Problemas (Aguiar, Cap. 4)

4.10 *Exercícios*

1. O ponto de suspensão de um pêndulo plano simples de comprimento l e massa m é restrito a mover-se sobre a parábola $z = ax^2$ no plano vertical (Exemplo 2.3.6). Obtenha a Hamiltoniana.

2. O ponto de suspensão de um pêndulo plano simples de comprimento l e massa m é restrito a mover-se sobre um trilho horizontal (fig. 4.9). Esse ponto é ainda conectado por uma barra sem massa de comprimento a a um anel de raio a e massa M que pode girar livremente sobre seu centro fixado no trilho. Obtenha a Hamiltoniana.

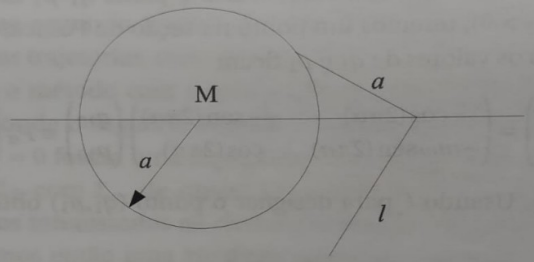


Fig. 4.9 *Pêndulo com ponto de suspensão se movendo em um trilho.*

3. Um cilindro uniforme de densidade ρ e raio a é montado de forma a poder rodar livremente sobre seu eixo vertical (fig. 4.10). No lado externo do cilindro um trilho espiral é fixado. Por esse trilho uma bolinha de massa m desliza sem atrito sob a ação da gravidade. Use qualquer sistema de coordenadas e encontre a Hamiltonina do problema da bolinha + cilindro e resolva as equações de movimento.

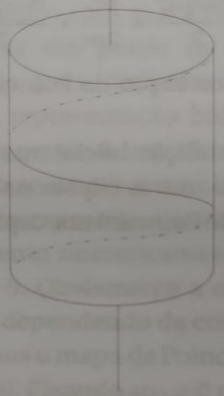


Fig. 4.10 *Cilindro uniforme de densidade ρ e raio a montado de forma a poder rodar livremente sobre seu eixo vertical.*

4. Considere o problema gravitacional de dois corpos com massas M e m. Suponha que $M \gg m$, de forma que M possa ser considerado fixo no centro de massa do sistema. Escolha um sistema de coordenadas $\vec{q} = (q_1, q_2)$ com centro em M e que gira com frequência angular Ω no plano x-y da órbita de m. Mostre que a Lagrangeana nessas coordenadas pode ser escrita como

$$L = \frac{m}{2}\left[\dot{\vec{q}} + (\vec{\Omega} \times \vec{q})\right]^2 + \frac{GMm}{q}$$

onde $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$. Obtenha a Hamiltoniana.

5. Partindo da função de Lagrange, use a teoria de transformações de Legendre para construir uma formulação onde as variáveis independentes sejam $\dot{q}_i$ e $\dot{p}_i$. Chamando de $G(\dot{q}, \dot{p}, t)$ a nova 'Hamiltoniana', encontre as equações de movimento em termos de G.

6. Mostre que a ação para o oscilador harmônico é dada por

$$S(q_1, q_2, t) = \frac{m\omega}{2\,\mathrm{sen}(\omega t)}\left[(q_1^2 + q_2^2)\cos(\omega t) - 2q_1 q_2\right]$$

e verifique as relações (4.23).