3. LINEARIZAÇÃO DE GRÁFICOS

Quando os pontos experimentais não estão alinhados ao longo de uma reta os métodos descritos anteriormente não podem ser usados diretamente, mas em alguns casos é possível fazer uma transformação de variáveis e desenhar outro gráfico em que os pontos estejam alinhados. Os métodos de ajuste de reta podem então ser usados nesse segundo gráfico. A vantagem de se fazer esse tipo de transformação é a simplicidade que o comportamento linear apresenta.

A mudança de variáveis necessária depende da relação entre as grandezas. Em geral a transformação deve ser sugerida por um modelo teórico. Se isso não for possível ela tem que ser descoberta, se existir, por tentativas. Os tipos de funções mais comuns encontradas nas relações das grandezas físicas estão apresentados nas figuras a seguir.

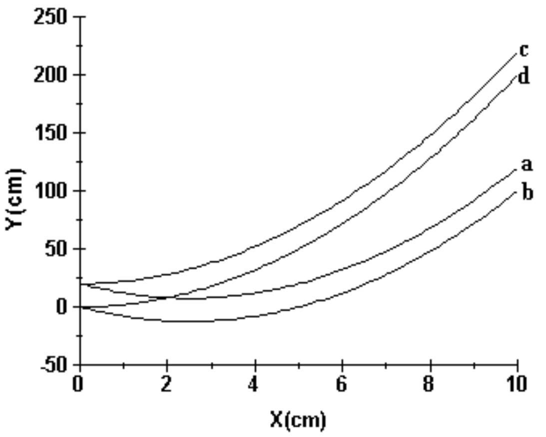


Figura 1 – Gráfico das funções do tipo $y(x) = ax^2 + bx + c$, correspondendo a: a) $y(x) = 2x^2 - 10x + 20$; b) $y(x) = 2x^2 - 10x$ c) $Y(x) = 2x^2 + 20$; d) $Y(x) = 2x^2$

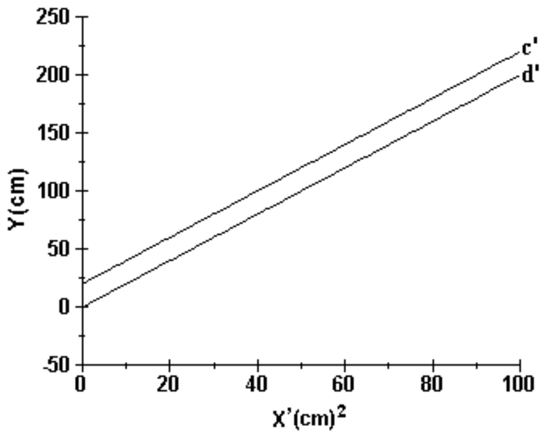


Figura 2 – Gráficos da linearização das curvas (c) e (d) da Figura 1, fazendo a mudança de variável $X' = x^2$, tem-se: c') $Y(X') = 2X' + 20$ e d') $Y(X') = 2X'$

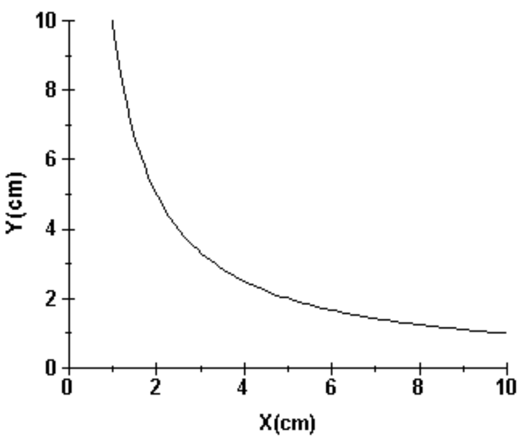


Figura 3 – Gráfico da função $y(x) = a\,(1/x)$,

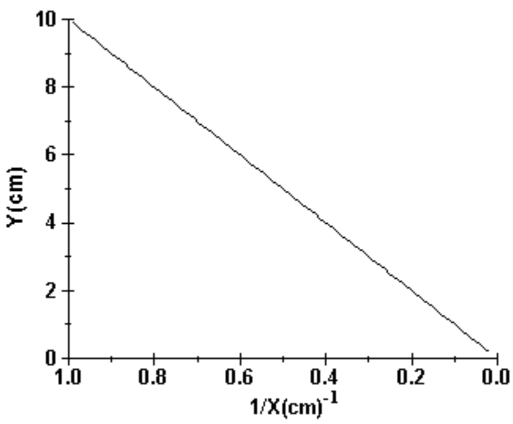


Figura 4 – Gráfico de linearização da função $Y(x) =$

especificamente $Y(x) = 10 / x$

$10/x$. Fazendo $X' = 1/x$, temos $Y(X') = 10X'$.

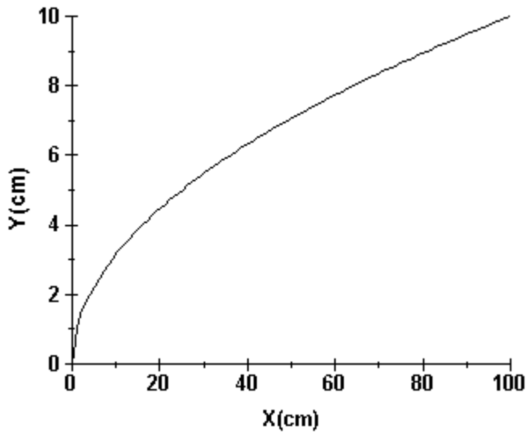


Figura 5 – Gráfico da função $y(x) = x^n$, n = 1/2

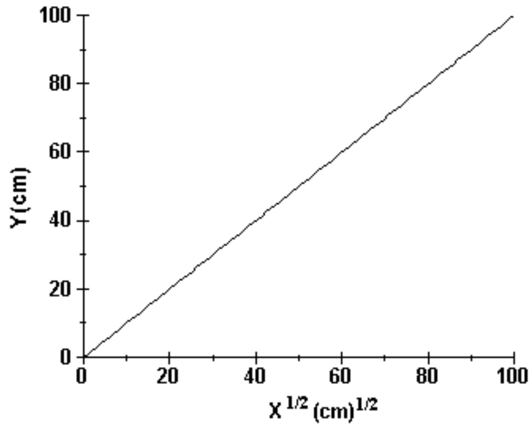


Figura 6 – Linearização da função $y(x) = x^{1/2}$. Fazendo a mudança de variável $X' = x^{1/2}$, temos $Y(X') = X'$.

Um tipo importante de função que pode ser linearizada por mudança de variável é a exponencial. Se tivermos a relação $y = Ae^{Bx}$ podemos aplicar o logaritmo em ambos os lados da equação, resultando $\ln y = \ln A + Bx$. Logo, podemos fazer a transformação $y' = \ln y$ e obter uma dependência linear entre y' e x. Um exemplo aparece nas figuras 7 e 8. O gráfico linearizado (Figura 8) usa uma escala logarítmica em vez de linear (Figura 7), onde a distância do ponto ao eixo varia proporcionalmente ao logaritmo do valor e não proporcionalmente.

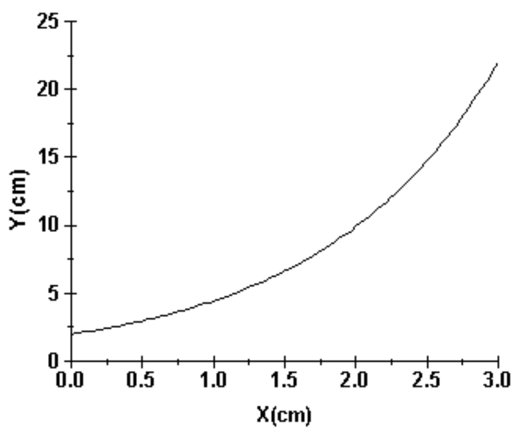


Figura 7 – Gráfico da função $y(x) = 2\exp(0{,}8x) = 2e^{0{,}8x}$

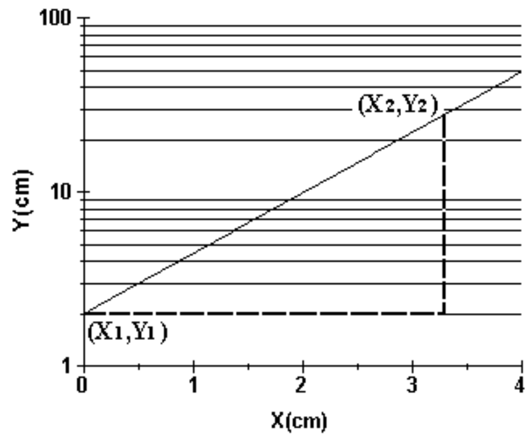


Figura 8 – Gráfico em papel monolog de $Y(x) = 2e^{0{,}8x}$

Outro tipo de função que pode ser linearizada por uma transformação logarítmica é a função, potência, $y = ax^{\alpha}$ (Figura 9). Essa função pode ser linearizada por uma mudança direta de variável $x' = x^{\alpha}$. Porém quando α não é inteiro muitas vezes é difícil descobrir seu valor. Usando uma transformação logarítmica obtemos $\ln y = \ln a + \alpha \ln x$. Aqui é preciso definir $y' = \ln y$ e $x' =$

$\ln x$ para obter uma relação linear entre y' e x', que permite determinar o parâmetro α pelo coeficiente angular do gráfico $y' \times x'$. Como agora é preciso usar o logaritmo nos dois eixos usa-se um papel log-log para o gráfico, como mostrado na figura 10.

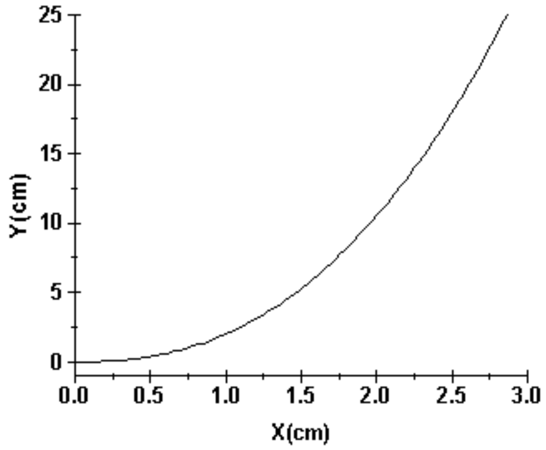


Figura 9 – Gráfico da função $Y(x) = Ax^{B} = 2x^{2,4}$.

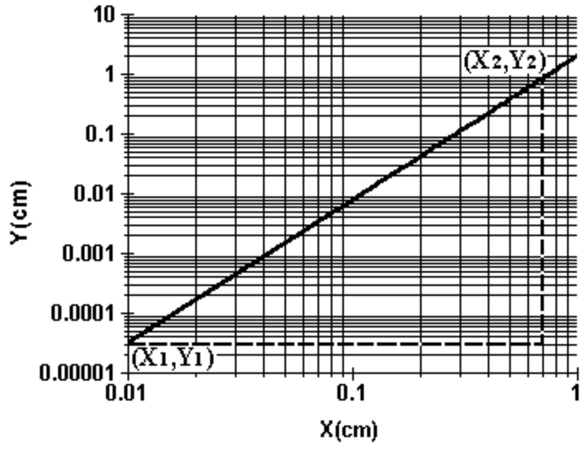


Figura 10 – Gráfico em papel log-log de $Y(x) = 2\,x^{2,4}$.

Interpolação

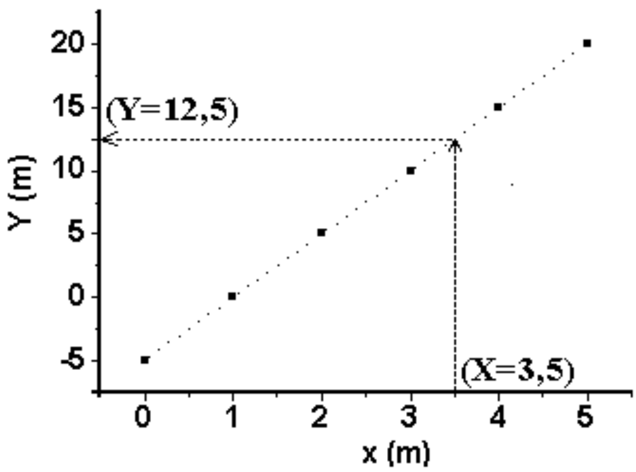


Figura 11 - Gráfico exemplificando a interpolação.

Conhecendo-se o gráfico ou a função que representa o conjunto de pontos experimentais, pode-se obter uma das grandezas em função da outra, para qualquer ponto dentro do intervalo representado (ou medido).

Regra:

a) localiza-se o ponto sobre o eixo *X*.

b) com auxílio de uma régua, procure o ponto sobre a curva correspondente e localize a ordenada *Y*.

Extrapolação

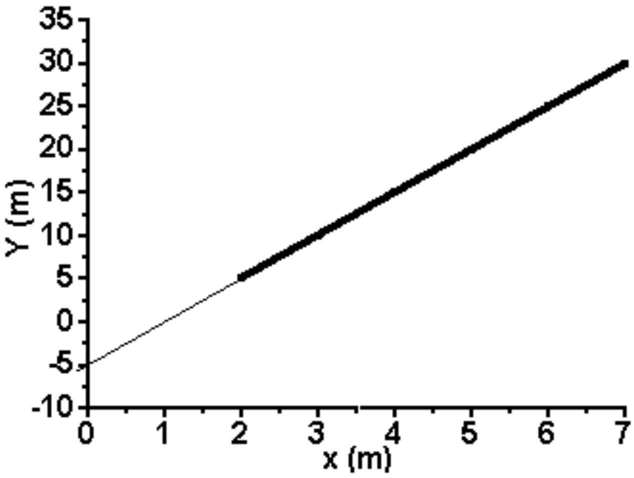


Figura 12 - Gráfico de uma função linear.

É o processo pelo qual se faz o prolongamento da curva para outra região, fora daquela medida. Este procedimento só é confiável quando a curva é representada por uma reta, caso contrário, pode-se ter erros apreciáveis no resultado obtido.

A linha fina corresponde à extrapolação da reta para se determinar o valor de b (coeficiente linear), no caso igual -5 m.

Referências

- Furtado, N. F.; Física (apêndice Física – Sears), LTC (1959).
- Baikd, D. C, Experimentation: "Introduction to Measurement Theory and Experiment Design"; Prentice Hall (1988)
- Wilton P. Da Silva, Cleide M.D. P. S. E Silva; "Tratamento de Dados Experimentais"; Ed. Universitária da UFPB (1995).

Exercícios

1) Para os dados da tabela abaixo, trace o gráfico de y versus x em papel milimetrado, representando também o desvio de y e considerando as medidas de x isentas de erro.

a) Qual deve ser o tipo de função que descreve y em função de x?

b) Qual a expressão que relaciona as grandezas y e x?

Pontos	1	2	3	4	5
x (m)	1	3	5	7	9
y (m)	4,8	14,3	26,4	34,5	44,5

2) Dados os pontos tabelados abaixo:

Pontos	1	2	3	4	5	6	7
x (m)	2	4	8	16	32	64	128
y (m)	4,24	6,00	8,48	12,00	16,97	24,00	33,94

a) Faça o gráfico de $y(x)$ em papel milimetrado.

b) Supondo a forma $y = ax^b$ linearize a curva do "item a" por mudança de variáveis. Faça o gráfico de $y'(x')$ num papel milimetrado e obtenha as constantes a e b a partir deste gráfico.

Sugestão: no item "b" ajuste a reta graficamente.

3) Dados os pontos tabelados abaixo:

Pontos	1	2	3	4	5
x (s)	0,2	0,6	0,8	1,0	1,2
y (m)	2,2	5,0	7,4	11	16,5

a) Faça o gráfico de $y(x)$ em papel milimetrado.

b) Supondo a forma $y = \alpha e^{\beta x}$ linearize a curva do "ítem a" por mudança de variáveis. Faça o gráfico de $y'(x')$ num papel milimetrado e obtenha as constantes α e β a partir deste gráfico. *Sugestão: no item "b" ajuste a reta graficamente*.

4) No laboratório dispõe-se de uma mola com constante elástica k desconhecida e pretende-se obter seu valor. O método empregado foi suspender pela mola diversas massas m e medir sua deformação y. Os resultados estão na tabela 1.

Tabela 1 – Dados de deformação da mola.

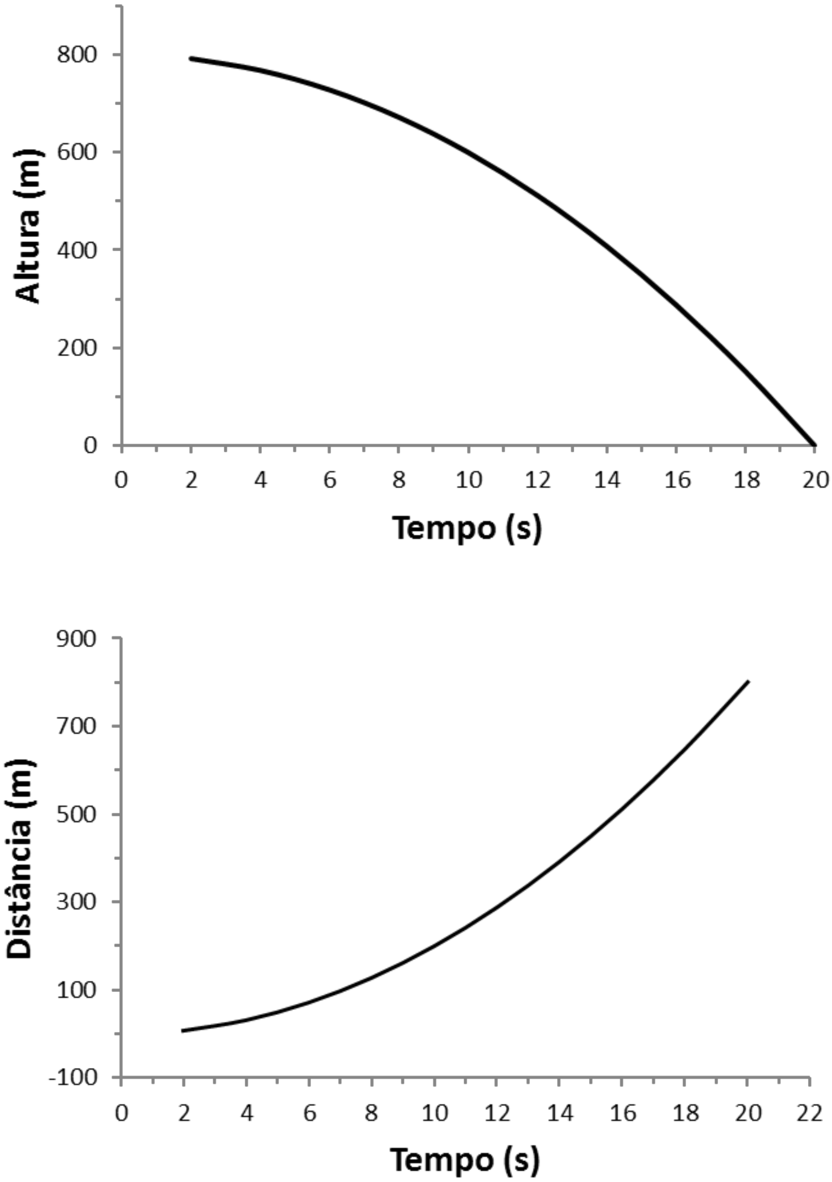
m (g)	y (mm)
12	4
30	10
60	18
80	25
100	30

a) Determine os parâmetros da reta em função das grandezas físicas representadas nos eixos (método analítico).
b) Trace essa reta no gráfico.
c) Qual o valor da constante elástica da mola?

d) Por que o coeficiente linear obtido da melhor reta deveria ser nulo? Se não for nulo, qual a justificativa?

5) Observe detalhadamente os gráficos da figura 13. Ambos representam dados experimentais de um evento físico.

Figura 13 – Curvas para levantamento de pares ordenados.



a) Escreva a função matemática genérica que estes gráficos representam.

b) Conhecendo-se a função matemática, é possível linearizar estes gráficos. Para tanto você precisa conhecer vários pares ordenados correspondentes a cada curva. Determine 10 pares ordenados para cada gráfico.

c) Aplique o processo de mudança de variáveis para linearizar os dois gráficos.

d) Identifique a partir dos gráficos que tipo de evento físico você acha que eles representam.

e) Respondido o item anterior, determine os parâmetros de cada evento físico.

6) Numa largada de Fórmula 1, no início de uma reta, o primeiro carro ("pole position") está a cerca de 10 m de uma marca no asfalto (linha de chegada), a partir da qual é disparado o cronômetro de cada carro. Os demais carros estão espaçados de 10 m, de tal forma que o segundo está a 20 m da marca no asfalto, o terceiro a 30 m e assim por diante. Desta forma todos os carros terão uma velocidade inicial quando passarem pela linha de chegada. A partir da linha de largada, a cada 100 m, foi medido o tempo gasto pelo carro de Rubens Barrichello, como mostra a tabela 2.

a) Faça o gráfico $S \times t$. Este gráfico é uma reta, uma curva ou tem ambas reta e curvas?

b) A cada segmento de reta ou curva corresponde um tipo de movimento diferente. Você pode identificá-los a partir do gráfico?

c) Qual seria a equação horária genérica para cada segmento característico do gráfico?

d) Faça um gráfico de Velocidade × Tempo. Neste gráfico há segmentos diferentes? Se há, são retas ou curvas?

e) Identifique o tipo de movimento para cada segmento característico do gráfico.

f) A partir do gráfico $V \times t$ qual a aceleração do carro de Rubens? Esta aceleração é constante ou variável? Determine-a.

g) Qual a velocidade de Rubens ao passar pela linha de chegada?

h) Escreva a equação horária do carro de Rubens para cada tipo de movimento.

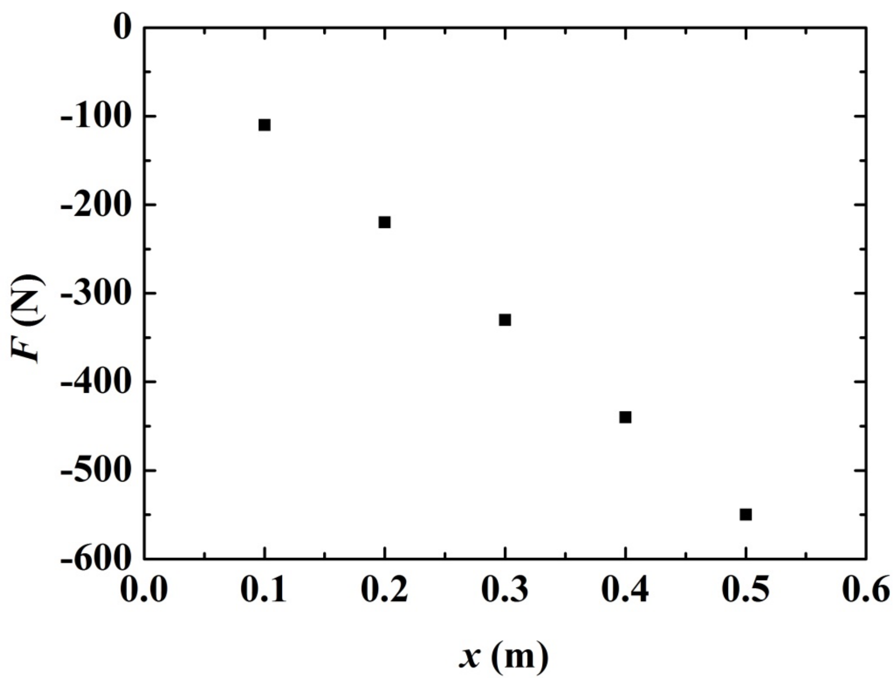
i) Qual a posição no "grid" de largada de Rubens Barrichelo?

Tabela 2 – Posição e velocidade do carro de Rubens Barrichelo.

S (m)	t (s)	V (m/s)
-50	0	0
0	3,5	28,3
100	6,1	49,0
200	7,9	63,2
300	9,4	74,8
400	10,6	84,9
500	11,7	93,8
600	12,7	102,0
700	13,7	109,5
800	14,6	109,5
900	15,5	109,5
1000	16,4	109,5
1100	17,3	109,5
1200	18,3	109,5
1300	19,2	109,5
1400	20,1	109,5
1500	21,0	109,5

7) Um experimento de laboratório foi realizado para se determinar a constante elástica k desconhecida de uma mola, prendendo-se a uma de suas pontas um corpo de massa m desconhecida. Suponha que as forças dissipativas são desprezíveis. Considere g = 9,79 m/s^2.

a) Colocando-se o sistema massa-mola numa superfície horizontal sem atrito e puxando-o com diferentes forças conhecidas, mediram-se suas respectivas deformações, tomando-se como referência o comprimento indeformado da mola. Com os dados obtidos, foi feito o seguinte gráfico:



Baseando-se no gráfico acima, determine:

a.I) A escala do eixo X: ______________ a.II) A escala do eixo Y: ______________

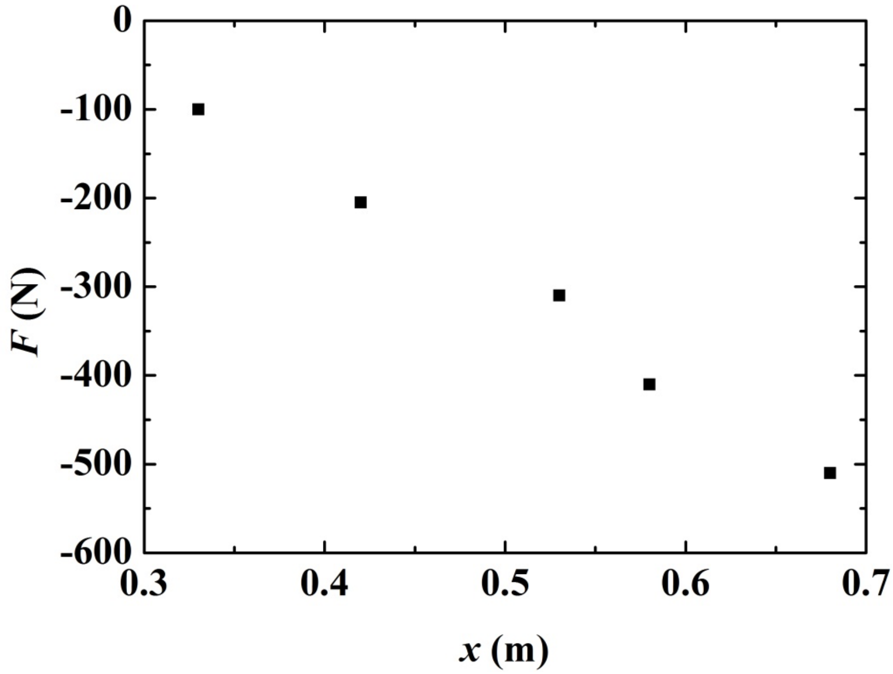
a.III) Monte a tabela de dados e, utilizando o MMQ, determine os coeficientes angular e linear da reta que melhor se ajusta a estes pontos:

x ( )	y ( )	$\delta x_i = (x_i - \bar{x})$	$\delta y_i = (y_i - \bar{y})$	$(\delta x_i)^2$	$\delta y_i \delta x_i$
$\bar{x} =$	$\bar{y} =$		Σ		

a.IV) Trace a reta ajustada pelo MMQ no gráfico acima.

a.V) Determine a constante elástica da mola k:

b) Suspendendo-se o sistema massa-mola na vertical, mas tomando-se como referência o mesmo comprimento indeformado do item (a), submeteu-se o sistema às mesmas forças anteriores e mediram-se suas respectivas deformações. Com os dados obtidos, foi feito o seguinte gráfico:



Baseando-se no gráfico acima, determine:

b.I) A escala do eixo X: _____________

b.II) A escala do eixo Y: _____________

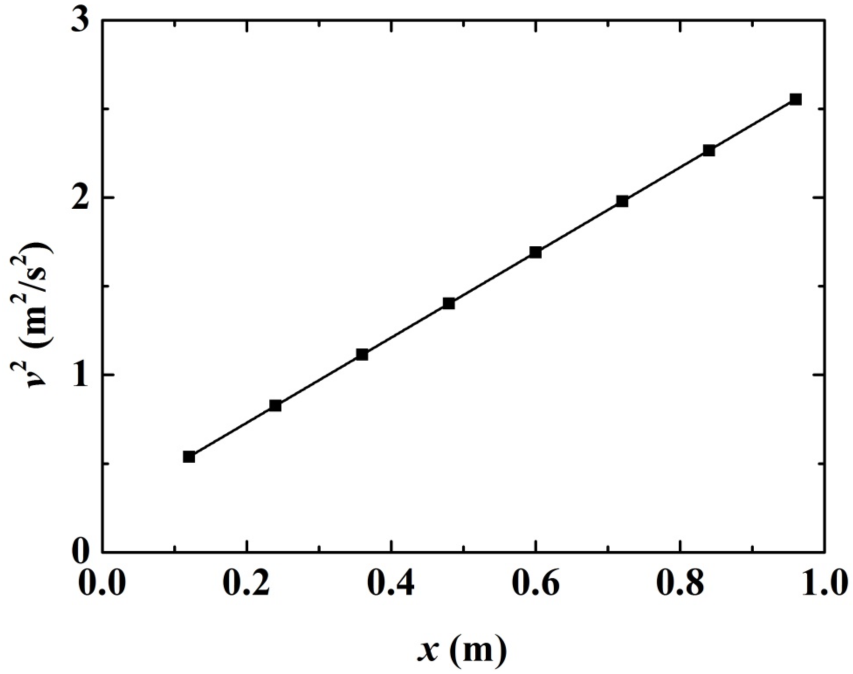
b.III) Monte a tabela de dados e, utilizando o MMQ, determine os coeficientes angular e linear da reta que melhor se ajusta a estes pontos:

x ( )	y ( )	$\delta x_i = (x_i - \bar{x})$	$\delta y_i = (y_i - \bar{y})$	$(\delta x_i)^2$	$\delta y_i \delta x_i$
$\bar{x} =$	$\bar{y} =$		Σ		

b.IV) Trace a reta ajustada pelo MMQ no gráfico acima.

b.V) Determine a massa *m* do corpo preso à mola:

8) Num experimento de Cinemática, a velocidade de um carrinho acelerado foi medida em função da sua posição, produzindo o gráfico abaixo, cuja reta representa o melhor ajuste aos pontos experimentais.



Determine:

a) A escala do eixo X: _____________

b) A escala do eixo Y: _____________

c) Graficamente o coeficiente linear da reta:

d) Graficamente o coeficiente angular da reta:

e) A velocidade inicial do carrinho:

f) A aceleração do carrinho.

9) Dado o gráfico abaixo, trace a reta que se ajusta aos pontos experimentais utilizando o método do bom senso. Determine os coeficientes linear e angular da reta ajustada.