LISTA DE EXERCÍCIOS #3 - MECÂNICA CLÁSSICA I

1. Um oscilador harmônico simples é formado por um objeto de massa m e por uma mola de constante de mola K e comprimento natural ℓ_0. A mola está fixada ao objeto e a uma parede fixa. O ponto de fixação na parede deve ser considerado como origem do sistema de coordenadas. A aceleração da gravidade, no local, tem valor g, em módulo.

   (a) Considere que o objeto deslize horizontalmente sobre uma superfície sem atrito. Determine a posição de equilíbrio estável, equação diferencial do movimento, frequência angular de oscilação, ache a equação de posição e o período.

   (b) Considere agora que o oscilador esteja na vertical, com o objeto abaixo do ponto de fixação. Determine as mesmas grandezas do item anterior. Quais são modificadas e quais são as mesmas?

2. Um pêndulo simples, com pequeno ângulo de abertura, é formado por um objeto de massa m e uma haste de cobre, de comprimento ℓ_0 em $T_0 = 0°\text{C}$. Este pêndulo passa a ser utilizado a uma temperatura $T_1 = 30°\text{C}$. Qual a razão τ_1/τ_0 entre os períodos deste pêndulo nas duas temperaturas?

3. Um bastão de massa total M é utilizado como pêndulo físico. A distância entre o ponto de fixação e o centro de massa do bastão vale D, e seu momento de inércia em relação ao eixo que passa no ponto de fixação vale I. Monte a equação diferencial do movimento, faça a aproximação de pequenas oscilações na equação diferencial, ache a frequência angular e o período para pequenas oscilações e resolva a equação para achar $\theta(t)$.

4. Um objeto de massa M cai, a partir do repouso, percorrendo uma distância H até atingir uma plataforma de massa desprezível montada sobre uma mola e um amortecedor. Deseja-se atingir uma nova posição de equilíbrio que fica a uma altura h abaixo da posição inicial da plataforma. A ideia é atingir a posição de equilíbrio tão rápido quanto possível sem ultrapassar esta posição. Determine a constante K da mola e o parâmetro b de amortecimento, supondo que a força de amortecimento é do tipo proporcional à velocidade. Em seguida, ache a solução para a posição em função do tempo a partir do instante em que o objeto entra em contato com a plataforma, considerando as condições iniciais corretas ao movimento.

5. Um oscilador harmônico amortecido 1D está em repouso em $t = 0$. Nesse instante, age sobre ele uma força dada por

$$\vec{F} = F_0(1 - e^{-at})\,\hat{\mathbf{\imath}}$$

   A constante de mola vale $K = 4ma^2$, e o parâmetro de amortecimento vale $b = ma$, onde m é a massa do oscilador. Ache $x(t)$, satisfazendo as condições iniciais.

6. Um bloco de massa M_1 está conectado, por meio de uma mola de constante K, a uma parede vertical. O bloco está sobre uma superfície horizontal sem atrito. Sobre o bloco é colocado outro bloco, de massa $M_2 = \alpha M_1$. Entre os blocos o coeficiente de atrito estático vale μ_e.

(a) Supondo que os blocos estejam se movendo de forma conjunta, qual o período de oscilação do sistema?

(b) Qual a maior amplitude A_{max} que permite que os blocos se movam de forma conjunta?

7. Um pêndulo de pequeno ângulo de abertura é formado por um objeto de massa m fixado à ponta de um fio inextensível, de comprimento ℓ. Determine a força centrípeta que age sobre o objeto em função do tempo. Ache também a tração produzida pelo fio. Pode ser necessário utilizar uma expansão, considerando pequenas oscilações. A amplitude máxima do pêndulo vale θ_{max}, e o módulo da aceleração gravitacional vale g.

8. Considere um OHA forçado onde a solução estacionária é dada por

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \cos(\Omega t + \theta_0 - \phi)$$

onde as grandezas ω_0, Ω, γ, θ_0 e ϕ são aquelas definidas em sala de aula.

(a) Ache a velocidade do oscilador.

(b) Ache a energia cinética do oscilador.

(c) Mostre que, sendo τ o período de um ciclo de oscilação, onde $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$,

$$\langle \cos^2(\omega t + \delta) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos^2(\omega t + \delta)\, dt = \frac{1}{2}$$

O cálculo acima determina o valor médio do integrando. Genericamente, para uma grandeza qualquer $G(t)$, seu valor médio é

$$\langle G(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau G(t)\, dt$$

(d) Mostre que o valor médio da energia cinética deste OHA forçado, $\langle T \rangle$, vale

$$\langle T \rangle = \frac{F_0^2}{4m} \frac{\Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}$$

(e) Determine a frequência angular Ω_T onde ocorre o máximo de $\langle T \rangle$. Essa frequência coincide com a frequência de ressonância Ω_R?

9. Considere um OHA forçado cuja amplitude seja dada por

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}$$

Suponha que o amortecimento deste OHA seja fraco. Sejam $\Omega_{1,2}$ as frequências onde ocorre $\frac{A(\Omega_R)}{\sqrt{2}}$, e onde Ω_R é a frequência de ressonância. Definindo $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ ($\Omega_2 > \Omega_1$), mostre que, neste caso, o fator de qualidade $\mathcal{Q}$ pode ser escrito como

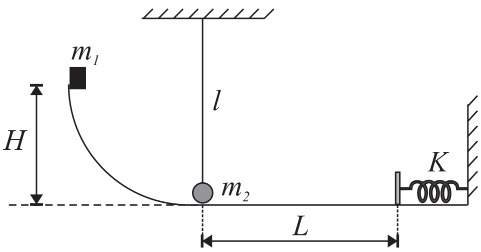
$$\mathcal{Q} = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega}$$

10. Um OHA unidimensional é submetido a uma força externa dada por

$$F = F_0 + F_1 t + F_2 e^{-2t}$$

Obtenha a solução particular para este oscilador. Considerando que ele é subamortecido, monte a solução geral do problema. Os parâmetros do oscilador são os mesmos que os definidos em sala.

11. A figura abaixo ilustra um esquema envolvendo uma pista circular, um objeto de massa m_1, uma mola de constante K e um pêndulo de comprimento ℓ e massa m_2. Na parte horizontal da pista, há atrito apenas na parte que tem uma extensão L. O módulo da aceleração gravitacional vale g.



(a) Determine a velocidade da massa m_1 logo antes de atingir a massa m_2, na parte final da parte curva, que é horizontal.

(b) Logo após a colisão entre m_1 e m_2, quais as velocidades destes objetos?

(c) A massa m_2 sobe até uma altura h_2. Qual é essa altura?

(d) Qual é o ângulo de abertura θ_{max} deste pêndulo?

(e) Qual a condição para que a massa m_1 consiga atingir a mola, considerando que, na figura, ela está com seu comprimento natural? O coeficiente de atrito cinético da parte horizontal vale μ_c.

(f) Supondo que m_1 atinja a mola, qual é a compressão máxima d que se consegue realizar na mola?