Esta equação costuma ser chamada de *princípio de Jacobi* ou forma de Jacobi do princípio de Maupertuis. No caso de uma só partícula, $d\rho$ é proporcional à distância infinitesimal em três dimensões em coordenadas curvilíneas arbitrárias, e o princípio de Jacobi torna-se idêntico ao princípio de Fermat da óptica geométrica para a propagação da luz num meio não-homogêneo com índice de refração proporcional a $\sqrt{E-V}$. Outros aspectos ainda mais significativos da analogia entre a mecânica clássica e a óptica geométrica serão explorados no Capítulo 9.

Quando T é constante, o princípio de Maupertuis na forma de Jacobi afirma que o sistema segue a trajetória de menor comprimento no espaço de configuração, isto é, a trajetória física é uma *geodésica* do espaço de configuração. Para uma partícula livre em três dimensões o espaço de configuração confunde-se com o espaço físico tridimensional: as geodésicas são linhas retas, correspondendo ao fato de a partícula descrever um movimento retilíneo uniforme.

■ **Exercício 7.6.1.** Uma partícula move-se livremente no espaço tridimensional, exceto pela restrição de permanecer sobre uma superfície fixa. Mostre que a partícula segue uma geodésica da superfície. ■

Problemas Sugeridos

PROBLEMAS

7.1. Uma massa m oscila num plano vertical fixo suspensa por um fio de massa desprezível que passa por um orifício numa mesa horizontal. O fio é puxado através do orifício a uma taxa constante, de tal modo que o comprimento pendente no instante t é $r = \ell - \alpha\, t$, onde ℓ e α são constantes positivas. Escolhendo o ângulo que o fio faz com a vertical como coordenada generalizada, encontre a hamiltoniana do sistema. A hamiltoniana é a energia total? A hamiltoniana é constante de movimento?

7.2. Dada a hamiltoniana $H = p^2/2m + \mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + V$, com $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ e $V = V(\mathbf{r})$, encontre a lagrangiana correspondente. No caso $V = -\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}$ com $\mathbf{a}$ e $\mathbf{F}$ vetores constantes, obtenha a solução das equaçõesde Hamilton com as condições iniciais $\mathbf{r}(0) = 0$ e $\mathbf{p}(0) = 0$.

7.3. Dada a hamiltoniana $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1 p_1 - q_2 p_2 - a\, q_1^2 + b\, q_2^2$, prove que

$$F_1 = \frac{p_2 - bq_2}{q_1} \quad , \quad F_2 = q_1 q_2 \quad , \quad F_3 = q_1 e^{-t}$$

são constantes de movimento. Obtenha uma quarta constante de movimento independente destas três e, usando-as, determine a solução das equações de movimento, isto é, $q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t)$ em termos de quatro constantes arbitrárias.

7.4. Se a hamiltoniana H e uma quantidade F são constantes de movimento, prove que $\partial F/\partial t$ é constante de movimento. Estenda este resultado para $\partial^n F/\partial t^n$.

7.5. Uma partícula num campo gravitacional uniforme está restrita à superfície de uma esfera centrada na origem. O raio da esfera varia com o tempo de uma forma especificada *a priori*: $r = r(t)$ com $r(t)$ uma função conhecida. Obtenha a hamiltoniana e as equações canônicas de Hamilton. A hamiltoniana é a energia total? Discuta a conservação da energia.

7.6. (i) Dada a lagrangiana

$$L = \frac{\dot{Q}^2}{2}\cos^2\omega t - \frac{\omega}{2}Q\dot{Q}\,\mathrm{sen}\,2\omega t - \frac{\omega^2 Q^2}{2}\cos 2\omega t \ ,$$

encontre a hamiltoniana correspondente. (ii) Esta hamiltoniana é constante de movimento? (iii) Obtenha a hamiltoniana em termos da nova variável $q = Q\cos\omega t$ e de seu momento canônico conjugado. Esta nova hamiltoniana é constante de movimento? Que sistema físico ela representa?

7.7. Considere o problema de N corpos em interação gravitacional do ponto de vista do sistema de referência do centro de massa. A hamiltoniana é dada por $H = T + V$, onde $T = \sum_i |\mathbf{p}_i|^2/2m_i$ e

$$V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \frac{G m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \ .$$

(i) Introduza a quantidade $I = \frac{1}{2}\sum_i m_i |\mathbf{r}_i|^2$ e prove que $\ddot{I} = E + T$. Sugestão: comprove que V é uma função homogênea e aplique o teorema de Euler do Apêndice B. (ii) Levando em conta que T é uma quantidade sempre positiva, prove, fazendo duas integrações sucessivas, que $I(t) \geq I(0) + \dot{I}(0)t + Et^2/2$. Conclua, finalmente, que se a energia total for positiva pelo menos um dos corpos escapará para o infinito no limite $t \to \infty$.

7.8. Considere um planeta descrevendo uma órbita elíptica em torno do Sol, com as coordenadas escolhidas de modo que o plano do movimento tenha $\theta = \pi/2$. Pela Eq.(7.1.15), em coordenadas polares no plano orbital a hamiltoniana escreve-se

$$H = T + V = \frac{1}{2m}\Big(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\Big) - \frac{k}{r} \ ,$$

com $k > 0$. Aparentemente o teorema do virial é válido quaisquer que sejam as variáveis canônicas empregadas. Mostre que

$$\sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_r \frac{\partial H}{\partial p_r} + p_\varphi \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{m}\Big(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\Big) = 2T$$

e, da mesma forma,

$$\sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} = r\frac{\partial H}{\partial r} + \varphi \frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{p_\varphi^2}{mr^2} - V \ .$$

Substituindo esses resultados em (7.3.3) deduza

$$2\langle T\rangle = -\langle V\rangle - \langle \frac{p_\varphi^2}{mr^2}\rangle$$

e, por comparação com (7.3.11),

$$\langle \frac{p_\varphi^2}{mr^2}\rangle = 0 \ .$$

Usando o fato de p_φ ser constante de movimento, e diferente de zero para órbitas elípticas, conclua que

$$\langle \frac{1}{r^2}\rangle = 0 \ .$$

Argumente que este resultado é impossível. Examinando cuidadosamente a demonstração e as condições de validade do teorema do virial, explique as razões pelas quais o seu emprego em coordenadas polares conduz a um resultado absurdo (Chagas & Lemos 1981).

7.9. O movimento de certas turbulências no hélio líquido é descrito aproximadamente pela hamiltoniana $H(x,p) = A\sqrt{p} - Fx$, A e F constantes. (i) Encontre a solução geral das equações de Hamilton. (ii) Determine a lagrangiana associada a esta hamiltoniana.

7.10. Construa a hamiltoniana associada à lagrangiana do Problema 1.1. H é a energia total? H é constante de movimento?

7.11. Uma partícula de carga e move-se num potencial central $V(r)$ superposto a um campo magnético uniforme $\mathbf{B}$, cujo potencial vetor é $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$. (a) Mostre que, se $\mathbf{B}$ for um campo fraco, de modo que efeitos proporcionais a B^2 possam ser desprezados,

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \ ,$$

onde

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2mc} \mathbf{r} \times \mathbf{p} \ .$$

(b) Escreva as equaçõesde Hamilton nesta aproximação.

7.12. Um sistema físico é descrito pela lagragiana

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + a\rho^2 \dot{\varphi} \ ,$$

onde (ρ, φ, z) são coordenadas cilíndricas e a é uma constante. (a) Determine H. (b) Identifique três constantes de movimento. (c) Mostre que a solução da equação radial pode ser reduzida a uma quadratura da forma

$$t = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\alpha - (\beta - a\rho^2)^2 / m^2 \rho^2}} \ ,$$

sendo α e β constantes.

7.13. Partindo da formulação hamiltoniana, obtenha outra formulação da mecânica usando como variáveis $p, \dot{p}$ e uma função $Y(p, \dot{p}, t)$. Construa a transformação de Legendre que leva $H(q,p,t)$ a $Y(p, \dot{p}, t)$ e deduza as equações de movimento em termos de Y. Aplique ao caso particular $H = p^2/2 + \omega^2 q^2/2$ e comente os resultados obtidos.

Figura 7.7.2: Problema 7.15.

7.14. Para uma partícula livre a hamiltoniana é simplesmente $H = T$, e as equaçõesde Hamilton escrevem-se $\dot{p}_i = -\partial T/\partial q_i$. Na formulação lagrangiana, $L = T$ e as equações de Lagrange são

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \equiv \dot{p}_i = +\frac{\partial T}{\partial q_i} \ .$$

Como é possível conciliar estas duas expressões distintas para $\dot{p}_i$?

7.15. Uma corda inextensível, leve, de comprimento ℓ passa por uma roldana de massa desprezível e tem uma massa $2m$ presa a uma de suas extremidades. Na outra extremidade há uma massa m e, sob ela, suportada por uma mola de constante elástica k e comprimento natural zero, uma segunda massa m . Usando q_1 e q_2 como coordenadas generalizadas (ver figura), mostre que, a menos de um termo constante sem relevância, a lagrangiana é

$$L = 2m\dot{q}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{q}_2^2 + m\dot{q}_1\dot{q}_2 + mgq_2 - \frac{k}{2}q_2^2 \ .$$

Encontre a hamiltoniana e as equações de Hamilton. Se o sistema é liberado a partir do repouso com $q_1(0) = a$ e $q_2(0) = 0$, determine $q_1(t)$ e $q_2(t)$.

7.16. Na eletrodinâmica de Weber a força entre duas cargas em movimento é gerada pelo potencial generalizado

$$U(r, \dot{r}) = \frac{ee'}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{2c^2}\right) \ ,$$

onde r é a distância entre as cargas. Considere uma partícula movendo-se num plano sob a ação deste potencial. Usando coordenadas polares, encontre a hamiltoniana $H(r, \theta, p_r, p_\theta)$ e as equações de Hamilton. Mostre que p_θ é constante e reduza o problema radial a uma equação diferencial de primeira ordem para r.

7.17. O movimento de uma partícula num potencial central $V(r)$ é descrito num referencial que gira com velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$, em relação a um referencial inercial, em torno de um eixo passando pelo centro de força. (a) Mostre que o momento conjugado ao vetor posição $\mathbf{R}$ ($= \mathbf{r}$, mas visto do referencial girante) é $\mathbf{P} = m[\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}]$, onde $\mathbf{V}$ é a velocidade relativa ao referencial girante. (b) Construa a função hamiltoniana $H(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{V} - L$, onde $L = mv^2/2 - V(r)$. (c) Mostre que H tem o valor conservado $E - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}$, onde E é a energia e $\mathbf{L}$ é o momento angular (conservado no referencial inercial). (c) Note, no entanto, que $H \neq mV^2/2 + V(R)$.