## 5.11 *Exercícios*

1. (a) Encontre uma função geratriz do tipo $F_3$ para a transformação identidade.
   (b) Seja $Q = Aq$ uma transformação pontual (as novas posições dependem apenas das posições originais) com $A$ uma matriz $n \times n$ ortogonal de coeficientes constantes. Mostre que os novos momentos são dados pela mesma matriz aplicada no vetor composto pelos velhos momentos mais um gradiente no espaço de coordenadas.

2. Mostre que a matriz $M = \partial\zeta/\partial\eta$ para a transformação

$$Q_1 = q_1 \qquad P_1 = p_1 - 2p_2$$
$$Q_2 = p_2 \qquad P_2 = -2q_1 - q_2$$

é simplética. Encontre a função geratriz (problema 8).

3. Mostre que a transformação

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\,\text{sen}\,Q, \qquad p = \sqrt{2Pm\omega}\cos Q$$

satisfaz $\{Q,P\}_{q,p} = 1$ e $\{q,p\}_{Q,P} = 1$.

4. Mostre que a transformação $(q,p) \to (Q,P)$ gerada por $F_1(q,Q)$ satisfaz $\{Q,P\}_{q,p} = 1$. Faça o cálculo para um grau de liberdade apenas.

5. Mostre que a transformação

$$Q = p + iaq, \qquad P = \frac{p - iaq}{2ia}$$

é canônica e encontre uma função geratriz. Use essa transformação para resolver o oscilador harmônico.

6. A Hamiltoniana de um sistema tem a forma

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2q^4\right).$$

Encontre uma transformação canônica que reduza $H$ à forma de um oscilador harmônico. Escreva a solução $q = q(t)$.

7. Um sistema com dois graus de liberdade é descrito pela Hamiltoniana

$$H = q_1p_1 - q_2p_2 - aq_1^2 + bq_2^2.$$

Mostre que

$$F_1 = \frac{p_1 - aq_1}{q_2} \qquad \text{e} \qquad F_2 = q_1 q_2$$

são constantes do movimento. É possível encontrar outras constantes de movimento independentes usando a identidade de Jacobi entre $F_1$, $F_2$ e $H$?

8. Mostre, usando a condição de constante de movimento via parênteses de Poisson, que o vetor de Laplace-Runge-Lenz

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk\mathbf{r}}{r}$$

é uma constante do movimento para o problema de Kepler

$$H = p^2/2m - k/r.$$

9. Calcule a evolução temporal de um ensemble Gaussiano sob a ação de um potencial harmônico (veja a seção 4.8). Calcule o desvio quadrático médio $\Delta q(t)$ e mostre que ele é periódico com metade do período do oscilador. Mostre que para uma escolha apropriada das larguras da distribuição inicial $\Delta q$ fica independente do tempo.

## 6.10 *Exercícios*

1. Uma partícula move-se em uma dimensão no potencial $V(x) = k/x^2$, $k > 0$. Determine $x(t)$ pelo método de Hamilton-Jacobi se $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$.

2. Uma partícula com energia total positiva move-se em uma dimesão sob a ação do potencial $V(x) = F|x|$ onde $F$ é uma constante positiva. Use variáveis de ângulo e ação para determinar o período em função da energia. Qual o espectro de energias que resulta da aplicação da regra de quantização de Bohr-Sommerfeld?

3. O movimento de uma partícula é governado pela Hamiltoniana dependente do tempo

$$H(x,p,t) = \frac{p^2}{2m} - Atx$$

onde $A$ é constante. Resolva as equações de movimento pelo método Hamilton-Jacobi.

4. Uma partícula de carga $e$ e massa $m$ move-se no plano x-y sob a ação de um campo magnético constante $B$ na direção z. A Hamiltoniana do sistema é dada por

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x + \frac{eB}{2}y\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{eB}{2}x\right)^2 .$$

Esse sistema é integrável? Quais as constantes de movimento? (Dica: escreva a Hamiltoniana em coordenadas polares). Escreva e resolva as equações de movimento. Construa variáveis de ângulo e ação para esse sistema.

5. Considere o sistema integrável

$$H_0(I_1,I_2) = \alpha\frac{I_1^2}{2} + \frac{I_2^2}{2}.$$

Para uma energia fixa $E$, encontre $\rho \equiv \omega_1/\omega_2$ como função de $E$ e $I_1$. Mostre que $I_1$ varia entre zero e o valor máximo $\sqrt{2E/\alpha}$. Encontre o valor de $I_1$ e $I_2$ (i.e., encontre o toro) onde $\rho = r/s$. Escolha uma seção de Poincaré conveniente e esboce o mapa de Poincaré nessa seção.

6. Mostre que $M_f$ não pode ser uma esfera, que também é compacta e conexa. (Dica: mostre que o grupo estacionário da esfera não é discreto).

7. O oscilador harmônico isotrópico é um caso particular do oscilador harmônico 2-D e ocorre quando $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$. Nesse caso temos um problema de força central e o momento angular deve ser conservado. De fato, definindo

$$L_z = q_1p_2 - q_2p_1$$

é fácil mostrar que

$$\{L_z,H_1\} = p_1p_2 + \omega_1^2 q_1q_2$$
$$\{L_z,H_2\} = -p_1p_2 - \omega_2^2 q_1q_2$$
$$\{L_z,H\} = q_1q_2(\omega_1^2 - \omega_2^2).$$

e $\{L_z,H\} = 0$ no caso isotrópico. Em vez de usar as três constantes de movimento $H_1$, $H_2$ e $L_z$ é interessante usar as seguintes constantes alternativas:

$$K_1 = (p_1p_2 + \omega^2 q_1q_2)/2$$
$$K_2 = (H_1 - H_2)/2\omega$$
$$K_3 = L_z/2.$$

Com isso obtemos

$$H^2 = 4\omega^2(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2)$$

onde $\{K_i,H\} = 0$ e $G_i = J\nabla H$ são independentes. Note que, embora existam três constantes de movimento independentes, elas não estão em involução.

(a) Calcule os vetores $G_i$.

(b) Mostre que $\nabla H$ é ortogonal a todos os $G_i$.

(c) Mostre que $\{K_i,K_j\} = \epsilon_{ijk}K_k$, que é uma algebra de momento angular. Isso mostra que o grupo de simetria não é SO(2), mas SU(2) ou SO(3).