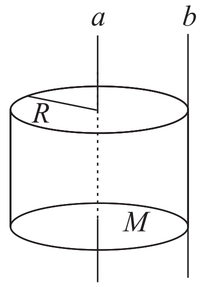
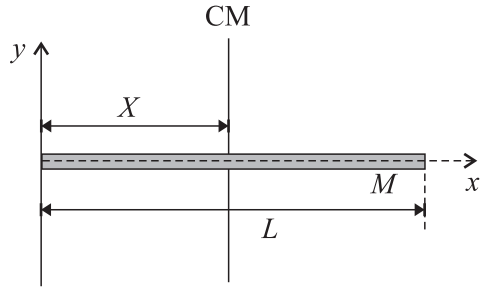
LISTA DE EXERCÍCIOS #4 - MECÂNICA CLÁSSICA I

1. Ache o momento de inércia de uma casca esférica de raio R e massa M em relação a um eixo que passa pelo centro da esfera. A massa está distribuída de forma homogênea sobre a casca.

2. Um cilindro maciço de massa M, raio R e altura L gira em torno de um eixo de rotação que passa pelo centro de massa do mesmo (eixo a) como mostra a figura abaixo.





A massa foi distribuída de forma homogênea pelo cilindro.

(a) Determine o momento de inércia em relação ao eixo a.

(b) Ache o momento de inércia em relação ao eixo b, que é paralelo ao eixo a e passa pela borda do cilindro.

3. A figura anterior mostra uma barra de comprimento total L e massa total M. As outras dimensões da barra não são relevantes ao problema.

(a) Usando o sistema de coordenadas mostrado, ache o centro de massa da barra, e determine o valor de X, supondo que a massa foi distribuída de forma homogênea por ela.

(b) Ache o momento de inércia da barra em relação ao eixo y da figura, ainda supondo que a massa foi distribuída de forma homogênea.

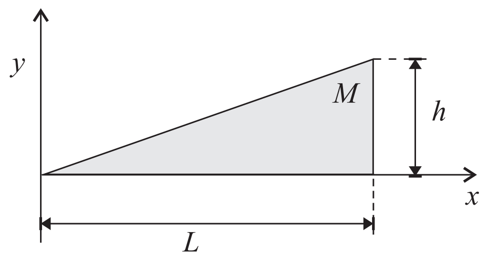
(c) Ache o momento de inércia da barra em relação ao eixo que passa pelo CM e é paralelo ao eixo y, considerando distribuição homogênea para a massa. Em seguida, verifique se o teorema dos eixos paralelos é verificado.

(d) Se a densidade de massa for proporcional ao quadrado da distância entre o elemento de massa e a origem, onde fica o CM e qual o novo valor de X?

(e) Qual o novo valor do momento de inércia em relação ao eixo y, neste caso?

(f) Qual o novo momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo CM?

4. Um triângulo retângulo está disposto como na figura abaixo. Sua massa total vale M, e tem catetos de lados L e h.



(a) Ache os momentos de inércia em relação aos eixos x e y, supondo que a massa foi distribuída de forma homogênea pela área do triângulo.

(b) Considere que a massa foi distribuída de forma proporcional à distância de um ponto do triângulo ao eixo x. Ache y_{CM} e o momento de inércia em relação ao eixo x. Se um eixo paralelo ao eixo x passar pela posição do CM, qual o momento de inércia em relação a esse eixo?

5. Mostre que a energia cinética de um sistema de partículas pode ser escrita como

$$T = \frac{Mv_{CM}^2}{2} + \sum_i \frac{m_i v_i'^2}{2}$$

onde $\vec{v}_{CM}$ é a velocidade do centro de massa, $\vec{v}_i'$ é a velocidade da partícula de massa m_i em relação ao CM, e M é a massa total do sistema.

6. Considere um plano inclinado de altura H e ângulo de elevação θ. No topo do plano são colocados, alternadamente, um cilindro maciço e um oco, ambos de raio R e altura L. Os cilindros descem rolando o plano sem deslizar.

(a) Determine a razão a_{mac}/a_{oco} entre as acelerações dos cilindros.

(b) Determine a razão v_{mac}/v_{oco} entre as velocidades dos centros de massa dos cilindros ao chegar ao final do plano inclinado.

(c) Determine a razão $T_{mac}^{rot}/T_{oco}^{rot}$ entre as energias cinéticas de rotação dos cilindros, ao chegar ao final do plano inclinado.

7. Uma partícula de carga Q e massa m entra numa região onde há um campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\,\hat{\mathbf{k}}$ e um campo elétrico uniforme $\vec{E} = E_0\,\hat{\mathbf{k}}$. A partícula tem velocidade inicial $\vec{v}_0$ e posição inicial $\vec{r}_0$.

(a) Obtenha as equações diferenciais que descrevem o movimento.

(b) Resolva as equações obtidas no item anterior, obtendo $\vec{v}(t)$ e $\vec{r}(t)$.

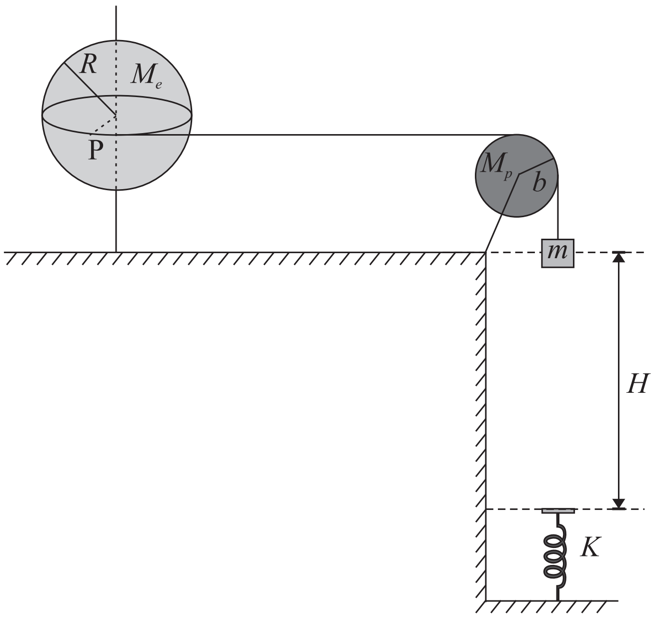
(c) Obtenha a trajetória descrita pela partícula.

8. Considere o problema anterior, só que agora o campo elétrico é modificado para $\vec{E} = E_0\,\hat{\mathbf{i}}$.

(a) Ache as equações diferenciais que descrevem o movimento.

(b) Resolva as equações e ache $\vec{v}(t)$ e $\vec{r}(t)$.

9. A figura abaixo mostra uma montagem experimental que envolve uma esfera maciça de raio R e massa M_e, distribuída de forma homogênea pelo seu volume, uma polia cilíndrica maciça de raio b, altura ℓ e massa M_p também distribuída de forma homogênea pelo volume, um objeto de massa m suspenso sob a ação da gravidade, um fio inextensível de massa desprezível, uma mola de constante K e de massa desprezível. Os objetos estão inicialmente parados, e a distância entre o objeto de massa m e mola vale H. A mola está inicialmente com seu comprimento natural. Parte do fio está enrolado na esfera, e, enquanto eles estão em contato, o fio não desliza sobre ela. Com relação à polia, o fio não desliza por ela enquanto estiver em contato com a esfera. Quando o fio desliza sobre algum objeto, ele não produz nenhuma força ou torque sobre ele. A aceleração gravitacional no local tem módulo g. O fio tem apenas segmentos horizontais ou verticais quando não está em contato com algum objeto. Por hipótese, o fio deixa de estar em contato com a esfera quando a extremidade do fio do lado da esfera passa pelo ponto P ilustrado na figura. Os eixos em que os objetos estão montados são todos sem atrito.



(a) Considere que a polia tenha massa e raio desprezíveis, de modo que ela tem apenas a função de redirecionar forças. Determine a velocidade do objeto de massa m quando ele está a uma distância y abaixo de sua posição inicial. Inclua um diagrama claro mostrando o sistema de coordenadas adotado, incluindo os sentidos para os eixos. Defina claramente onde fica a referência para a energia potencial.

(b) Considere que foi dada uma volta de fio em torno do equador da esfera. Supondo que a distância H seja maior que o perímetro da esfera no equador, mostre que a velocidade do objeto de massa m quando o fio deixa de estar em contato com a esfera vale, em módulo,

$$v = \sqrt{\frac{20\pi m g R}{5m + 2M_e}}$$

(c) Determine a velocidade com que o objeto de massa m chega à mola.

(d) Supondo que H vale o dobro do perímetro do equador da esfera, e que $M_e = 3m/2$, mostre que a máxima compressão da mola vale

$$s = \frac{mg}{K}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{13\pi RK}{2mg}}\right]$$

10. Considere a figura do exercício anterior, com os mesmos dados a respeito dos objetos da montagem.

(a) Agora a polia tem influência sobre o movimento. Determine a velocidade do objeto de massa m quando ele está a uma distância y abaixo de sua posição inicial. Novamente inclua um diagrama mostrando o sistema de coordenadas adotado.

(b) Considerando os parâmetros definidos no item 2b, ache o módulo da velocidade do objeto de massa m quando o fio deixa de estar em contato com a esfera.

(c) Ache $y(t)$ durante a parte do movimento em que o fio está enrolado na esfera.