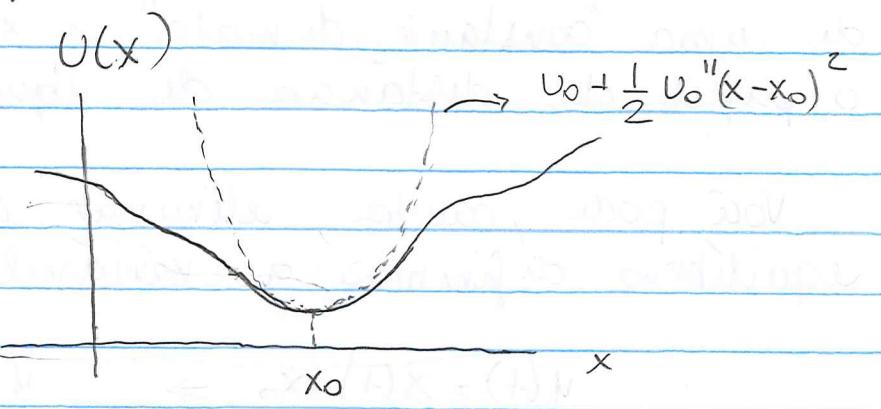


Capítulo 3 - Oscilações

Um movimento de oscilação bastante especial, conhecido como MOVIMENTO HARMÔNICO, aparece com muita frequência em Física pois energias potenciais complicadas quase sempre podem ser aproximadas por parábolas próximas a um ponto de equilíbrio estável.

Em 1D:



x_0 é um ponto de equilíbrio estável. Para movimentos próximos a x_0 podemos aproximar $U(x)$, utilizando série de Taylor:

$$U(x) \approx U(x_0) + U'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} U''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$$

\downarrow \downarrow \downarrow

U_0 , uma constante $U'(x_0)$ de sinal alternado chama $U''(x_0)$ de k

Paramos em $o(x^2)$ pois $(x-x_0)^n$ vai ficando cada vez menor!

$$U(x) \approx U_0 + \frac{1}{2} k(x-x_0)^2$$

na eq. Newton:

$$\boxed{m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} = -k(x-x_0)} \quad | \text{ lei de Hooke!}$$

A constante $U''(x_0) = k$ desempenha o papel de uma "constante de mola" e x_0 desempenha o papel da distância de equilíbrio da "mola"

Você pode, ainda, eliminar a posição de equilíbrio definindo a variável

$$y(t) = x(t) - x_0 \Rightarrow \ddot{y} = \ddot{x}$$

tal que:

$$\boxed{m\ddot{y} = -ky}$$

Trabalharemos exclusivamente com essa equação lembrando que, se a posição de equilíbrio $x_0 \neq 0$, a trajetória real é sempre nula

$$\boxed{x(t) = x_0 + y(t)}$$

OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

Quero encontrar a solução da equação
(voltando à variável $x(t)$):

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx}$$

Definimos:

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

$$[\omega_0] = \left(\frac{M}{T^2} \frac{1}{M} \right)^{1/2} = T^{-1}$$

Então:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Trata-se de uma equação diferencial homogênea de 2ª ordem. Assim, a solução geral pode ser escrita em termos da combinação linear de 2 funções linearmente independentes

$$x(t) = A f_1(t) + B f_2(t)$$

$$\det \begin{bmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ \dot{f}_1(t) & \dot{f}_2(t) \end{bmatrix} \neq 0$$

No caso, inici utilizan:

$$f_1(t) = \cos(\omega_0 t) \quad e \quad f_2(t) = \sin(\omega_0 t)$$

f_1 e f_2 São soluções:

$$\ddot{f}_1 = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 f_1$$

$$\ddot{f}_2 = -\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) = -\omega_0^2 f_2$$

São linearmente independentes:

$$\det \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{bmatrix} =$$
$$= \omega_0 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) = \omega_0 \neq 0$$

Então temos:

$$\boxed{x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)}$$

Como determinar A e B ? Das condições iniciais!

$$x(0) = B \Rightarrow \boxed{B = x_0}$$

$$\dot{x}(0) = Aw_0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{v_0}{w_0}}$$

Finalmente:

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{w_0} \sin w_0 t + x_0 \cos w_0 t}$$

é a solução da equação de Newton.

E a forma $x(t) = A \cos(w_0 t - \delta)$ ou $A \sin(w_0 t - \varphi)$?

Só apenas manejos diferentes de escrever a mesma coisa! Veja:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(w_0 t - \delta) = A \{ \sin w_0 t \cos \delta - \cos w_0 t \sin \delta \} = \\ &= \underbrace{(A \cos \delta)}_{A'} \sin w_0 t + \underbrace{(-A \sin \delta)}_{B'} \cos w_0 t \end{aligned}$$

⇒ Energia total

Como a força sobre a partícula, cuja equação de movimento é

$$m\ddot{x} = -kx,$$

é conservativa

$$F(x) = -kx = -\frac{du}{dx} \text{ com } U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \text{const.}$$

esperamos que

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + U(x(t))$$

seja uma constante. Usando:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t - \delta)$$

$$\dot{x}(t) = \omega_0 A \cos(\omega_0 t - \delta)$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t - \delta)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t - \delta)$$

Lembrando que $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$:

$$E = T + U = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 [\cos^2(\#) + \sin^2(\#)]$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2} \quad \text{uma constante!}$$

Obs.: A energia do oscilador é proporcional ao QUADRADO da sua amplitude.

↳ Período

O movimento $x(t) = A \sin(\omega_0 t - \delta)$ é periódico, com período $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$x(t + \frac{2\pi}{\omega_0}) = A \sin(\omega_0 t + \frac{2\pi}{\omega_0} - \delta) =$$

$$= A \sin(\omega_0 t - \delta + 2\pi) =$$

$$= A \sin(\omega_0 t - \delta) = x(t)$$

Então:

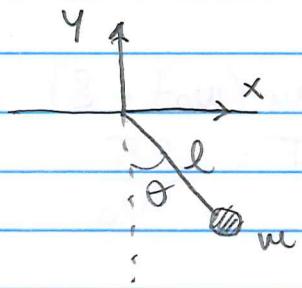
$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \rightarrow \text{frequência angular}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}} \rightarrow \text{período} \quad \boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}} \rightarrow \text{frequência}$$

Obs.: O período do oscilador harmônico
depende da amplitude do movimento
(oscilação isônica)

Exemplo: Pêndulo Simple

O movimento de uma massa m em um pêndulo de comprimento l é descrito completamente com a coordenada $\theta(t)$ abaixo:



As coordenadas cartesianas:

$$x(t) = l \sin \theta(t)$$

$$y(t) = -l \cos \theta(t)$$

A energia total (conservada) é:

$$E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + mg y$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] + mg y$$

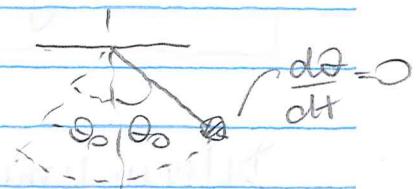
As componentes de \vec{v} :

$$\frac{dx}{dt} = l \cos \theta \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = l \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - m g l \cos \theta$$

O movimento mais geral se dá com os dois pontos de retorno $\pm\theta_0$, onde $\frac{d\theta}{dt} = 0$ (a parada para)

$$E(\pm\theta_0) = -m g l \cos \theta_0$$



Como E é conservado:

$$-m g l \cos \theta_0 = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - m g l \cos \theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

Você pode utilizar a expressão acima para calcular o PERÍODO de oscilação. Para isso, integre de $\theta = -\theta_0$ até $\theta = \theta_0$, com $\frac{d\theta}{dt} > 0$, o que corresponde a METADE PERÍODO.

$$\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \int_0^{T/2} dt$$

Então:

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Diferentemente do oscilador harmônico, a integral do período depende da amplitude do movimento θ_0 (a integral resulta em uma função complicada). De fato, o período do pêndulo simples aumenta com o aumento de θ_0 .

Apenas quando θ_0 é pequeno, para pequenos oscilações, o pêndulo simples se comporta como um oscilador harmônico.

$$U(\theta) = -mgl \cos\theta$$

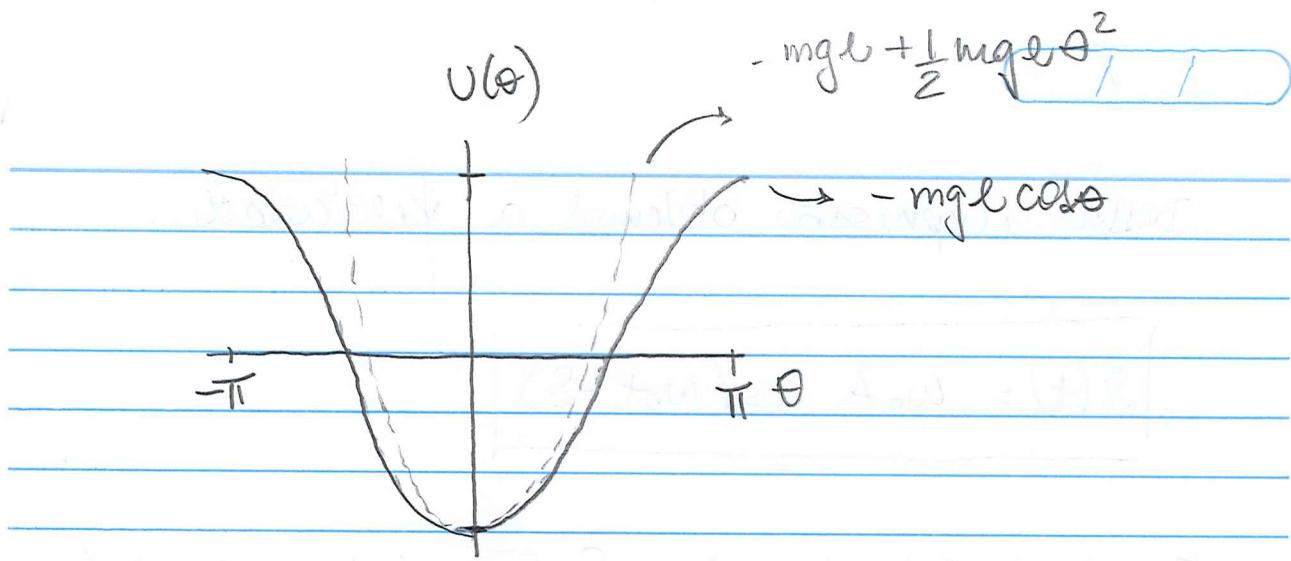
$$\approx -mgl \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots\right)$$

) aproximação em série de Taylor

$$U(\theta) \approx -mgl + \frac{1}{2} mgl \theta^2 + \dots$$

constant

potencial harmônico



θ o período de oscilação, para θ pequenos:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{g}} \quad (\text{p/ } \theta \text{ pequeno})$$

utilize aproximação
p/ coss e cota na
integral do período!

④ DIAGRAMAS DE FASE

Vimos que, para o oscilador harmônico, a solução geral da equação de movimento

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t - \delta), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Desta expressão obtemos a velocidade:

$$\dot{x}(t) = \omega_0 A \cos(\omega_0 t - \delta)$$

E as constantes A e δ são determinadas das condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = -A \sin \delta \\ \dot{x}(0) = \omega_0 A \cos \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \\ \delta = -\tan^{-1} \left[\frac{\omega_0 x_0}{v_0} \right] \end{array}$$

Ou seja, a solução $x(t)$ só é conhecida se -
pejando o valor de $x(t_0)$ e $\dot{x}(t_0)$ em um
certo instante t_0

$$\{x_0, v_0\} \Rightarrow x(t)$$

De outra forma, o "estado" do movimento
em um dado instante t_0 é caracterizado
por $x(t_0)$ e $\dot{x}(t_0)$. E todas as outras informa-
ções (quantidades físicas) podem ser conhecidas
dai.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}(t_0)^2$$

Exemplo:

$$\vec{L} = \vec{r}(t_0) \times m \vec{v}(t_0)$$

$$\vec{N} = \vec{r}(t_0) \times \vec{F}(\vec{r}(t_0), \vec{v}(t_0)) \dots$$

CONTE ONGENDO - SE $\vec{r}(t)$ E $\vec{v}(t)$ SABE MUITO
TODAS AS QUANTIDADES FÍSICAS DA PARTÍCULA
NAQUELE INSTANTE

É COMUM, ENTÓ, VISUALIZAR O MOVIMENTO DA
PARTÍCULA EM UM PLANO X-X CHAMADO
ESPAÇO DE FASE.

Nesse espaço representamos as curvas $v(x)$, sem
explicar o tempo.

Como fazer isso? Veja p/ o caso do oscilador
harmônico:

$$m \frac{dv}{dt} = -kx$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{m} x = \omega_0^2 x$$

$$\int_{v_0}^v dv = -\omega_0^2 \int_{x_0}^x x' dx'$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = -\frac{\omega_0^2}{2}(x^2 - x_0^2)$$

Isolando as condições iniciais:

1 / 1

$$v^2 + w_0^2 x^2 = w_0^2 x_0^2 + v_0^2$$

E podemos trocar o lado direito pela energia total, que é conservada:

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} m w_0^2 x_0^2$$

$$v_0^2 + w_0^2 x_0^2 = \frac{2E}{m}$$

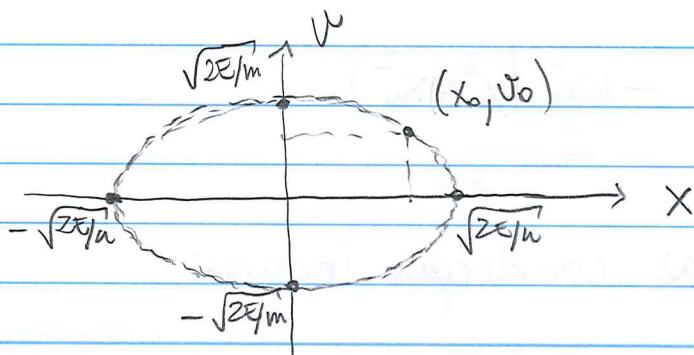
Assim:

$$v^2 + w_0^2 x^2 = \frac{2E}{m}$$

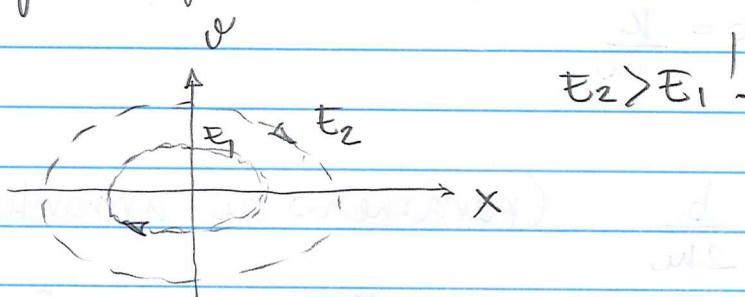
$$\Rightarrow m w_0^2 = k!$$

$$\boxed{\frac{v^2}{\frac{2E}{m}} + \frac{x^2}{\frac{2E}{k}} = 1}$$

As curvas $v(x)$ são elipses!



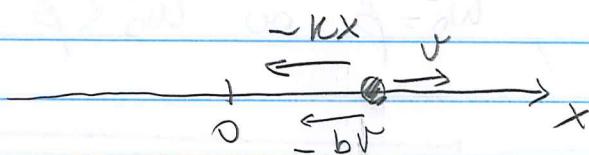
Cada elipse representa um movimento harmônico com energia diferente



Uma vez determinados (x_0, v_0) a trajetória no espaço de fase é única \Rightarrow as curvas $v(x)$ no espaço de fase NUNCA SE INTERCEPTAM.

OSCILADORES AMORTECIDOS

Agora, vamos discutir os efeitos de um amortor proporcional à velocidade no movimento do oscilador.



A equação de movimento:

$$m\ddot{x} = -kx - bv$$

(note o sinal da força de amortor, sempre contrário ao da velocidade)

Definição:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\beta = \frac{b}{2m} \quad (\text{parâmetro de amortecimento})$$

$$[b] = \frac{N}{m/s} \quad e \quad [\beta] = \frac{m/s^2}{m/s} = \frac{1}{s}$$

E a equação de movimento:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Note que tanto ω_0 quanto β são frequências.
De fato, encontraremos diferentes movimentos
dependendo se

$$\omega_0^2 > \beta^2, \quad \omega_0^2 = \beta^2 \quad \text{ou} \quad \omega_0^2 < \beta^2$$

Como se resolve essa equação diferencial
linear homogênea a coeficientes constantes?

$$\boxed{\text{Tente } x(t) = e^{rt} \text{ e ache } r!}$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{rt} \\ \dot{x}(t) = r e^{rt} \\ \ddot{x}(t) = r^2 e^{rt} \end{cases}$$

Substituindo na eq. de movimento:

$$(r^2 + 2\beta r + \omega_0^2) e^{rt} = 0$$

Para ser verdade em qualquer tempo t :

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0$$

Sua solução é:

$$r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

* note que de uma equação diferencial de ordem n , você encontra n valores para r !

1 / 1

Então, as funções:

$$f_1(t) = e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

$$f_2(t) = e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

são as duas soluções da equação diferencial.

Cuidado! Se $\beta^2 = \omega_0^2$ só obtivemos 1 solução! E se $\beta^2 < \omega_0^2$, a raiz quadrada vira um número imaginário!

Analisaremos cada caso de separados.

► SUBAMORTECIDO ($\beta^2 < \omega_0^2$)

As soluções ficam

$$f_1(t) = e^{-\beta t} e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t}$$

$$f_2(t) = e^{-\beta t} e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t}$$

Mas queremos soluções reais. De fato, a parte real é a parte imaginária de f_1 e f_2 .

Só:

(utilize que $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$)

$$\begin{cases} g_1(t) = e^{-\beta t} \cos \omega_1 t \\ g_2(t) = e^{-\beta t} \sin \omega_1 t \end{cases} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

A solução geral do problema é:

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos \omega_1 t + B e^{-\beta t} \sin \omega_1 t$$

com as constantes A e B determinadas por x_0 e v_0 .

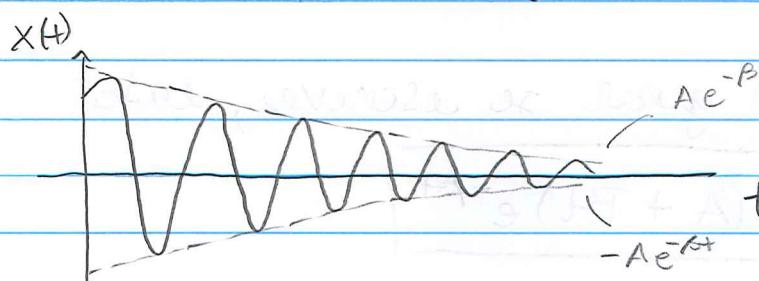
Obs. 1) Note que se $\beta = 0$, $\omega_1 = \omega_0$ e temos

$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$, de modo sem amortecimento.

Obs. 2) Ocasionalmente, podemos escrever:

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta)$$

com A e δ determinados das condições iniciais.



as oscilações acontecem dentro dos "envelopes" $\pm A e^{-\beta t}$

Em um problema da lista, você irá calcular a taxa de perda de energia nesse sistema. Aqui, claramente:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2} K x(t)^2$$

há é uma constante, pois há uma força não-conservativa realizando trabalho.

» CRITICAMENTE AMORTECIDO ($\omega_0^2 = \beta^2$)

Neste caso, a solução obtida só fornece uma única função:

$$f_1(t) = e^{-\beta t}$$

Na lista de exercícios, você irá mostrar que a outra solução é:

$$f_2(t) = t e^{-\beta t}$$

A solução geral se escreve, então

$$\boxed{x(t) = (A + Bt) e^{-\beta t}}$$

com A e B determinados de x_0 e v_0 .

» SUPER AMORTECIDO ($\beta^2 > \omega_0^2$)

Nesse caso, as duas soluções são distintas e reais

$$x(t) = A e^{-\beta t} e^{w_2 t} + B e^{-\beta t} e^{-w_2 t}$$
$$w_2 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

A combinação de exponenciais reais pode ser escrita como:

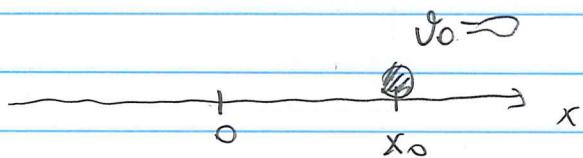
$$x(t) = A e^{-\beta t} \cosh w_2 t + B e^{-\beta t} \sinh w_2 t$$

Utilizando $\cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$ e $\sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$

Note que quando $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$ pois ambos os termos são exponenciais decrescentes ($\beta > \omega_2$!).

» COMPARAÇÃO DOS TRÊS CASOS

Quero comparar os três casos utilizando a condição inicial $x_0 > 0$ e $v_0 = 0$.



i) Subanortecidos

$$\begin{cases} x(t) = A e^{-\beta t} \cos \omega_1 t + B e^{-\beta t} \sin \omega_1 t \\ \dot{x}(t) = (-\omega_1 A - \beta B) e^{-\beta t} \sin \omega_1 t + (\omega_1 B - \beta A) e^{-\beta t} \cos \omega_1 t \end{cases}$$

$$x(0) = A = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \omega_1 B - \beta A = 0 \Rightarrow B = \frac{\beta x_0}{\omega_1}$$

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{-\beta t} \cos \omega_1 t + \frac{\beta x_0}{\omega_1} e^{-\beta t} \sin \omega_1 t}$$

ii) criticamente amortecidos

$$\begin{cases} x(t) = (A + Bt) e^{-\beta t} \\ \dot{x}(t) = (B - \beta A - \beta Bt) e^{-\beta t} \end{cases}$$

$$x(0) = A = x_0$$

$$\dot{x}(0) = B - \beta A = 0 \Rightarrow B = \beta x_0$$

$$\boxed{x(t) = (1 + \beta t) x_0 e^{-\beta t}}$$

iii) superamortecimento

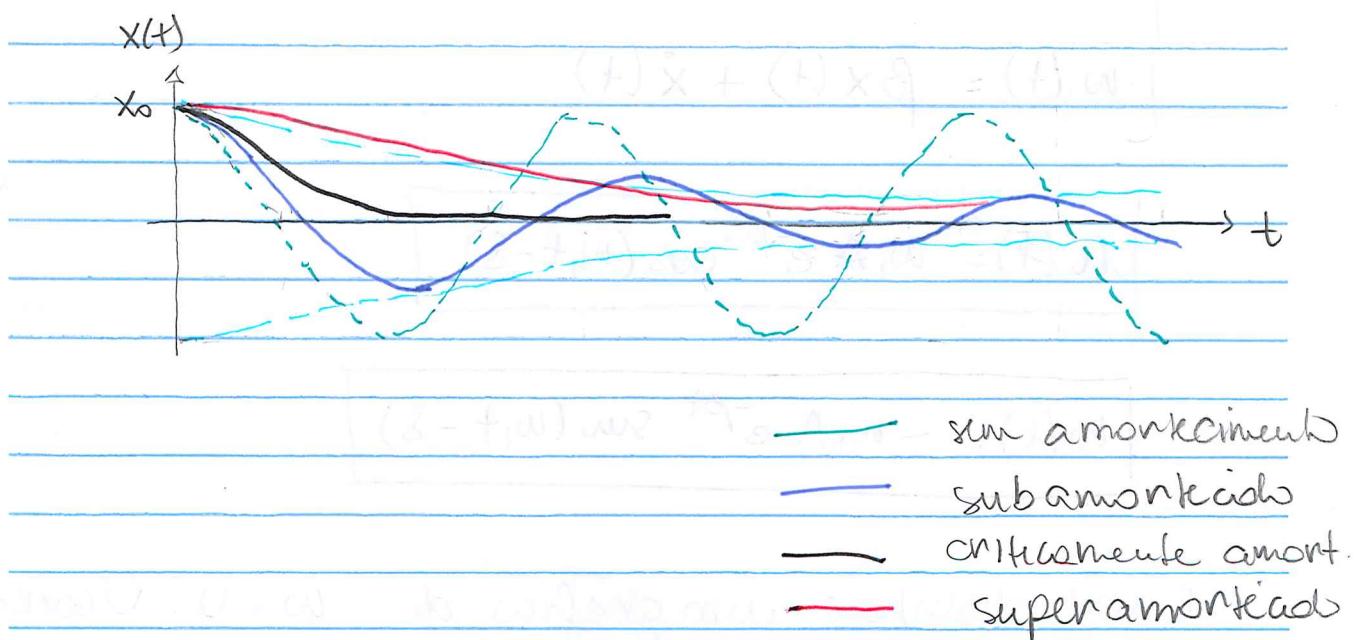
$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = A e^{-\beta t} \cosh \omega_2 t + B e^{-\beta t} \sinh \omega_2 t \\ \dot{x}(t) = (\omega_2 B - \beta A) e^{-\beta t} \cosh \omega_2 t + (\omega_2^2 A - \beta B) e^{-\beta t} \sinh \omega_2 t \end{array} \right.$$

$$x(0) = A = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \omega_2 B - \beta A = 0 \Rightarrow B = \frac{\beta x_0}{\omega_2}$$

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \cosh \omega_2 t + \frac{\beta x_0}{\omega_2} e^{-\beta t} \sinh \omega_2 t$$

Veja os gráficos mais precisos no anexo deste capítulo.



1 /

Exemplo 3.2) Considere o espaço de fase do oscilador amortecido, para o caso subamortecido.

A posição e velocidade:

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta)$$

$$\dot{x}(t) = -A e^{-\beta t} (\beta \cos(\omega_1 t - \delta) + \omega_1 \sin(\omega_1 t - \delta))$$

Como eliminar o tempo?

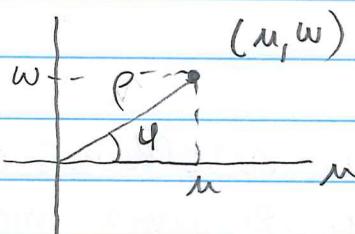
Aqui, precisarei utilizar o seguinte truque.
Suponha a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} u(t) = \omega_1 x(t) \\ w(t) = \beta x(t) + \dot{x}(t) \end{cases}$$

$$u(t) = \omega_1 A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta)$$

$$w(t) = -\omega_1 A e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t - \delta)$$

E vou desenhar um gráfico de $w \times u$. Ocorre que posso descrever $w(u)$ em coordenadas retangulares ("cartesianas") ou em coordenadas polares.

w  (u, w)

A relação entre (u, w) e (p, φ) :

$$\begin{cases} p = \sqrt{u^2 + w^2} \\ \varphi = \tan^{-1}(w/u) \end{cases}$$

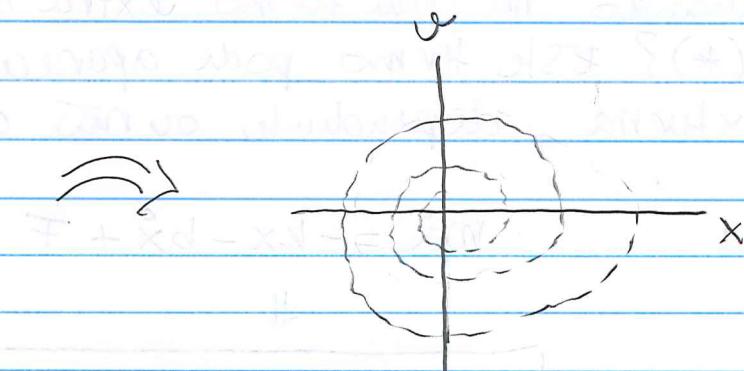
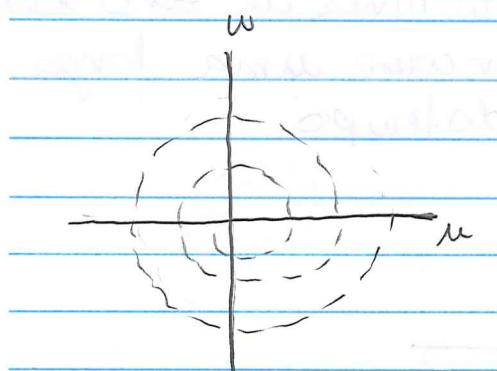
Então:

$$\tan \varphi = -\tan(u_1 + \delta) \Rightarrow \boxed{\varphi = \delta - u_1 +}$$

$$\bullet p = w_1 A e^{-\beta t} \Rightarrow \boxed{p = w_1 A e^{-\beta(\delta - \varphi)/w_1}}$$

Sabendo A e δ das condições iniciais, buscando valores de φ , você encontra os distâncias p . Esta equação é a equação de uma espiral logarítmica!

No anexo deste capítulo você encontra o diagrama de fase $v \times x$ para um caso específico!



OSCILAÇÕES FORÇADAS

Até agora, as equações que resolvemos correspondiam à equação de Newton de uma massa m sob ação de uma força elástica e uma força de arrasto proporcional à velocidade:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$



$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad (*)$$

$\Rightarrow = 0!$

Essa equação diferencial de 2º ordeno, HOMOGENEIA, podia ser resolvida como combinação linear de 2 soluções $f_1(t)$ e $f_2(t)$

$$x(t) = A f_1(t) + B f_2(t)$$

A pergunta é: como resolver a equação quando há um termo extra ao invés de zero em $(*)$? Este termo pode aparecer como uma força externa, dependente ou não do tempo.

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F$$



$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}} \quad (**)$$

NÃO-HOMOGENEIA!

Essas equações são ditas NÃO-HOMOGENEAS. Sua solução é a soma das soluções (já encontradas) do problema HOMOGENEO mais uma SOLUÇÃO PARTICULAR do problema NÃO-HOMOGENEO.

Ou seja, se:

$$\ddot{x}_H + 2\beta \dot{x}_H + \omega_0^2 x_H = 0$$

\downarrow

$$x_H(t) = A f_1(t) + B f_2(t)$$

e:

$$\ddot{x}_P + 2\beta \dot{x}_P + \omega_0^2 x_P = \frac{F}{m}$$

a solução completa é:

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = \underbrace{A f_1(t) + B f_2(t)}_{x_H(t)} + x_P(t) \end{array} \right\}$$

E essa tarefa é apenas encontrar $x_P(t)$!

► Fixa constante

Seja:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}, \quad F \text{ é constante}$$

Quem é $x_p(t)$? Não compique! Escolha:

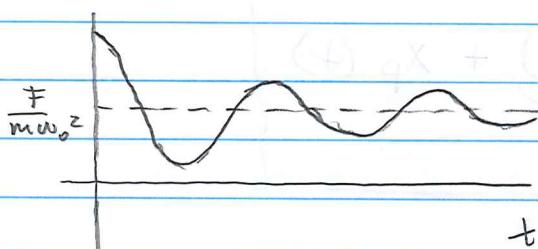
$$x_p(t) = \frac{F}{m\omega_0^2} = \frac{F}{K}$$

ta solução geral fica:

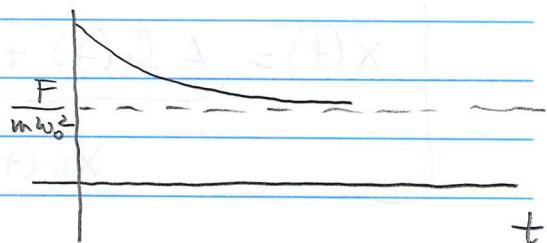
$$x(t) = \frac{F}{m\omega_0^2} + A f_1(t) + B f_2(t)$$

→ termo constante!

Compare:



(sub amortecido)



(super amortecido)

Sob ação de força constante, há um deslocamento da posição de equilíbrio. Isso faz sentido?

► Força sinusoidal (periódica)

No caso de uma força externa do tipo:

$$\boxed{F(t) = F_0 \cos \omega t}$$

A eq. de movimento é:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t}$$

Cuidado! ω é a frequência de oscilação da força externa, que não precisa ser igual à de oscilação do seu sistema!

Quem é $x_p(t)$? Procuramos uma solução particular arriscando:

$$\boxed{x_p(t) = D \cos(\omega t - \delta)}$$

↑ ↑
ajustáveis

Substitui x_p na equação de movimento, mas na forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_p(t) = D \cos \delta \cos \omega t + D \sin \delta \sin \omega t \\ \dot{x}_p(t) = -D\omega \cos \delta \sin \omega t + D\omega \sin \delta \cos \omega t \\ \ddot{x}_p(t) = -D\omega^2 \cos \delta \cos \omega t - D\omega^2 \sin \delta \sin \omega t \end{array} \right.$$

11

$$[-Dw^2 \cos\delta \cos\omega t - Dw^2 \sin\delta \sin\omega t] +$$

$$+ 2\beta [-Dw \cos\delta \sin\omega t + Dw \sin\delta \cos\omega t] +$$

$$+ w_0^2 [D \cos\delta \cos\omega t + D \sin\delta \sin\omega t] = \frac{F_0}{m} \cos\omega t$$

Combinação de termos tem $\cos\omega t + e^{j\sin\omega t}$:

$$\left[\frac{F_0}{m} - D((w_0^2 - w^2) \cos\delta + 2\beta w \sin\delta) \right] \cos\omega t -$$

$$- \left[D((w_0^2 - w^2) \sin\delta - 2\beta w \cos\delta) \right] \sin\omega t = 0$$

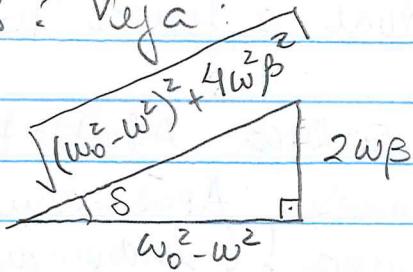
Ambos os termos em $\boxed{\#}$ devem ser nulos.
Assim:

$$\boxed{\tan\delta = \frac{2w\beta}{w_0^2 - w^2}}$$

$$\boxed{D = \frac{F_0/m}{(w_0^2 - w^2) \cos\delta + 2w\beta \sin\delta}}$$

Como achar $\cos \delta$ e $\sin \delta$? Veja:

$$\tan \delta = \frac{2w\beta}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow$$



$$\sin \delta = \frac{2w\beta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4w^2\beta^2}}, \quad \cos \delta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4w^2\beta^2}}$$

Substituindo na expressão de D , obtemos:

$$D = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4w^2\beta^2}}$$

Então, a solução geral:

$$x(t) = (A f_1(t) + B f_2(t)) + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4w^2\beta^2}} \cos(\omega t - \delta)$$

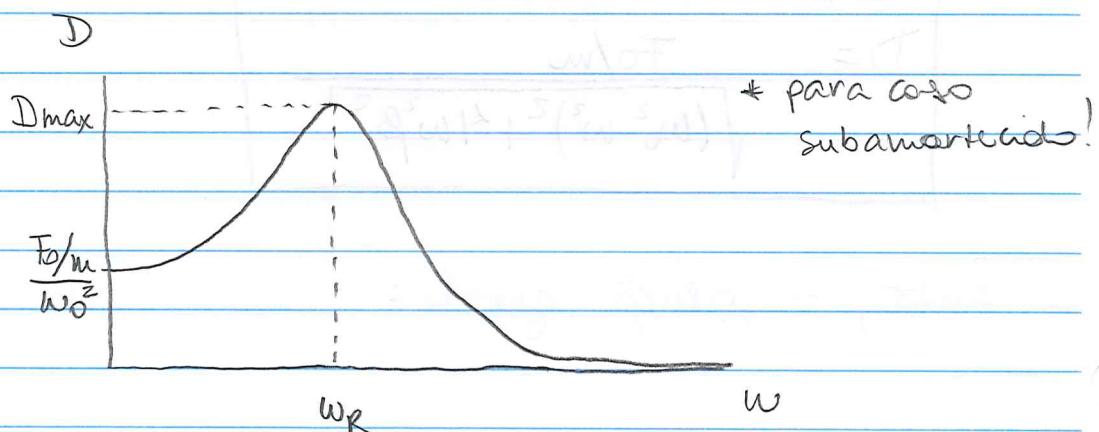
parte transiente
(desaparece a tempos
grandes)

Qual a física por trás dista solução?

1) A solução $A f_1(t) + B f_2(t)$ só é relevante a tempos pequenos. Após um tempo $\Delta t \sim 1/\beta$ ela se torna pequena! (independente se o oscilador é sub ou super amortecido)

2) Após este intervalo de tempo, a partícula oscilará com amplitude D e com a frequência determinada pela força!

3) Como a amplitude D depende da frequência w ?



4) Existe uma FREQUÊNCIA DE RESONÂNCIA em que a amplitude é máxima. Isto ocorre quando o denominador de D é mínimo!

$$\frac{d}{dw} \sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\beta^2 w^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{w^2 - w_0^2}} [2(w_0^2 - w^2)(-2w) + 8\beta^2 w] = 0$$

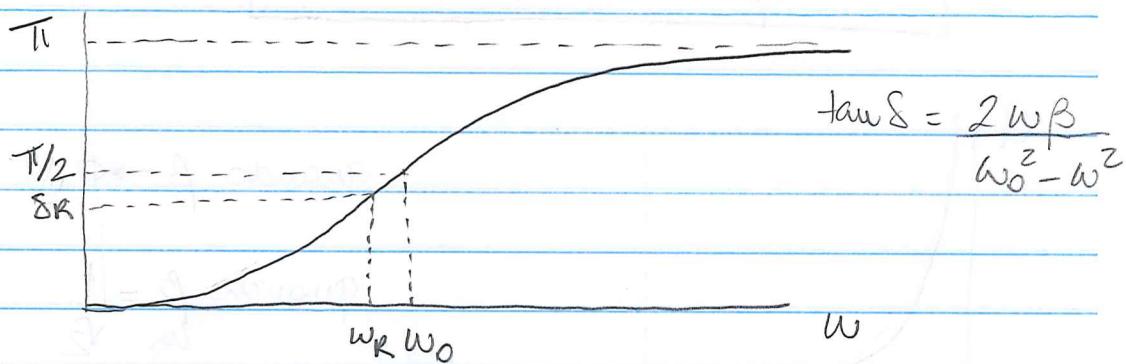
$$w_0^2 - w^2 = 2\beta^2 \Rightarrow \boxed{w_R = \sqrt{w_0^2 - 2\beta^2}}$$

E a amplitude máxima é:

$$D_{\max} = \frac{F_0/m}{2\beta^2 \sqrt{1 + (\omega_0^2/\beta^2 - 2)}}$$

5) A fase δ corresponde a uma diferença entre as oscilações da força e a resposta do oscilador.

δ



• se $\omega = 0 \rightarrow \boxed{\delta = 0}$

• se $\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \rightarrow \boxed{\delta_r = \tan^{-1} \left[\frac{\omega_0^2/\beta^2 - 2}{1} \right]}$

• se $\omega = \omega_0 \rightarrow \boxed{\delta = \pi/2}$

• se $\omega \gg \omega_0 \rightarrow \boxed{\delta \rightarrow \pi}$

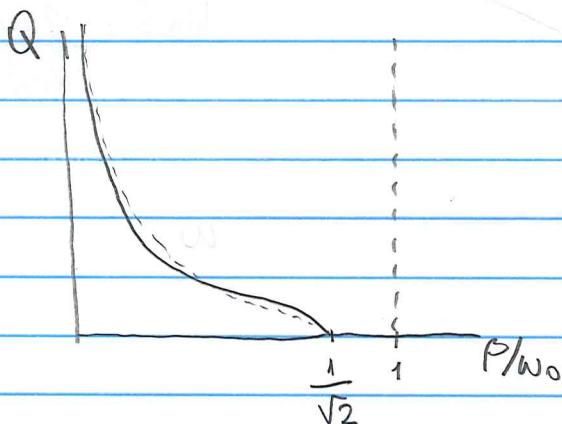
Lembre-se! $\boxed{F = F_0 \cos \omega t}$

$\boxed{x(t) \longrightarrow D \cos(\omega t - \delta)}$
+ grandes

6) O efeito da ressonância é mais notado se o amortecimento não for significativo (β pequeno).

É comum introduzir um parâmetro que mede a importância relativa do amortecimento, chamado FATOR DE QUALIDADE Q :

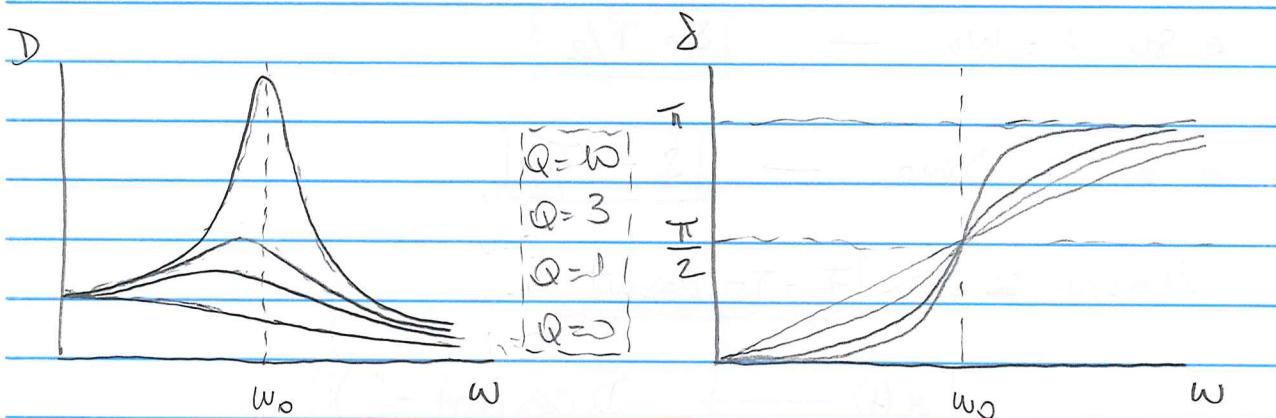
$$Q = \frac{\omega_R}{2\beta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\beta} - 2}$$



quando $\beta \rightarrow 0$: $Q \rightarrow \infty$

quando $\beta = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{2}}$: $Q \rightarrow 0$

Note o que ocorre com D e δ a medida em que Q muda:



7) A energia total não é conservada! Para tempos grandes:

$$\begin{cases} x(t) = D \cos(\omega t - \delta) \\ \dot{x}(t) = -\omega D \sin(\omega t - \delta) \end{cases}$$

$$E(t) = \frac{1}{2} m \left[-\omega D \sin(\omega t - \delta) \right]^2 + \frac{1}{2} k [D \cos(\omega t - \delta)]^2$$

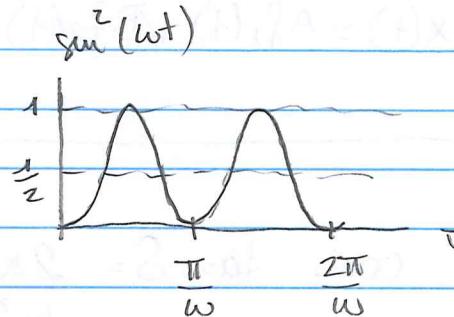
$\downarrow m\omega^2!$

$$E(t) = \frac{1}{2} m D^2 \left[\omega^2 \sin^2(\delta) + \omega_0^2 \cos^2(\delta) \right]$$

→ apenas se $\omega = \omega_0$!

Claramente não é constante. Ache um valor médio p/ a energia, tomando uma média em um período: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

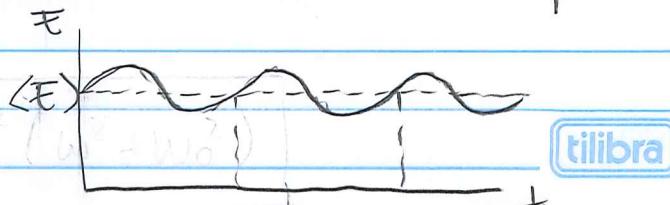
$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t - \delta) dt = \frac{1}{2}$$



$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - \delta) dt = \frac{1}{2}$$

Assim, a energia total média em um período:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{4} m D^2 (\omega^2 + \omega_0^2)$$



● SÉRIE DE FOURIER

Aprendemos a resolver a equação não-homogénea

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

e encontramos

$$x(t) = A f_1(t) + B f_2(t) + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \delta)$$

Da mesma maneira, se fizermos:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

a solução:

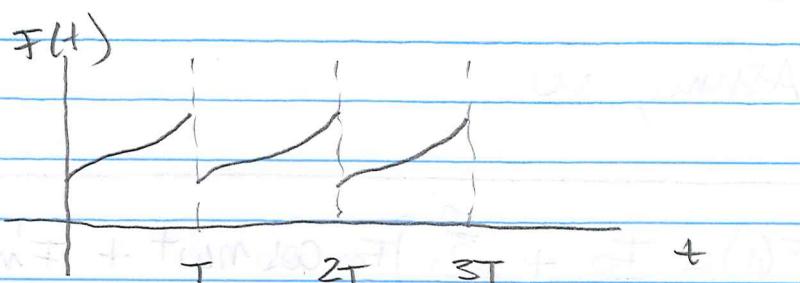
$$x(t) = A f_1(t) + B f_2(t) + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \delta)$$

$$\text{com } \tan \delta = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Apesar de parecer um caso muito resrido,
você pode usar este resultado para uma
variedade muito grande de situações.

Por quê? Uma força $F(t)$ PERIÓDICA qualquer
sempre pode ser escrita como uma soma
de senos e cossenos (síntese de Fourier!)

Veja:



$F(t)$ é uma função periódica com período T . É possível escrever $F(t)$ como uma soma de $\cos wt$ ($w = \frac{2\pi}{T}$) e de seus harmônicos $\cos 2wt$, $\cos 3wt$, etc.

De fato, temos:

$$F(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nwt + b_n \sin nwt]$$

com os coeficientes dados por:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos nwt dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin nwt dt$$

Assim, se $F(t)$ é uma função estranha, periódica, você pode decompô-la em harmônicos, automaticamente determinando a resposta do sistema ($x_p \Rightarrow$ solução particular)

A solução geral será a soma das soluções particulares¹ de cada harmônio.

Assim, su

$$F(t) = \frac{F_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [F_n \cos n\omega t + F'_n \sin n\omega t]$$

terms
constante harmônicos

A Soluções de:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

Suruá 2

$$X(t) = A f_1(t) + B f_2(t) + \frac{1}{m} \left[\frac{F_0}{2\omega_0^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_m \cos(\omega_k t - \delta_m)}{\sqrt{(\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + 4m^2 p_k^2 \omega_0^2}} \right]$$

$$\tan S_n = \frac{2 n w \beta}{w^2 - n^2 w^2}$$

$$+ \frac{F_n^1 \sin(nwt - \delta_n)}{\sqrt{(n_w^2 - \omega^2)^2 + 4\eta_p^2 w^2}}$$

Obs. 1: Devido à forma da $f_1(t)$, $f_2(t)$ a solução homogênea decai a zero rapidamente (componentes transitórios). A tempo longo o sistema oscila conforme a solução particular.

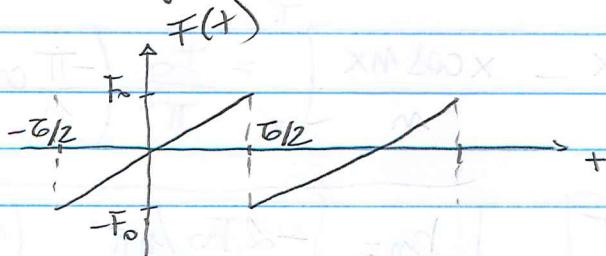
Obs. 2: Pode acontecer que um dos harmônicos tenha frequência exatamente igual à frequência de ressonância $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Neste caso, a resposta do sistema para aquela harmonica se distinguirá dos demais pela sua grande amplitude.

$$x_p(t) = \sum_n a_n D_n \cos(n\omega t - \delta_n) + b_n D_n \sin(n\omega t - \delta_n)$$

$$\approx a_{\bar{n}} D_{\bar{n}} \cos(\bar{n}\omega t - \bar{\delta}_{\bar{n}}) + b_{\bar{n}} D_{\bar{n}} \sin(\bar{n}\omega t - \bar{\delta}_{\bar{n}})$$

$$\text{onde } \bar{n}\omega \approx \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \text{ (freq. ressonante)}$$

Obs. 3: Vea um exemplo de decomposição de força periódica.



$$F(t) = 2\frac{F_0}{\pi} t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{w = \frac{2\pi}{T}}$$

• coefficients de cos nwt:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \cos nwt dt = 0$$

↑
Impar! ↑
par!

• coefficients de sin nwt:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \sin nwt dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \frac{w f_0 + \sin nwt}{\pi} dt$$

Defini: $x = wt$, $dx = wdt$

$$b_n = \frac{f_0}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx$$

$$b_n = \frac{f_0}{\pi^2} \left[\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{f_0}{\pi^2} \left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi - \frac{\pi}{n} \cos(-n\pi) \right)$$

$$\boxed{b_n = -\frac{2f_0}{n\pi} \cos n\pi}$$

$$\boxed{b_n = \begin{cases} -2f_0/n\pi & (n \text{ par}) \\ 2f_0/n\pi & (n \text{ impar}) \end{cases}}$$

Então:

$$f(t) = \frac{2F_0}{\pi} \left[\sin \omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} - \dots \right]$$

VEJA ANEXO NO SITE DO CURSO!

/ /

$\text{Na}_2\text{SO}_4 + \text{BaCl}_2 \rightarrow \text{BaSO}_4 \downarrow + 2\text{NaCl}$

1. **Desenvolva** o seu **projeto** de **experiência** para **criar** um **ambiente** de **aprendizagem** que **motive** os **estudantes** a **aprender** e **desenvolver** suas **habilidades** de **criatividade** e **inovação**.