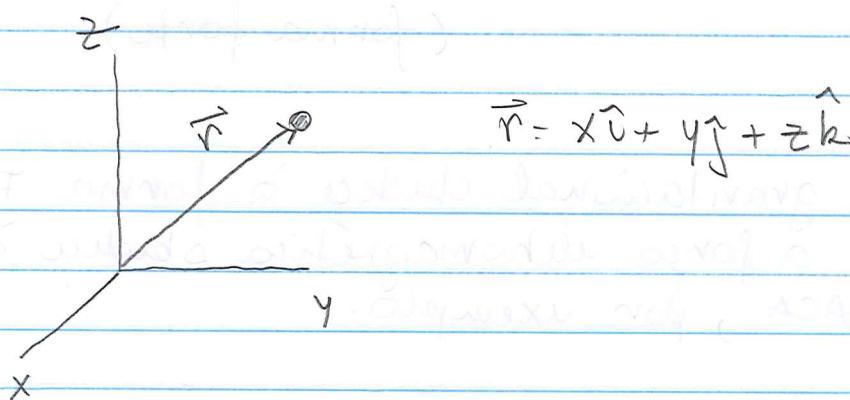


## Capítulo 9 - Dinâmica de sistema de partículas

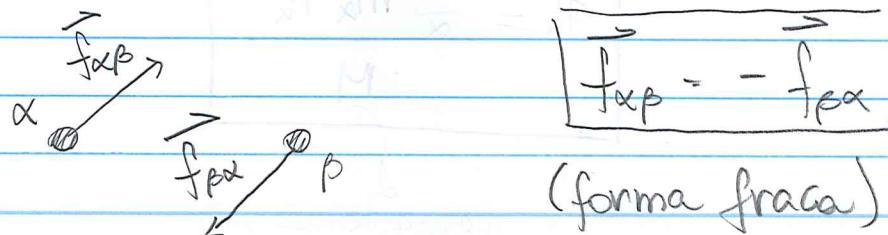
Até aqui, os corpos que estudamos foram tratados como **PARTÍCULAS**. Para localizar uma partícula você só precisa de 3 números (em geral as 3 componentes cartesianas de  $\vec{r}$ )



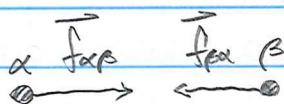
Neste capítulo vamos considerar um **GRUPO DE PARTÍCULAS**

As forças que atuam sobre as partículas vão se dividir entre **EXTERNAS** (de causa externa ao grupo de partículas) e **INTERNAL**s (devidas às interações entre as próprias partículas)

Sobre as forças internas iremos supor que elas obedejam à 3<sup>a</sup> Lei de Newton:



Para obter alguns dos resultados inimis utilizan a FORMA FORTE da 3<sup>a</sup> Lei. Além de  $\vec{F}_{ap} = -\vec{F}_{pa}$  exigimos que essas forças sejam centrais (ao longo da direção que une  $\alpha$  e  $\beta$ ).



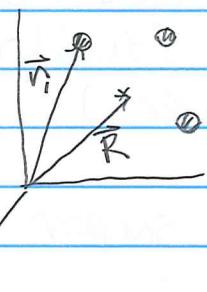
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F}_{ap} &= -\vec{F}_{pa} \text{ e} \\ \vec{F}_{ap} &\text{ central}\end{aligned}}$$

(forma forte)

A força gravitacional obedece à forma FORTE da 3<sup>a</sup> Lei, a força eletromagnética obedece à forma FRACA, por exemplo.

## ② CENTRO DE MASSA

Um conceito importante para um sistema de partículas é o de centro de massa.



Se  $\vec{r}_\alpha$  são os vetores posição  
e  $m_\alpha$  as massas das  
partículas:

$$\boxed{\vec{R} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{M}}$$

$M$  é a  
massa total do sistema

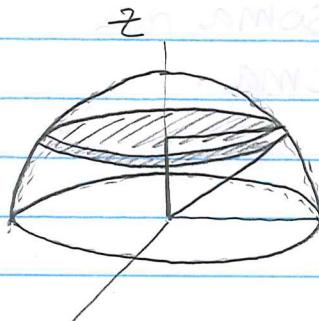
Para um objeto contínuo, usamos a versão integral:

$$\boxed{\vec{R} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm}$$

onde  $dm = \rho(\vec{r}) dV$ ,  $\rho(\vec{r})$  é a densidade e logo:

$$\boxed{M = \int \rho(\vec{r}) dV}$$

Exemplo 9.1º: centro de massa de um hemisfério de densidade constante e raio  $a$ .



$$z \sqrt{a^2 - z^2}$$

$$\bullet X_{cm} = \frac{1}{M} \int x dm = 0 \quad (\text{por simetria})$$

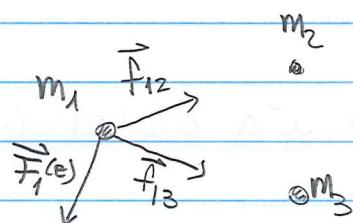
$$\bullet Y_{cm} = \frac{1}{M} \int y dm = 0$$

$$\bullet Z_{cm} = \frac{1}{M} \int z dm = \frac{1}{M} \int_0^a z \underbrace{\rho \pi (a^2 - z^2) dz}_{dm}, \quad \rho = \frac{M}{\frac{2}{3} \pi a^3}$$

$$\begin{aligned} Z_{cm} &= \frac{3}{2a^3} \int_0^a z (a^2 - z^2) dz \Rightarrow \boxed{Z_{cm} = \frac{3}{8} a} \\ &\quad \underbrace{\frac{a^4}{4}}_{\frac{a^4}{4}} \end{aligned}$$

## ○ MOMENTO LINEAR TOTAL

Siga um grupo de partículas que se move sob ação de forças EXTERNAS e das forças de interação INTERNAL



Atenção para a notação  
do livro:

$\vec{F}_{\alpha}^{(e)}$  é a força interna em  $\alpha$   
dividida a  $\beta$ .

$\vec{F}_{\alpha}^{(e)}$  é a força externa em  $\alpha$

O momento linear total é a soma dos momentos das partículas do sistema.

$$\boxed{\vec{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}}$$

Mais:

$$\vec{P} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \right) = \frac{d}{dt} (M \vec{R})$$

$$\boxed{\vec{P} = M \vec{v}}$$

O momentum linear total é o produto da massa total, pela velocidade do centro de massa!

Como esse momentum total varia com o tempo?

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \right) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{\alpha}$$

A força resultante  
em  $\alpha$ !

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{\alpha} \left( \vec{F}_{\alpha}^{(e)} + \sum_{\beta} \vec{f}_{\alpha\beta} \right)$$

Obs.: tu dariaia excluir da  $\sum_{\beta} \vec{f}_{\alpha\beta}$  a possibilidade de  $\beta = \alpha$ , mas vou admitir que  $\vec{f}_{\alpha\alpha} = 0$  por definição

No caso da  $\vec{f}_{\alpha\beta}$  obedecer a forma FRACA da 3<sup>a</sup> lei:

$$\vec{f}_{\alpha\beta} = -\vec{f}_{\beta\alpha} \Rightarrow \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \vec{f}_{\alpha\beta} = 0 !$$

a soma dupla se anula! Então:

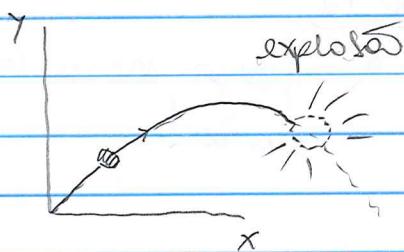
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{(e)}$$

ou

$$\vec{M}\ddot{\vec{R}} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{(e)}$$

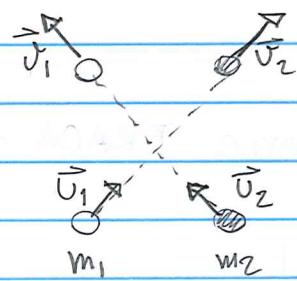
O momento total muda diante apenas às forças externas! Ou, o movimento do centro de massa é determinado exclusivamente pelas forças externas

Exemplo 1:



As partículas do projétil sofrem a força externa (piso) mais alguma força interna desconhecida. No momento da explosão as forças internas são mais intensas mas não alteram o movimento do CM.

Exemplo 2:

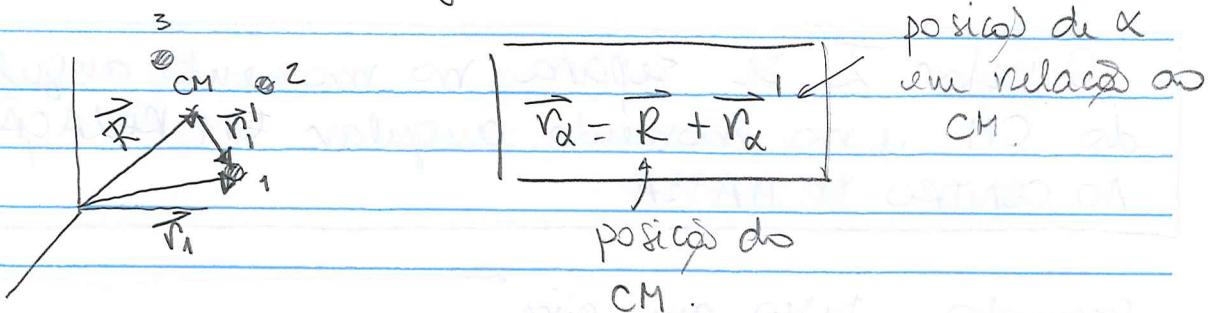


Em uma colisão de 2 partículas o momentum total antes e depois da colisão é o mesmo (se as partículas estiverem sob ação de força externas você deve considerar  $\vec{P}$  imediatamente antes e imediatamente depois, pois esta força externa faz  $\vec{P}$  mudar com o tempo)

$$\underbrace{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}_{\vec{P}_{antes}} = \underbrace{m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2}_{\vec{P}_{depois}}$$

## ◎ MOMENTO ANGULAR

O momento angular total em relação à origem pode ser escrito convenientemente usando a posição das partículas em relação aos centros de massa. Veja:



$$\vec{I} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times (m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}) \quad (\vec{I} = \vec{r} \times \vec{p})$$

$$= \sum_{\alpha} (\vec{R} + \vec{r}_{\alpha}^*) \times m_{\alpha} (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_{\alpha}^*)$$

$$= \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \right) \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* \right) \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^* \right) +$$

$$+ \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* \times \dot{\vec{r}}_{\alpha}^*$$

$$\text{Mas: } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha} m_{\alpha} = M \\ \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{R}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{R} = M \vec{R} - M \vec{R} = 0 \end{array} \right.$$

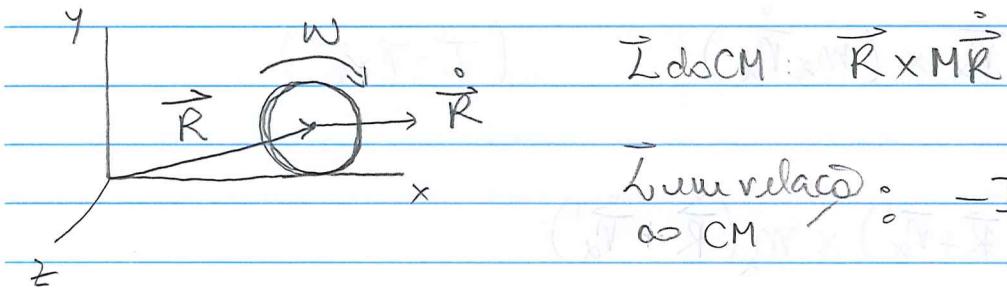
$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^* = \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* \right) = 0$$

Então:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{R} \times \dot{\vec{M}}\vec{R} + \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^{\perp} \times m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{\perp}}$$

O vetor  $\vec{L}$  se separa no momento angular do CM e no momento angular EM RELATIVO AO CENTRO DE MASSA

Exemplo: disco que gira



E como  $\vec{L}$  total varia com o tempo?

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^{\perp} \times m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{\perp} \right] =$$

$$= \sum_{\alpha} \underbrace{\vec{r}_{\alpha}^{\perp} \times m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{\perp}}_{\Rightarrow} + \sum_{\alpha} \underbrace{\vec{r}_{\alpha}^{\perp} \times m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{\alpha}^{\perp}}_{\text{força total na partícula } \alpha}$$

força total na partícula  $\alpha$ :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \left( \vec{F}_{\alpha}^{(e)} + \sum_{\beta} \vec{f}_{\alpha\beta} \right)$$

$$= \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{(e)} + \sum_{\alpha \beta} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha \beta}$$

to name organs  
externals

torque forces  
internal

Mas o torque total das forças internas se anula se tivermos a 3ª Lei na forma FORTE ( $\sum \tau_p = 0$  longo de  $\vec{r}_A - \vec{r}_B$ ). Veja?

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha\beta} = \sum_{\beta} \sum_{\alpha} \vec{r}_{\beta} \times \vec{f}_{\beta\alpha} \quad (\text{two ends of indices})$$

Entfernen:

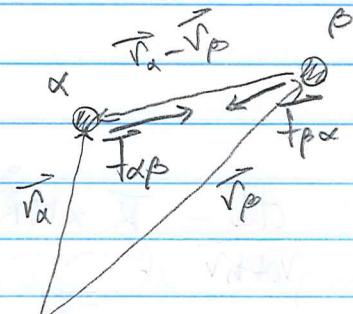
$$\vec{N}_i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (\vec{r}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha\beta} + \vec{r}_{\beta} \times \vec{f}_{\beta\alpha})$$

$\uparrow$   
torque interno

Usando que  $\vec{f}_{xp} = -\vec{f}_{px}$

$$\vec{N}_i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}) \times \vec{f}_{\alpha\beta}$$

= 0 se  $T_p$  for  
as longo de



Assim:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{(e)}}$$

O vetor  $\vec{L}$  só muda devido aos torques, em cada uma das partículas, causados pelas FORÇAS EXTERNAS.

Obs.: Compare com  $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{(e)}$ .

NA AUSÊNCIA DE FORÇAS EXTERNAS TANTO  $\vec{L}$  QUANTO  $\vec{P}$  SÃO CONSERVADOS.

O resultado acima diz como  $\vec{L}$  - MOMENTO ANGULAR TOTAL EM RELAÇÃO À ORIGEM - muda com o tempo. Podemos extrair da relação acima como  $\vec{L}_{CM}$  - O MOMENTO ANGULAR TOTAL EM RELAÇÃO AO CENTRO DE MASSA - muda com o tempo.

$$\vec{L} = \vec{R} \times \dot{\vec{M}\vec{R}} + \underbrace{\sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^1 \times m_{\alpha} \dot{\vec{r}_{\alpha}^1}}_{\vec{L}_{CM}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\vec{R} \times \ddot{\vec{M}\vec{R}}}_{=0} + \underbrace{\vec{R} \times \ddot{\vec{M}\vec{R}}}_{\sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{(e)}} + \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{R} \times \left( \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{(e)} \right) + \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{(e)}$$

↑ resultado  
da pagina  
anterior.

Então:

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{R}) \times \vec{F}_{\alpha}^{(e)}$$

$\vec{r}_{\alpha}^l$

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^l \times \vec{F}_{\alpha}^{(e)}$$

O momento angular em relação ao centro de massa muda de acordo com o torque das forças externas MEDIDO NO PRÓPRIO CM!

Este resultado é particularmente útil quando as forças externas são devidas ao peso das massas:

$$\vec{F}_{\alpha}^{(e)} = m_{\alpha} \vec{g}$$

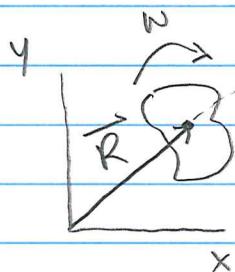
$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^l \times m_{\alpha} \vec{g} = \underbrace{\left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^l \right)}_{=0} \times \vec{g} = 0 !$$

como vimos  
anteriormente

1 /

A gravidade não pode alterar  $\vec{\omega}_{CM}$ , o momento angular é in relaçāo ao CM.

Exemplo: Corpo rígido sob ação da  $\vec{f}_g$



trajetória do CM

trajetória do CM:  $M\ddot{R} = M\vec{g} \rightarrow$  parábola

rotação em torno do CM:  $\frac{d\vec{\omega}_{CM}}{dt} = 0 \rightarrow$  giro com  $\omega$  constante

## ● ENERGIA TOTAL

Primeiro vamos exprimir a energia cinética total de um modo conveniente

$$T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2$$

onde  $\vec{v}_{\alpha}$  é a velocidade da partícula  $\alpha$  EM RELAÇÃO À ORIGEM DO SISTEMA FIXO (INERCIAL)

Usando a posição do CM:

$$\vec{r}_x = \vec{R} + \vec{v}_x^1 \Rightarrow \vec{v}_x = \overset{\circ}{\vec{R}} + \vec{v}_x^1$$

onde  $\vec{v}_x^1$  é a velocidade de  $x$  em relação ao CM.  
Assim:

$$T = \sum_x \frac{1}{2} m_x (\overset{\circ}{\vec{R}} + \vec{v}_x^1)^2$$

$$= \sum_x \frac{1}{2} m_x \overset{\circ}{\vec{R}}^2 + \sum_x \frac{1}{2} m_x \vec{v}_x^1^2 + \sum_x m_x \overset{\circ}{\vec{R}} \cdot \vec{v}_x^1$$

O último termo é nulo como vimos anteriormente:

$$\sum_x m_x \vec{v}_x^1 = 0 \Rightarrow \sum_x m_x \vec{v}_x^1 = 0$$

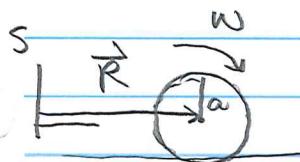
Então:

$$T = \frac{1}{2} M \overset{\circ}{\vec{R}}^2 + \sum_x \frac{1}{2} m_x \vec{v}_x^1^2$$

T<sub>CM</sub>

A ENERGIA CINÉTICA TOTAL É A SOMA DA ENERGIA CINÉTICA DO CM COM A ENERGIA CINÉTICA DO SISTEMA NO REFERENCIAL DO CM, T<sub>CM</sub>.

Exemplo: disco de massa M, raio r, velocidade angular w, rodando sem deslizar:



energia cinética do CM:  $\frac{1}{2} M (rw)^2$ ,  $r = rw$ !

energia cinética no CM:  $\frac{1}{2} I w^2$

**tilibra**

11

Agora vou supor que tanto as forças externas como as internas são conservativas.

$$\boxed{\vec{F}^{(e)} = -\nabla U}, \text{ a função } U(\vec{r}) \text{ é a energia potencial associada à força externa } \vec{F}^{(e)}.$$

Estamos supondo que todas as partículas experimental uma  $\vec{F}^{(e)}$  de mesma natureza. A diferença das forças em cada partícula é devida ao diferente posicionamento delas.

$$\boxed{\vec{F}_\alpha^{(e)} = -\nabla_\alpha U_\alpha}$$

Isso quer dizer "cada força  $\vec{F}_\alpha$  é a derivada da energia potencial  $U_\alpha$  no lugar da  $\vec{r}_\alpha$ "

Podemos então definir a energia potencial externa total

$$\boxed{U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \sum_\alpha U_\alpha(\vec{r}_\alpha)}$$

Vamos supor que a força de interação entre as partículas  $\alpha$  e  $\beta$  também é derivada de uma energia potencial. A diferença é que essa energia potencial será função tanto de  $\vec{r}_\alpha$  como de  $\vec{r}_\beta$ .

$$\vec{f}_{\alpha\beta} = -\vec{\nabla}_\alpha \bar{U}(\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta) \quad (\text{força em } \alpha \text{ dirigida a } \beta)$$

$$\vec{f}_{\beta\alpha} = -\vec{\nabla}_\beta \bar{U}(\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta) \quad (\text{força em } \beta \text{ dirigida a } \alpha)$$

Caso  $\bar{U}(\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta)$  só dependa da distância  $|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|$   
obtemos a forma FORTE da 3<sup>a</sup> lei:

$$\vec{f}_{\alpha\beta} = -\vec{f}_{\beta\alpha}$$

$\vec{f}_{\alpha\beta}$  e  $\vec{f}_{\beta\alpha}$  as longo de  $(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)$

Definimos a energia potencial interna (ou de interação) total

$$\boxed{\bar{U}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \bar{U}(\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta)}$$

onde não incluímos termos como  $\bar{U}(\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\alpha)$  e o fator  $\frac{1}{2}$   
é para contar cada par de partículas uma única vez. No livro, a definição é:

$$\bar{U}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta > \alpha} \bar{U}(\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta) \quad \text{o que daria mesmo!}$$

Agora mostramos só que  $T + U + \bar{U}$  é  
uma constante. Como para qualquer constante  
de movimento, isso é verificado a partir das  
equações de Newton:

1 / 1

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = \vec{F}_a + \sum_{\beta \neq a} \vec{f}_{ap} + \vec{N}_a$$

$\underbrace{\quad}_{\text{forças conservativas}}$

força externa não derivada de potencial

E calculo:  $\frac{d}{dt} (T + U + \bar{U}) :$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{d}{dt} T &= \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \dot{\vec{v}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot (m_{\alpha} \dot{\vec{v}}_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot (\vec{F}_{\alpha} + \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{f}_{ap} + \vec{N}_{\alpha}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \frac{d}{dt} U &= \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} U(\vec{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} U(\vec{r}_{\alpha}) \cdot \dot{\vec{r}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \underbrace{\vec{v}_{\alpha} U(\vec{r}_{\alpha})}_{-\vec{F}_{\alpha}} \\ &= - \sum_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{F}_{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \frac{d}{dt} \bar{U} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \bar{U}(\vec{r}_{\alpha}, \vec{r}_{\beta}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} [\vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\beta} \bar{U}(\vec{r}_{\alpha}, \vec{r}_{\beta}) + \\ &\quad + \vec{v}_{\beta} \cdot \vec{v}_{\alpha} \bar{U}(\vec{r}_{\alpha}, \vec{r}_{\beta})] \end{aligned}$$

como os índices da soma podem ser trocados, os dois termos são iguais

$$\frac{d}{dt} \bar{U} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\beta} \bar{U}(\vec{r}_{\alpha}, \vec{r}_{\beta}) = - \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{f}_{ap}$$

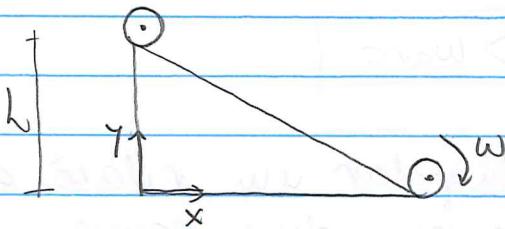
Assim:

$$\frac{d(T + U + \bar{U})}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha}$$

Isto é zero se as forças não conservativas não realizam trabalho!  
 $\vec{N}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha} = 0$ !

A energia total conservada inclui a energia cinética de cada partícula, a energia potencial externa de cada partícula e a energia potencial de interação de cada PAR DE PARTÍCULAS.

Exemplo: Disco de massa  $M$  e raio  $a$  rola sem deslizar em uma rampa. Qual o valor de  $w$ ?



\* em problemas envolvendo corpos rígidos a energia potencial de interação permanece inalterada e pode ser ignorada (partículas guardam distância constante)

Temos o peso das partículas e a força de contato como força externa. Esta última não realiza trabalho na condições de rolagem sem deslizamento.

$$T_i = 0; U_i = \sum_{\alpha} m_{\alpha} g y_{\alpha} = Mg h$$

altura do CM

$$T_f = \frac{1}{2} M(aw)^2 + \frac{1}{2} Iw^2 = \frac{3}{4} Ma^2 w^2; U_f = 0$$

$\frac{1}{2} Ma^2$

$$T + U = \text{const.} \Rightarrow \frac{5}{4} Ma^2 \omega^2 = Mgh \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{gh}{a^2}}$$

Obs.: Se, ao invés de um disco, você finesse:

- um anjo de vazio a massa M:  $I = Ma^2$

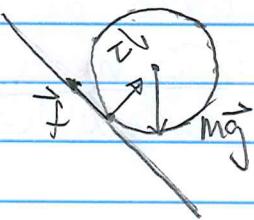
$$T_f = \frac{1}{2} Ma^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = Ma^2 \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{gh}{a^2}}$$

- uma esfera de vazio a massa M:  $I = \frac{2}{5} Ma^2$

$$T_f = \frac{1}{2} Ma^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{7}{10} Ma^2 \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{10}{7} \frac{gh}{a^2}}$$

$$\boxed{\omega_{\text{ef}} > \omega_{\text{disco}} > \omega_{\text{ano}}}$$

Obs. 2: Como o momento angular é um vetor no CM nuda isso implica que deve haver TORQUE das forças externas MEDIDO NO CM.



As forças externas são os pesos das partículas (que não exercem torque no referencial do CM),  $\vec{N}$  que também não exerce torque no CM e  $\vec{f}$  que exerce torque.

$\Rightarrow$  a força de contato deve ter componente **tilibra** ao longo da rampa!

$$\frac{dLcm}{dt} = f_a$$

raio do disco

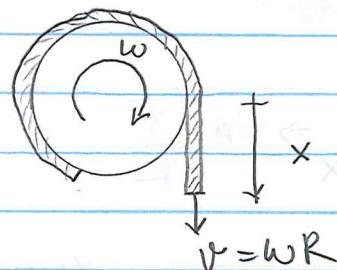
No entanto, nem  $\vec{N}$  nem  $\vec{f}$  realizam trabalho pois eles atuam em uma parte do disco em repouso (as condições de rolagem sem deslizamento)

Exemplo 9.5) anel de massa  $M$  e raio  $R$  e corda de massa  $m$  e densidade  $\rho$ .

(situação inicial)



(situação final)



encontrar a velocidade angular do anel quando o pedaço de corda descolado mede  $x$ .

Vamos supor que a única força que realiza trabalho é o peso e que a energia potencial interna permanece constante. Assim:

$$T + U = \text{constante}$$

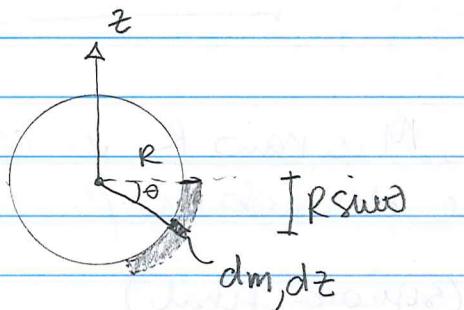
$$T_i = 0$$

$$U_i = \sum_{\alpha} m_{\alpha} g z_{\alpha} = 0$$

$$T_f = \underbrace{\frac{1}{2} M R^2 \omega^2}_{\text{ans}} + \underbrace{\frac{1}{2} m R^2 \omega^2}_{\text{conde}}$$

$$\boxed{T_f = \frac{1}{2} (M+m) R^2 \omega^2}$$

O cálculo da  $U_f$  deve ser feito em partes:



$$U = \int dm g z$$

$\downarrow$

$$pdz$$

$$-R \sin \theta$$

$$\bullet dz = R d\theta$$

$$U = -\rho g R \int_0^{x_m} \sin \theta dz$$

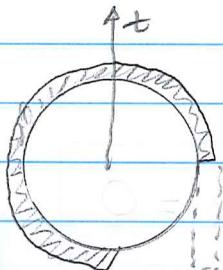
$$\bullet \frac{x_m}{R} \Rightarrow \theta_m = \frac{x}{R}$$

$$U = -\rho g R^2 \int_0^{x_m} \sin \theta d\theta$$

$$U = \rho g R^2 \cos \theta \Big|_0^{x/R} \Rightarrow$$

$$\boxed{U = \rho g R^2 (\cos x/R - 1)}$$

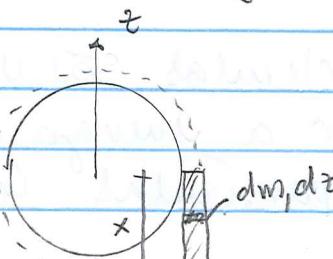
Então, a energia potencial do pedaço de conde que ainda está enrolado é:



$$\boxed{U_i = \rho g R^2 (1 - \cos x/R)}$$

(você sabe porquê?)

E, o pedago desenvolado:



$$U_2 = - \int dm g z = - \rho g \int_{-R}^R z dz$$

$$\boxed{U_2 = - \frac{\rho g x^2}{2}}$$

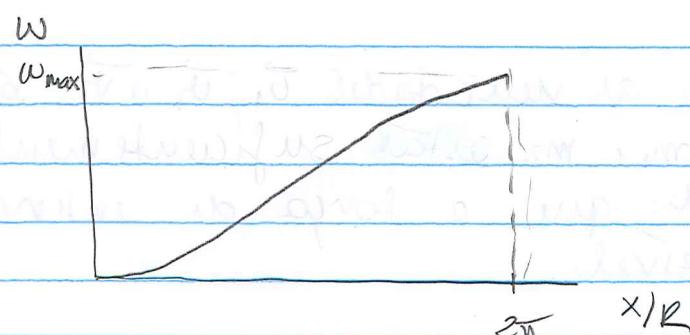
Desta forma:

$$\boxed{U_F = \rho g R^2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{x}{R}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R}\right)^2 \right]}$$

Como  $T_i + U_i = T_f + U_f$

$$\frac{1}{2} (M+m) R^2 \omega^2 = - \rho g R^2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{x}{R}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R}\right)^2 \right]$$

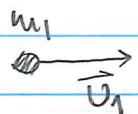
$$\boxed{\omega^2 = \frac{2 \rho g}{M+m} \left[ \cos\left(\frac{x}{R}\right) + \frac{\left(\frac{x}{R}\right)^2}{2} - 1 \right]}$$



$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{2\pi mg}{R(M+m)}}, \text{ onde temos } \rho = \frac{m}{2\pi R}$$

## COLISÕES ELÁSTICAS

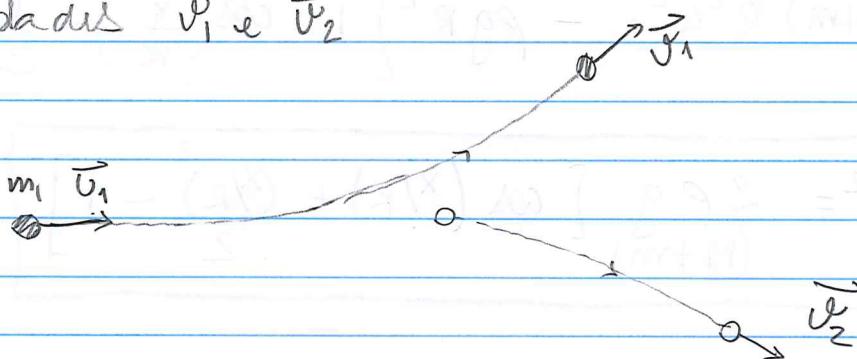
Colisões entre pares de partículas são usadas frequentemente para determinar a energia potencial de interação entre partículas. Como isso é feito?



$m_2$

$m_1$  é lançada com velocidade  $\vec{v}_1$  em direção a  $m_2$  em repouso no sistema de referência do laboratório (suposto inercial).

Após a interação,  $m_1$  e  $m_2$  se movem com velocidades  $\vec{v}_1'$  e  $\vec{v}_2'$ .



Todas as velocidades  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_1'$  e  $\vec{v}_2$  são medidas quando  $m_1$  e  $m_2$  estão suficientemente afastados de modo que a força de interação já é desprezível.

Do ponto de vista da mecânica, se você conhece  $U(r)$ , o potencial de interação, a situação final é totalmente determinada pelas condições iniciais fornecidas:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\vec{\nabla}_1 U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{\nabla}_2 U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{força de interação é} \\ \text{central (é a lei} \\ \text{verso a} \\ \text{força)} \end{array}$$

Temos 6 EDO's de 2º orden que são resolvidas usando as 12 condições iniciais.

$$\left\{ \vec{r}_1(0), \dot{\vec{r}}_1(0), \vec{r}_2(0), \dot{\vec{r}}_2(0) \right\}$$

Em particular, conseguimos obter

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(+\infty) \quad \text{e} \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_2(+\infty), \quad \text{as}$$

Velocidades assintóticas das partículas.

Na prática ninguém resolve as equações dessa forma. Usamos a coordenada do CM e a coordenada relativa

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

como vimos no capítulo de força central. E, as equações para  $\vec{R}(t)$  e  $\vec{r}(t)$  são:

$$\ddot{M}\vec{R}(t) = 0$$

$$\mu \ddot{\vec{r}}(t) = -\vec{\nabla}U(r)$$

O centro de massa se move com velocidade constante igual a

$$\overset{\circ}{\vec{R}} = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$

(da condição inicial)

O problema da  $\vec{r}(t)$  é um problema de força central, a forma da órbita de  $\mu$  é totalmente conhecida sabendo-se  $E$  e  $l$ .

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + U(r)$$

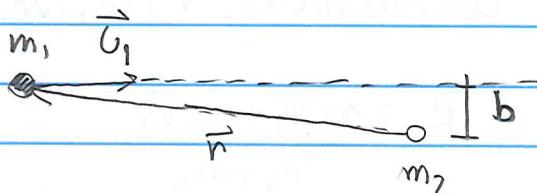
$$l = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}|$$

Note que  $\dot{\vec{r}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$  é a velocidade de  $m_1$  relativa a  $m_2$ . Da situação inicial, temos:

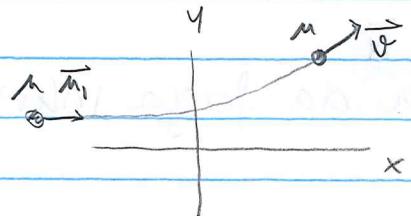
$$E = \frac{1}{2} \mu \vec{v}_1^2$$

$$l = \mu v_1 b$$

parâmetros  
de  
impacto



1) Com  $E$  e  $\ell$  determinados e  $V(r)$  conhecido  
podemos determinar a órbita de  $\mu$ !



2) Com  $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$  determinado e com o momentum total permanecendo constante, encontra-se  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \\ m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \end{array} \right\}$$

## USO DAS LEIS DE CONSERVAÇÃO

As leis de conservação que acabamos de ver podem ser usadas no problema da colisão de 2 partículas onde apenas uma força interna conservativa e cuja ésta presente.

A ausência de forças externas garante

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad (\text{momentum total})$$

A ausência de forças externas e a natureza cuja da força interna garante

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad (\text{momento angular total})$$

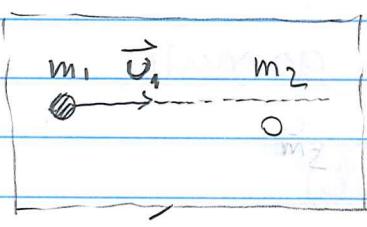
A natureza conservativa da força interna garante

$$E = \frac{1}{2} m_1 \vec{V}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{V}_2^2 + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \text{constante}$$

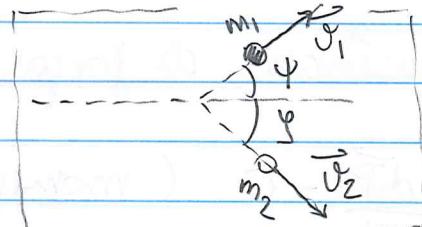
Obs.: Isso corresponde a uma colisão ELÁSTICA. A situação INELÁSTICA será discutida em seguida.

Na situação real só temos informações sobre  $\vec{v}_1$ , a velocidade inicial de  $m_1$ , não há como saber os parâmetros de impacto b' u portanto a conservação de  $\vec{L}$  não pode ser usada

Obs.: Na verdade a conservação da DIREÇÃO de  $\vec{L}$  é usada para garantir que o movimento de  $m_1$  e  $m_2$  se dá em um plano.



início



final

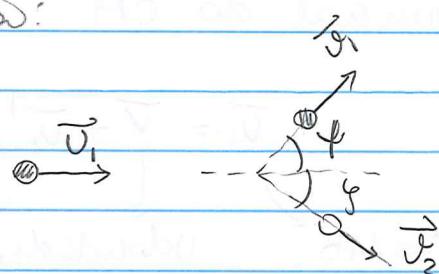
$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \quad (\vec{P} \text{ constante}) \\ \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2'^2 \quad (E \text{ constante}) \end{array} \right.$$

Claramente essas 3 equações não podem determinar  $\vec{V}_1$  e  $\vec{V}_2$  (que são 4 incógnitas). Apesar de alguma informação adicional acerca de  $\vec{V}_1$  ou  $\vec{V}_2$  for dada é possível determinar as outras incógnitas.

Exemplo:  $m_1 = m_2$  e a direção de  $\vec{V}_1$  ( $\varphi$ ) é conhecida.

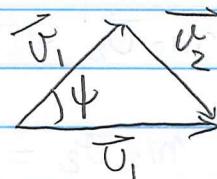
As equações são, então:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_1 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \\ V_1^2 = V_1^2 + V_2^2 \end{array} \right.$$



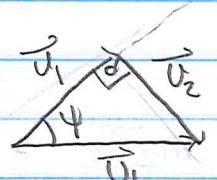
Você poderia ir em frente e resolver o sistema de equações e encontrar  $|V_1|$ ,  $|V_2|$  e  $\theta$ . No entanto, nesse exemplo é vantoso usar um método geométrico:

De  $\vec{V}_1 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \rightarrow$



(triângulo!)

De  $V_1^2 = V_1^2 + V_2^2 \rightarrow$



(triângulo retângulo!)

Então:

$$V_1 = V_1 \cos \varphi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$$

$$V_2 = V_1 \sin \varphi$$

## O REFERENCIAL DO CENTRO DE MASSA

A análise do problema de espatilamento (elástico) no referencial do CM é muito comum. A vantagem está em que a equação de conservação do momento total já fica incorporada automaticamente.

- 1) As velocidades de  $m_1$  e  $m_2$  são medidas no referencial do CM

$$\vec{U}_1 = \vec{V} + \vec{U}_1' \rightarrow \text{velocidade em relações ao CM}$$

↓

$\vec{U}_1'$  - Velocidade  
no LAB

$\vec{U}_1'$  - Velocidade  
do CM

- 2) No referencial do CM, o momentum total é nulo tanto antes como depois da colisão

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0$$

$$\{ m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = 0 \}$$

$$\overrightarrow{MV} = m_1 \overrightarrow{V_1} + m_2 \overrightarrow{V_2} =$$

$$= m_1 (\vec{v} + \vec{v}_1') + m_2 (\vec{v} + \vec{v}_2') =$$

$$= \overrightarrow{MV} + m_1 \overrightarrow{V_1} + m_2 \overrightarrow{V_2}$$

- 9 -

3) Isso implica que as velocidades das partículas antes e depois da colisão (no referencial do CM) devem ser opostas:

LABORATÓRIO ANTES



$$\boxed{\bar{V} = \frac{m_1 \bar{v}_1}{M}} \quad (\text{CM})$$

CM ANTES



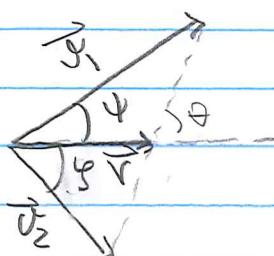
$$\bar{v}_1' = \bar{v}_1 - \bar{V}$$

$$\Rightarrow \bar{v}_1' = \bar{v}_1 - \bar{v}$$

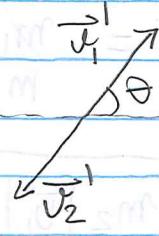
$$\boxed{\bar{v}_1' = \frac{m_2 \bar{v}_1}{M}}$$

$$\bar{v}_2' = \bar{v}_2 - \bar{V} \Rightarrow \boxed{\bar{v}_2' = -\frac{m_1 \bar{v}_1}{M}}$$

LABORATÓRIO DEPOIS



CM DEPOIS



$$\boxed{\bar{v}_2' = -\frac{m_1 \bar{v}_1}{M}}$$

No referencial do CM só temos 2 incógnitas (as componentes de  $\bar{v}_1'$ ). O problema é que só temos a equação da energia para usar!

A energia cinética (tanto antes como depois) pode ser escrita como:

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = \frac{1}{2}\vec{M}\vec{V}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m_1\vec{u}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{u}_2^2}_{T_{CM}}$$

Entonces, la conservación de energía física:

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{MV}^2 + \frac{1}{2} m_1 \overrightarrow{U_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \overrightarrow{U_2}^2 = \frac{1}{2} \overrightarrow{MV}^2 + \frac{1}{2} m_1 \overrightarrow{V_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \overrightarrow{V_2}^2$$

Substituindo as expressões para  $\vec{v}_1^1$ ,  $\vec{v}_2^1$  e  $\vec{v}_3^1$ :

$$\frac{1}{2} m_1 \left( \frac{m_2}{M} \vec{v}_1 \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( -\frac{m_1}{M} \vec{v}_1 \right)^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( -\frac{m_1}{m_2} \vec{v}_1 \right)^2$$

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m^2} (m_1 + m_2) v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) v_1'^2$$

$$\frac{m_1 m_2}{M} u_1^2 = \frac{m_1}{m_2} M u_1'^2$$

$$|\vec{v}_1'| = \frac{m_2}{M} |\vec{u}_1|$$

Veja que conseguimos encontrar  $\vec{v}_1$  mas não somos capazes de encontrar sua direção ( $\text{ângulo } \theta$ )

Em geral, a informação extra sobre a situação final vem sob a forma dos ângulos e de espalhamento da  $m$ , no LAB.

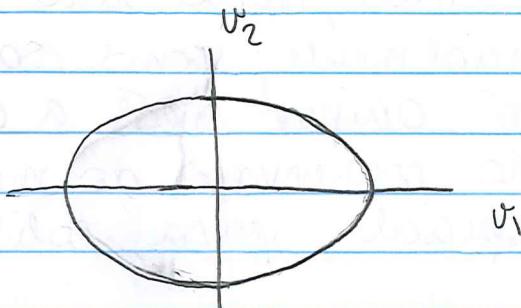
## ④ COLISÕES ELÁSTICAS E ESPAÇO DE FASE

A conservação da energia total em colisões elásticas nos diz que:

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \text{constante}$$

No espaço de fase  $\theta_1 \times \theta_2$ , isso corresponde a uma elipse:

$$\frac{v_1^2}{2E/m_1} + \frac{v_2^2}{2E/m_2} = 1$$

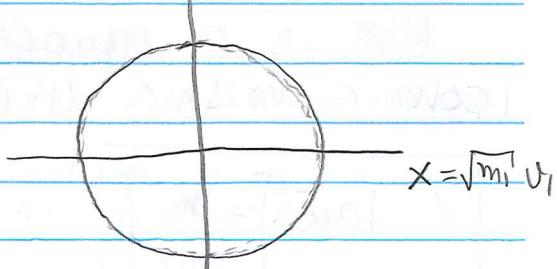


Ou, se você quiser, utilize as variáveis modificadas abaixo e o espaço de fase se torna uma circunferência:

$$x = \sqrt{m_1} v_1, \quad y = \sqrt{m_2} v_2$$

$$y = \sqrt{m_2} v_2$$

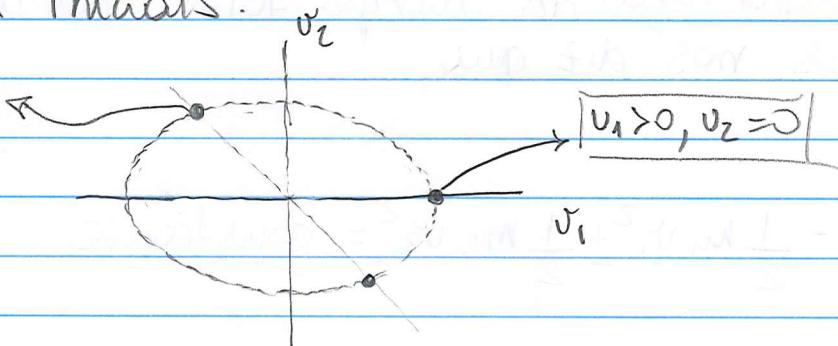
$$x^2 + y^2 = 2E$$



1 / 1

Antes da colisão, o sistema ocupa um ponto em cima da elipse/circunferência, dada pelas condições iniciais.

$$[v_1 = -v_2]$$



$$[v_1 > 0, v_2 = 0]$$

Então, dado um ponto que o sistema ocupa inicialmente, como saber qual ponto o sistema irá ocupar após a colisão? Vou obter isso da conservação do momento linear total. Em especial, para colisões em uma dimensão:

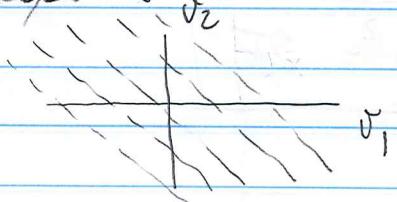
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{constante}$$

essa constante depende das condições iniciais.

$$[v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1 + \text{constante}]$$

Isso é a equação de um conjunto de retas com a mesma inclinação  $\alpha$ :

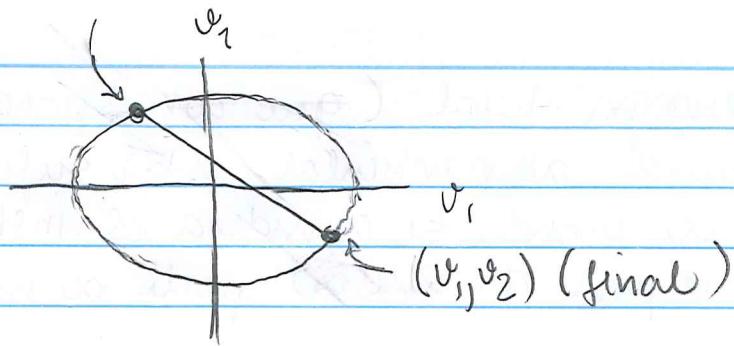
$$[\alpha = \tan^{-1} \left[ -\frac{m_1}{m_2} \right]]$$



e que deve passar pelos pontos que o sistema ocupa inicialmente (ajustado pela constante!).

$(v_1, v_2)$  (initial)

1 /



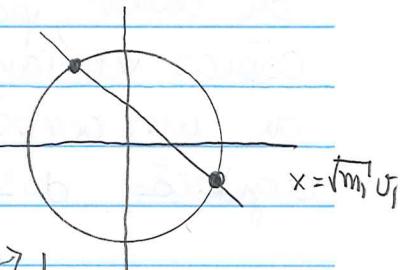
Ou então, se você está trabalhando no espaço de fases da circunferência:

$$x = \sqrt{m_1} v_1, \quad y = \sqrt{m_2} v_2$$

$$y = \sqrt{m_2} v_2$$

$$y = -\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} x + \text{constante}$$

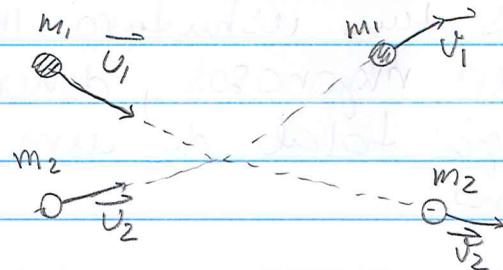
Inclinação da reta!



Obs.: Veja nos anexos do curso como você pode calcular os dígitos de  $\pi$  utilizando colisões elásticas!

## COLISÕES INELÁSTICAS

O momentum linear total é sempre conservado em uma colisão (como antes, mas vamos incluir forças externas no problema)



$$\boxed{m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}$$

(Colisão) (Expo)

Mas a energia total (que corresponde à energia cinética quando as partículas estão suficientemente afastadas ou quando se considera os instantes justamente antes e depois da colisão) pode ou não ser conservada.

A energia total pode não ser conservada quando as partículas  $m_1$  e  $m_2$  têm graus de liberdade internos capazes de absorver energia (sob forma de calor, por exemplo). Em um tratamento microscópico veríamos que o aumento de temperatura de um corpo após uma colisão corresponde à agitação dos átomos e moléculas que o constituem.

Exemplo:

$$m_1 \xrightarrow{v_1} \quad \xleftarrow{v_2} m_2 \quad E_i = m v^2$$

$$E_F = 0$$

(moleculas vibrando  
após colisão)

É o aumento da energia interna de vibrações atômica/molcular que se verifica exatamente a energia cinética de translação desaparecida.

Como os corpos têm estrutura interna, se quiséssemos ser rigorosos, deveríamos calcular a energia total de um corpo de massa  $M$  como:



$$E = \frac{1}{2} M V^2 + \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 + U_{int}$$

energia potencial de interações moleculares

energia cinética do CM      energia cinética no CM

Nos problemas de colisão só lidamos com o 1º termo, mas o 2º e 3º, que compõem a "energia interna" € podem mudar de valor em uma colisão.

Devemos escrever para a colisão de 2 massa  $m_1$  e  $m_2$ :

$$\left( \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \epsilon_{1i} \right) + \left( \frac{1}{2} m_2 u_2^2 + \epsilon_{2i} \right) = \left( \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \epsilon_{1f} \right) + \left( \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \epsilon_{2f} \right)$$

$$\boxed{\underbrace{(\epsilon_{1i} + \epsilon_{2i}) - (\epsilon_{1f} + \epsilon_{2f})}_{Q} + \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}$$

Se:  $Q = 0$  temos uma colisão ELÁSTICA

$Q > 0$  temos uma colisão EXOTÉRICA

$Q < 0$  temos uma colisão ENDOTÉRICA

Vamos analisar o problema clássico do espalhamento com  $\Theta \neq 0$

$$m_1 \vec{v}_1 \quad m_2 \quad 0$$

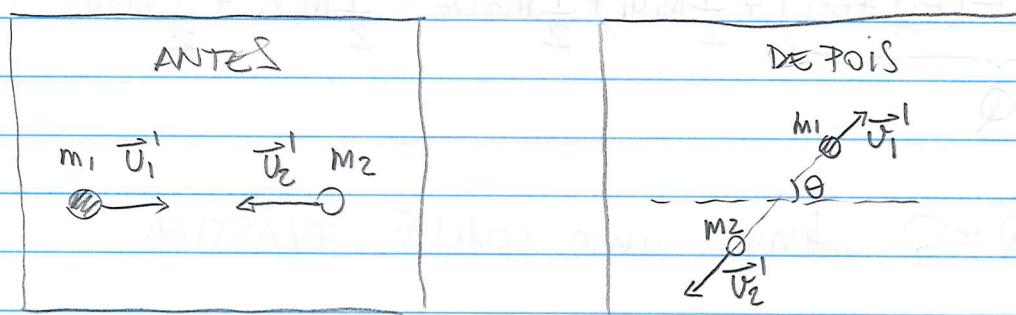
$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}_1}{M}$$

• Usamos o referencial do CM para incorporar a conservação de  $\vec{P}$ :

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{V} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_1' = \frac{m_2}{M} \vec{v}_1}$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{V} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_2' = -\frac{m_1}{M} \vec{v}_1}$$

$$m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_2' = -\frac{m_1}{m_2} \vec{v}_1'}$$



Utilizando a equação da energia:

$$\Theta + \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

obtemos  $|\vec{v}_1'|$ :

$$Q + \frac{1}{2} m_1 \left( \frac{m_2 \vec{U}_1}{M} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( -\frac{m_1 \vec{U}_1}{M} \right)^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( -\frac{m_1}{m_2} \vec{U}_1 \right)^2$$

$$2Q + \frac{m_1 m_2}{M} U_1^2 = \frac{m_1 M}{m_2} v_1^2$$

$$\boxed{|\vec{U}_1| = \sqrt{\frac{2m_2 Q + \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 U_1^2}{m_1 M}}} \quad \begin{array}{l} \text{compara com} \\ \text{o caso } Q=0 \\ (\text{colisão elástica}) \end{array}$$

Com  $|\vec{U}_1|$  determinado só precisamos dos ângulos  $\theta$ , que pode ser conhecido se a informação sobre o ângulo de deslocamento  $\psi$  da partícula  $m_1$  no referencial do laboratório.

## MOVIMENTO DE FOGUETE

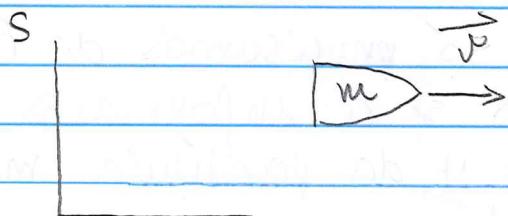
A impulso de um foguete se dá através da exaustão de gases a uma alta velocidade e é um sistema interessante de se aplicar o que já sabemos sobre sistemas de partículas.

Vamos analisar o movimento de foguetes em 2 casos: (i) sem ação de forças externas (explosão lenta), e (ii) um alcance vertical sob ação do campo gravitacional constante.

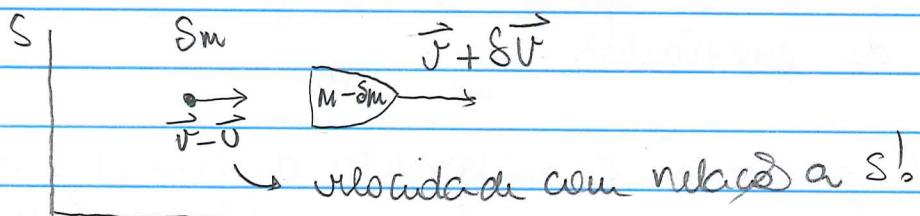
## Movimento no espaço livre

Aqui, assumimos ausência de forças externas. A mudança de velocidade do foguete se dá apenas por forças internas, da reação à exaustão de gases.

Então, suponha que um foguete de massa  $m$  se move com velocidade  $\vec{v}$  com relação a um referencial terrestre.



Suponha que, durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ , o foguete expelle uma massa  $\delta m$  com velocidade  $-\vec{v}$  (com relação a ele mesmo!), ganhando uma velocidade  $\Delta \vec{v}$ :



Então, o momentum linear total em dois instantes de tempo:

$$\boxed{\vec{P}(t) = m\vec{v}}$$

$$\vec{P}(t + \delta t) = (m - \delta m)(\vec{v} + \delta \vec{v}) + \delta m (\vec{v} - \vec{v})$$

$$\boxed{\vec{P}(t + \delta t) = m\vec{v} + m\delta \vec{v} - \vec{v}\delta m - \delta m \delta \vec{v}}$$

Com, na ausência de forças externas, o momento linear total é conservado e desconsiderando o termo  $\delta m \delta \vec{v}$  (pequeno!)

$$\vec{P}(t) = \vec{P}(t + \delta t)$$

$$m\vec{v} = m\vec{v} + m\delta \vec{v} - \vec{v}\delta m$$

$$\delta \vec{v} = \vec{v} \frac{\delta m}{m}$$

Tomando o limite com  $\delta t \rightarrow 0$  e integrando em limites correspondentes:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v}' = \vec{v} \int_{m_0}^m \frac{dm'}{m} \Rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{v} \ln \frac{m}{m_0}$$

Ainsi :

$$\boxed{\Delta \vec{v} = \vec{v} \ln \frac{m}{m_0}}$$

Obs. 1: Como  $m$  (massa final) <  $m_0$  (massa inicial), é comum escrever:

$$\boxed{\Delta \vec{V} = -\vec{G} \ln \frac{m_0}{m}}$$

$\Delta \vec{V}$  ocorre no sentido contrário à exaustão

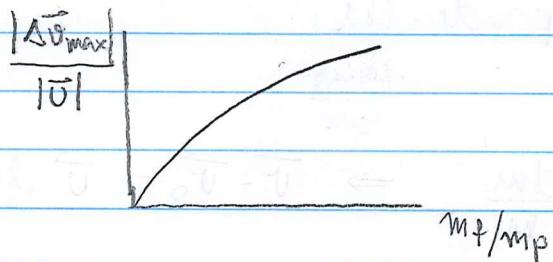
velocidade de exaustão

Obs. 2: Em geral se distingue a massa de combustível (responsável pela exaustão) e a massa da carga (payload - que deve ser sempre carregada pelo foguete). Além podemos calcular o  $\Delta \vec{V}$  máximo de um foguete:

$$m_0 = m_p + m_f, \quad m = m_p$$

$\left\{ \begin{array}{l} p \rightarrow \text{payload} \\ f \rightarrow \text{fuel} \end{array} \right.$

$$\boxed{\Delta \vec{V}_{\max} = -\vec{G} \ln \left( 1 + \frac{m_f}{m_p} \right)}$$



Obs. 3: No capítulo de força aérea calculamos o  $|\Delta \vec{V}|$  total da transferência Hohmann. Aquela  $|\Delta \vec{V}|$  corresponde a este do foguete! De fato,  $|\Delta \vec{V}|$  é a quantidade física mais importante da dinâmica de foguetes.

Obl. 4: Em engenharia aerosespacial, a velocidade de exaustão  $\bar{V}$  é geralmente descrita pelo IMPULSO ESPECÍFICO -  $I_{sp}$ , tal que

$$|\bar{V}| = I_{sp} \times g_0 \quad , \quad g_0 \rightarrow \text{aceleração gravitacional padrão.}$$

Então  $I_{sp}$  tem dimensão de tempo.

Exemplos:

• motor NK-33 (primeiro estágio da Soyuz-2)

$$I_{sp} \approx 300 \text{ s} \Rightarrow |\bar{V}| \approx 3000 \text{ m/s}$$

• motor RS-25 (3º motor do ônibus espacial)

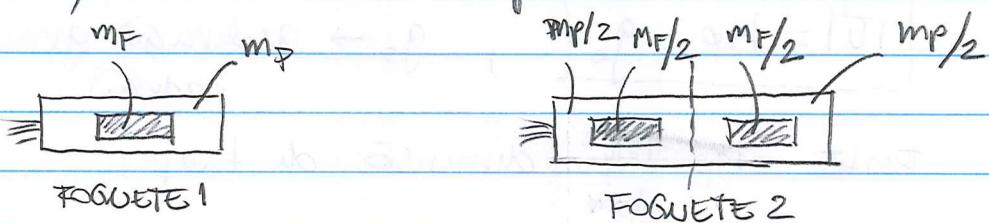
$$I_{sp} \approx 400 \text{ s} \Rightarrow |\bar{V}| \approx 4000 \text{ m/s}$$

↳ Foguetes com estágios

Em geral, foguetes costumam ter estágios: descartando-se uma parte do foguete após todos os combustíveis desse estágio serem consumidos.

Claramente, isso deve ser favorável, uma vez que há menos massa para transportar durante o percurso total.

Vamos comparar 2 casos: (i) um foguete de massa de combustível  $m_F$  e massa de carga  $m_p$  com apenas 1 estágio e (ii) foguete de mesma massa, mas com 2 estágios idênticos.



► Para foguete 1:  $m_0 = m_F + m_p$ ,  $m = m_p$

$$\frac{\Delta v_{max}}{v} = \ln \left( 1 + \frac{m_F}{m_p} \right)$$

► Para foguete 2: 1º estágio:  $m_0 = m_F + m_p$ ,  $m = m_p + m_F/2$

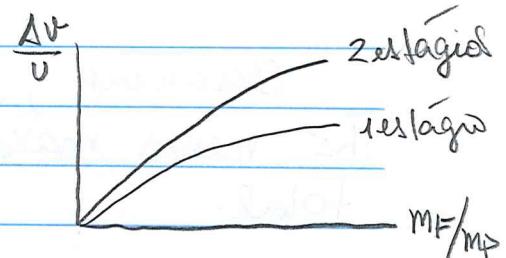
$$\frac{\Delta v_{1,max}}{v} = \ln \left( \frac{m_F + m_p}{m_p + m_F/2} \right) = \ln \left( \frac{1 + m_F/m_p}{1 + m_F/2m_p} \right)$$

$$2º \text{ estágio: } m_0 = \frac{m_p}{2} + \frac{m_F}{2}, \quad m = \frac{m_p}{2}$$

$$\frac{\Delta v_{2,max}}{v} = \ln \left( \frac{\frac{m_p + m_F}{2}}{\frac{m_p}{2}} \right) = \ln \left( 1 + \frac{m_F}{m_p} \right)$$

$$\text{Então: } \frac{\Delta v_{max}}{v} = \frac{\Delta v_{1,max}}{v} + \frac{\Delta v_{2,max}}{v}$$

$$\frac{\Delta v_{max}}{v} = \ln \left( \frac{(1 + m_F/m_p)^2}{1 + m_F/2m_p} \right)$$



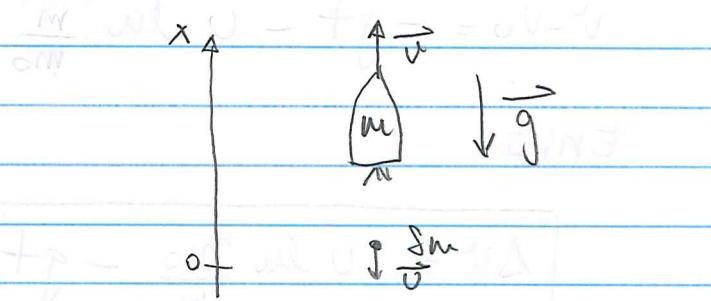
## ► Toqueiro sob ação do campo gravitacional

O movimento de um foguete ao tentar escapar do campo gravitacional terrestre é extremamente complicado. Para tal, vamos assumir várias aproximações:

- 1) Afirmaremos apenas movimento vertical;
- 2) Desconsideraremos a resistência do ar;
- 3) Consideraremos  $g$  constante (independente da altura);
- 4) Suponhamos que a taxa com que a massa de combustível é queimada é constante.

Neste caso, a força externa  $\vec{mg}$  é responsável pela variação do momento linear total do sistema

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{mg}}$$



Então, para um intervalo de tempo  $\Delta t$ :

$$\vec{mg} \Delta t = \Delta \vec{P} = \vec{P}(t + \Delta t) - \vec{P}(t)$$

Utilizando os resultados do foguete da seção anterior:

$$\vec{mg} \Delta t = m \vec{v}_0 - \vec{v} \Delta m \quad (\text{ignorando o termo } \Delta m \Delta \vec{v})$$

Considerando os senhos de movimento da figura

$$-mg\delta t = m\delta v + v\delta m$$

$$\delta v = -g\delta t - v \frac{\delta m}{m}$$

Fazendo lim e integrando um limite correspondentes:

$$\int_{v_0}^v dv' = -g \int_0^t dt' - v \int_{m_0}^m \frac{dm'}{m}$$

$$v - v_0 = -gt - v \ln \frac{m}{m_0}$$

Então:

$$\boxed{\Delta v = v \ln \frac{m_0}{m} - gt}$$

Além disso, se você considerar que a taxa de queima de combustível é constante:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = -\alpha, \quad \alpha \text{ constante}$$

$$\int_{m_0}^m dm = -\alpha \int_0^t dt' \Rightarrow m - m_0 = -\alpha t$$

$$\boxed{t = \frac{m - m_0}{-\alpha}}$$

Substituindo:

$$\boxed{\Delta V = v \ln \frac{m_0}{m} - \frac{g}{\alpha} (m_0 - m)} \quad , \quad \alpha = \frac{dm}{dt} \text{ (taxa de queima)}$$

Novamente, podemos calcular  $\Delta V_{max}$ , supondo

$$m_0 = m_p + m_F \quad ) \quad m = m_p$$

↑ payload      ↑ fuel

$$\boxed{\Delta V_{max} = v \ln \left( 1 + \frac{m_F}{m_p} \right) - \frac{g m_p}{\alpha} \left( \frac{m_F}{m_p} \right)}$$

termos que diminuem  
 $\Delta V$  devido ao  
campo gravitacional

111

el resultado

$$\begin{aligned} \text{Anzahl } & \text{ ab } x_0 \\ \text{Anzahl } & \text{ bis } x_0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Anzahl } p = \text{ Anzahl } 0 = 0 \\ x \end{array} \right.$$

Anzahl von  $x_0$  bis  $x_1$  berechnen - gleichheit  
Intervall

$$g(x) = x \quad g(x_0) + g(x_1) = x_1$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Anzahl } \\ \text{ab } x_0 \end{array} \right) \text{ ab } x_0 = \left( \begin{array}{l} \text{Anzahl } \\ \text{ab } x_0 \end{array} \right) \text{ ab } x_0 + 1$$

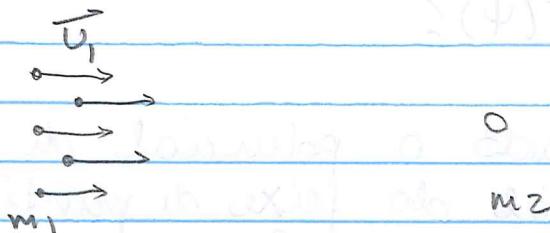
Anzahl von  $x_0$  bis  $x_1$   
- Anzahl von  $x_0$  bis  $x_0$

## • SEÇÃO DE CHOQUE (EXTRA)

Quando conhecemos o potencial de interação entre  $m_1$  e  $m_2$  podemos prever os valores de  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  (as velocidades finais) com o conhecimento dos parâmetros de impacto  $b$ .

Vamos considerar neste caso 2 tipos de potencial, o potencial de Coulomb repulsivo e o potencial de atração dura. Vamos obter a seção de choque diferencial desses dois potenciais.

Em uma experiência de espalhamento temos um feixe de partículas incidentes interagindo com as partículas alvo.



Todas as partículas incidentes têm a mesma velocidade  $\vec{v}_1$ , POREM DIFERENTES PARÂMETROS DE IMPACTO.

Vamos supor que a INTENSIDADE do feixe incidente é conhecida:

$$I = \# \text{ partículas} / \text{tempo} / \text{unidade de área}$$

A quantidade mais importante no espalhamento é a SECÃA DE CHOQUE DIFERENCIAL  $\tau(\psi)$

$$\tau(\psi) = \frac{\# \text{ partículas}/\text{tempo} \text{ espalhadas no ângulo sólido } d\Omega \text{ em torno de } \psi}{\text{intensidade incidente}}$$



Obs.: Vamos tratar do potencial continuo, onde o espalhamento é simétrico em torno da direção de incidência (por isso  $\tau$  só depende de  $\psi$ )

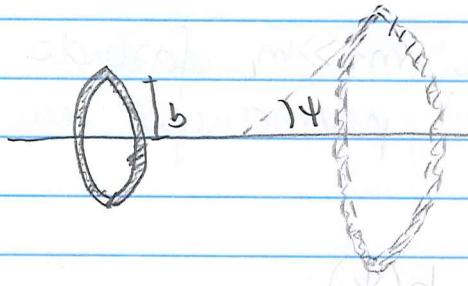
Como encontrar  $\tau(\psi)$ ?

Assuma que, dados o potencial de interação e a velocidade inicial do feixe de partículas, apenas as partículas com parâmetros de impacto entre  $b$  e  $b+db$  serão espalhadas para o ângulo sólido  $d\Omega$  em torno de  $\psi$ .



Então:

$$\# \text{ partículas/tempo} \text{ inadubles} = \# \text{ partículas/tempo espalhadas} \\ \text{entre } b \text{ e } b+db \quad \text{em torno de } \psi$$



$$I(2\pi b db) = I \sigma(\psi) (2\pi \sin \psi d\psi)$$

Então:

$$\sigma(\psi) = \frac{b}{\sin \psi} \left| \frac{db}{d\psi} \right|$$

A dependência  $b(\psi)$  determina diretamente a siga da choque diferencial!

### i) Potencial de esfera dura

Esse é um potencial que usamos por vezes para representar o potencial de interação entre átomos

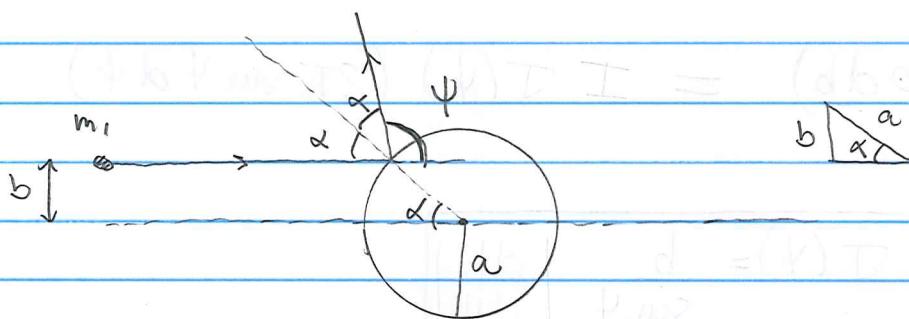
$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \begin{cases} 0 & |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| > a \\ \infty & |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| < a \end{cases}$$

11

Efectivamente, não há força quando a distância entre as partículas é maior que  $a$  e as partículas são impedidas por uma forte repulsão de se aproximarem mais que a distância  $a$ .

Aqui, vou supor que  $m_2 \gg m_1$ , fazendo com que a partícula alvo ( $m_2$ ) permaneça em repouso na origem.

Preciso encontrar  $b(\psi)$ :



A trajetória de  $m_1$  consiste de uma reflexão espelhada na superfície da esfera de raio  $a$ .

Assim:

$$\psi = \pi - 2\alpha \quad \text{e} \quad \sin \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}\right) = \frac{b}{a}$$

$$\cos \frac{\psi}{2} = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{b = a \cos \frac{\psi}{2}}$$

Então:

$$\frac{db}{d\psi} = -\frac{a}{2} \sin \frac{\psi}{2}$$

E:

$$\sigma(\psi) = \frac{b}{\sin \psi} \left| \frac{db}{d\psi} \right| = \frac{(a \cos \psi/2)}{\sin \psi} \left( \frac{a \sin \psi/2}{2} \right)$$

$$\boxed{\sigma(\psi) = \frac{a^2}{4}} \quad (\text{Independente de } \psi!)$$

Obs.: Como  $\int \sigma(\psi) d\Omega$  forma o número de partículas por segundo espalhadas no ângulo sólido  $d\Omega$ , a integração sobre uma superfície esférica

$$\int \sigma(\psi) d\Omega = \sigma_T$$

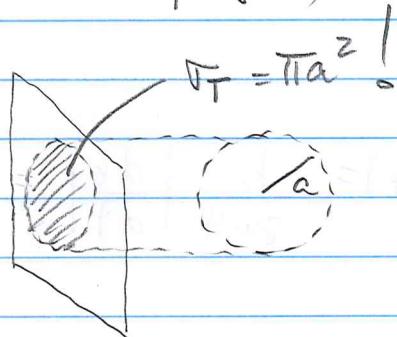
fornecce o número total de partículas por segundo espalhadas em qualquer direção.

Tentos  $\sigma_T$ , que tem dimensão de área, é a SEÇÃO DE CHOQUE TOTAL. Ela é interpretada como a área que se apresenta as feixes incidente tal que as partículas dentro desta área são espalhadas e as no exterior não são.

Para o potencial de esfera dura:

$$\nabla_T = \int \sigma(r) dr = \frac{a^2}{4} \int dr = \frac{a^2}{4} (4\pi)$$

$$\boxed{\nabla_T = \pi a^2}$$



### ii) Potencial repulsivo Coulombiano

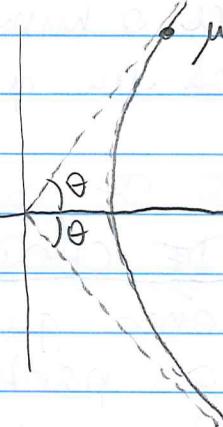
$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{k}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad \text{com} \quad k = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0}$$

Da discussão do capítulo de força central sabemos que a órbita da massa reduzida é uma hipérbole definida pela equação polar

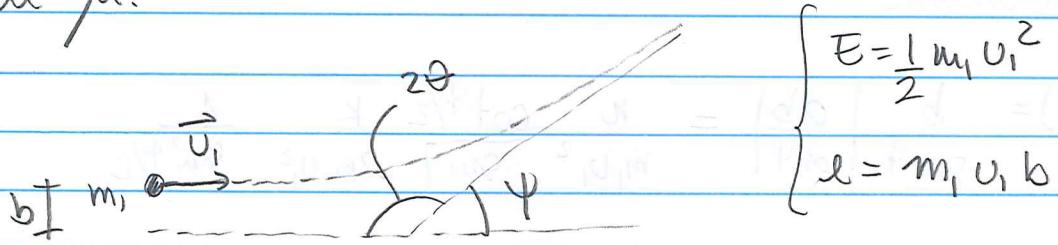
$$\boxed{\frac{x}{r} = -1 + \epsilon \cos \theta}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{l^2}{\mu r} \\ \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\alpha l^2}{\mu r^2}} \end{array} \right.$$

$$\theta = \cos^{-1} \left[ \frac{1}{\epsilon} \right]$$



Precisamos identificar  $\psi$  e  $\ell$  das condições iniciais.  
 Para simplificar, vou assumir novamente que  $m_1 \ll m_2$   
 de tal forma que a trajetória de  $m_1$  é idêntica à  
 de  $\mu$ .



$$\text{Mas } \therefore E = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m_1 u_1^2}} = \sqrt{1 + \frac{2(\frac{1}{2}m_1 u_1^2) m_1^2 u_1^2 b^2}{m_1 u_1^2 n^2}}$$

$$\boxed{E = \sqrt{1 + \left( \frac{m_1 u_1^2 b}{n} \right)^2}}$$

$$\text{Fazendo } \psi = \pi - 2\theta \text{ e } \cos \theta = \frac{1}{e}$$

Assim:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \Rightarrow \sin \psi/2 = 1/\sqrt{e}$$

$$1 + \left( \frac{m_1 u_1^2 b}{n} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \psi/2} \Rightarrow \frac{m_1 u_1^2 b}{n} = \cot \psi/2$$

$$\boxed{b = \frac{n}{m_1 u_1^2} \cot \psi/2}$$

Assim:  $\frac{db}{d\psi} = \frac{k}{m_1 v_1^2} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sin^2 \psi/2}$

Finalmente:

$$\mathcal{T}(\psi) = \frac{b}{\sin \psi} \left| \frac{db}{d\psi} \right| = \frac{k}{m_1 v_1^2} \frac{\cot \psi/2}{\sin \psi} \frac{k}{2m_1 v_1^2} \frac{1}{\sin^2 \psi/2}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{k}{m_1 v_1^2} \right)^2 \frac{\cos \psi/2}{\sin \psi/2} \frac{1}{\sin^2 \psi/2} \frac{1}{2 \sin \psi/2 \cos \psi/2}$$

$$\boxed{\mathcal{T}(\psi) = \left( \frac{k}{2m_1 v_1^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \psi/2}} \quad (\text{VEJA ANEXOS DO CAPÍTULO})$$

Obs. 1: essa é a seção de choque diferencial de Rutherford

Obs. 2: ela foi utilizada para interpretar os resultados experimentais de Geiger e Marsden, de desvios de partículas alfa pela matéria

Obs. 3: estes estudos comprovaram a estrutura nuclear (carga/massa concentrada em um volume da ordem  $\sim 10^{-15} \text{ m}^3$ )

Obs. 4: Pelo fato da interação coulombiana ser dita de LONGO ALCANCE, a seção de choque total  $\mathcal{T}_T = \int \mathcal{T}(\psi) d\psi \rightarrow \infty$