UFPR – Departamento de Física
CF368/Eletromagnetismo I – Prova P_3
Prof. Alexandre D. Ribeiro (18/11/2019)

Problema 1: As equações de Maxwell são dadas por

$$\begin{array}{llll}\text{(i)} & \nabla\cdot\vec{D}=\rho_L, & \text{(iii)} & \nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B},\\ \text{(ii)} & \nabla\cdot\vec{B}=0, & \text{(iv)} & \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_L+\partial_t\vec{D}.\end{array}$$

Aqui, o vetor deslocamento e o campo auxiliar são dados, repectivamente, por

$$\vec{D}\equiv\epsilon_0\vec{E}+\vec{P} \quad \text{e} \quad \vec{H}\equiv\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}.$$

Os fenômenos de polarização e magnetização implicam em distribuições de carga dadas por

$$\rho_P\equiv-\nabla\cdot\vec{P} \quad \text{e} \quad \sigma_P\equiv\vec{P}\cdot\hat{n},$$

e correntes dadas por

$$\vec{J}_M\equiv\nabla\times\vec{M}, \quad \vec{K}_M\equiv\vec{M}\times\hat{n} \quad \text{e} \quad \vec{J}_P\equiv\partial_t\vec{P}.$$

(a) Reescreva as equações de Maxwell para o vácuo. A partir destas, deduza suas formas integrais. (1,25)

(b) Ainda na ausência de meio material, mostre que o termo devido a Maxwell é essencial para preservar a equação da continuidade $\nabla\cdot\vec{J}=-\partial_t\rho$. Mostre que, no caso estático, a ausência deste termo não causa inconsistência com a equação de continuidade. (1,25)

Resolução do Problema 1: (a) Para o vácuo, não há polarização, nem magnetização: $\vec{P}=\vec{M}=0$. Assim,

$$\vec{D}\to\epsilon_0\vec{E} \quad \text{e} \quad \vec{H}\to\vec{B}/\mu_0.$$

Inserindo-os nas equações de Maxwell, obtemos

$$\begin{array}{llll}\text{(a)} & \nabla\cdot\vec{E}=\rho_L/\epsilon_0, & \text{(c)} & \nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B},\\ \text{(b)} & \nabla\cdot\vec{B}=0, & \text{(d)} & \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}_L+\mu_0\epsilon_0\partial_t\vec{E}.\end{array}$$

Note que, nesta forma, contempla-se possíveis distribuições de carga ρ_L e corrente $\vec{J}_L$.

Para encontrar a forma integral destas equações, podemos definir uma superfície fechada qualquer S, delimitando um volume V. Então, mutiplica-se as equações (a) e (b) por um elemento infinitesimal de volume $d\tau$, e integra-se sobre V, encontrando

$$\int_V\nabla\cdot\vec{E}\,d\tau=\frac{1}{\epsilon_0}\int\rho_L\,d\tau \quad \text{e} \quad \int_V\nabla\cdot\vec{B}\,d\tau=0.$$

Agora, via teorema do divergente, troca-se as integrais volumétricas, que aparecem do lado esquerdo, por integrais sobre a superfície S. Além disso, identifica-se $\int\rho_L\,d\tau$ como a carga Q_{enc} encerrada pela superfície S. Finalmente temos

$$\text{(A)}\ \oint_S\vec{E}\cdot d\vec{a}=\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}, \qquad \text{(B)}\ \oint_S\vec{B}\cdot d\vec{a}=0.$$

Para tratarmos das equações (c) e (d), definimos uma superfície aberta qualquer S, delimitada por uma curva fechada C. Então, mutiplica-se estas equações por um elemento infinitesimal de área $d\vec{a}$, e integra-se sobre S:

$$\int_S\nabla\times\vec{E}\cdot d\vec{a}=-\int_S\partial_t\vec{B}\cdot d\vec{a},$$
$$\int_S\nabla\times\vec{B}\cdot d\vec{a}=\mu_0\int_S\vec{J}_L\cdot d\vec{a}+\mu_0\epsilon_0\int_S\partial_t\vec{E}\cdot d\vec{a}.$$

Agora, via teorema do rotacional, troca-se as integrais superficiais, que aparecem do lado esquerdo, por integrais sobre a curva C. Além disso, identifica-se $\int_S\vec{J}_L\cdot d\vec{a}$ como a corrente I_{enc} encerrada pela curva C, e os fluxos de campos magnético e elétrico

$$\Phi_B\equiv\int_S\vec{B}\cdot d\vec{a} \qquad \text{e} \qquad \Phi_E\equiv\int_S\vec{E}\cdot d\vec{a}.$$

Por último, deve-se notar que a derivada parcial no tempo ∂_t transforma-se em uma derivada total d/dt ao sair da integral. Finalmente,

$$\text{(C)}\ \oint_C\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi_E}{dt},$$
$$\text{(D)}\ \oint_C\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0I_{enc}+\mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

(b) A contribuição de Maxwell se refere ao termo $\mu_0\epsilon_0\partial_t\vec{E}$, que aparece na equação (d). Caso o ignoremos e tomemos o divergente desta equação, encontramos

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})=\mu_0\nabla\cdot\vec{J}_L \qquad \text{(sem termo de Maxwell).}$$

O lado esquerdo se anula pois $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{f})=0$ para qualquer função vetorial $\vec{f}$. Logo, concluiríamos que $\nabla\cdot\vec{J}_L=0$, que é consistente com a equação de continuidade somente se $\partial_t\rho_L=0$, situação que compreende apenas o caso estático. Por outro lado, mantendo o termo de Maxwell, e tomando o divergente da equação (d), encontramos

$$\underbrace{\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})}_{\text{zero}}=\mu_0\nabla\cdot\vec{J}_L+\mu_0\epsilon_0\partial_t(\nabla\cdot\vec{E}).$$

Segundo a lei de Gauss, podemos identificar na equação acima, $\nabla\cdot\vec{E}=\rho_L/\epsilon_0$, o que a torna idêntica à equação da continuidade, implicando em total consistência.

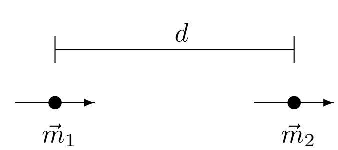
Problema 2: Um dipolo magnético localizado na origem de um sistema de coordenadas, e apontando na direção z, produz um campo magnético expresso, em coordenadas esféricas, por

$$\vec{B}_{\text{dip}}=\frac{\mu_0m}{4\pi r^3}\,(2\cos\theta\ \hat{r}+\operatorname{sen}\theta\ \hat{\theta}).$$

Sabe-se que uma espira infinitesimal com momento de dipolo $\vec{m}$, sob ação de um campo $\vec{B}$, sente uma força dada por $\vec{F}=\nabla(\vec{m}\cdot\vec{B})$.

(a) Utilizando argumentos de simetria, mostre que a força entre dois dipolos magnéticos $\vec{m}_1$ e $\vec{m}_2$, dispostos segundo a figura abaixo, só pode possuir componentes não-nulas ao longo do eixo que os une. (0,50)

(b) Utilizando estes resultados, encontre uma expressão para a força de atração entre $\vec{m}_1$ e $\vec{m}_2$. (2,00)



Resolução do Problema 2: (a) Primeiro, vamos identificar o eixo que une os dipolos como sendo o eixo z do nosso sistema de coordenadas. Agora note que o sistema físico estudado é invariante sob rotações em torno de z. Então, *sobre este eixo*, caso a força sentida por um dos dipolos (devida ao outro) apresente uma componente não-nula perpendicular ao eixo z, ao rodar o sistema em torno dele por um ângulo diferente de 2π, o vetor força se modificaria, gerando uma ambiguidade. Por isso, a força só pode ter componente não-nula ao longo de z.

(b) Vamos escolher a origem do eixo z sobre o dipolo $\vec{m}_1$. Assim, de acordo com o enunciado, podemos afirmar que o campo magnético por ele gerado, em uma posição $\vec{r}$, é dado por

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi r^3}\,(2\cos\theta\,\hat{r} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}).$$

A força sentida por $\vec{m}_2$, devida a $\vec{m}_1$, deve ser

$$\vec{F}_{\vec{m}_1\to\vec{m}_2} = \nabla_{\vec{r}}\big(\vec{m}_2\cdot\vec{B}_1(\vec{r})\big)\Big|_{\vec{r}=\vec{r}_2},$$

em que $\vec{r}_2 = (d,0,\phi)$, em coordenadas esféricas, é a posição do dipolo $\vec{m}_2$.

(Note que $\vec{F}_{\vec{m}_1\to\vec{m}_2} \neq \nabla\big(\vec{m}_2\cdot\vec{B}_1(\vec{r}_2)\big)$, porque o gradiente sempre se anularia, já que a função que aparece dentro do parênteses seria uma constante. Lembre-se que a força só existe quando o campo é não-uniforme. Portanto, para calculá-la, precisamos avaliar como ele varia. Quando escrevemos $\vec{B}_1(\vec{r}_2)$, estamos falando do campo em um ponto específico do espaço, e não é possível, através dele, avaliar a variação do campo.)

Por trigonometria, temos $\hat{z}\cdot\hat{r} = \cos\theta$ e $\hat{z}\cdot\hat{\theta} = -\operatorname{sen}\theta$. Então, como $\vec{m}_2 = m_2\hat{z}$,

$$\begin{aligned}
\nabla(\vec{m}_2\cdot\vec{B}_1) &= \nabla\left(\frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^3}\,(2\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\right)\\
&= \frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi}\left(\hat{r}\partial_r + \frac{\hat{\theta}\partial_\theta}{r}\right)\left(\frac{2\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{r^3}\right)\\
&= \frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi}\left(\frac{3\operatorname{sen}^2\theta - 6\cos^2\theta}{r^4}\,\hat{r} - \frac{6\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r^4}\,\hat{\theta}\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, calculando em $\vec{r}_2 = (d,0,\phi)$ e lembrando que $\hat{r} = \hat{z}$ (na posição de $\vec{m}_2$), econtramos:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\vec{m}_1\to\vec{m}_2} &= \frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi}\left(\frac{3\operatorname{sen}^2 0 - 6\cos^2 0}{d^4}\,\hat{r} - \frac{6\cos 0\operatorname{sen} 0}{d^4}\,\hat{\theta}\right)\\
&= -\frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi d^4}\hat{r} = -\frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi d^4}\hat{z}.
\end{aligned}$$

Problema 3: Um cilindro infinitamente longo tem magnetização uniforme (e constante) $\vec{M}$, paralela ao seu eixo. Utilizando a lei de Ampère e argumentos de simetria bem fundamentados, encontre o campo magnético (devido a $\vec{M}$) dentro e fora do cilindro. Você também pode usar a seguinte informação: em um solenoide, seu campo magnético externo é nulo e o interno aponta na direção do seu eixo de simetria. (2,50)

Resolução do Problema 3: Considerando o eixo do cilindro como sendo o eixo z, temos $\vec{M} = M\hat{z}$, de modo que

$$\vec{J}_M = \nabla\times\vec{M} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{K}_M = \vec{M}\times\hat{n} = M\hat{z}\times\hat{s} = M\hat{\phi}.$$

Ou seja, a presença desta magnetização é equivalente a uma corrente volumétrica nula ($\vec{J}_M = 0$) e uma corrente superficial similar a de um solenoide ($\vec{K}_M = M\hat{\phi}$). Então, já podemos afirmar que o campo magnético é nulo fora do cilindro.

Dentro do cilindro, assumimos que o campo está ao longo do eixo z. Além disso, ele não deve depender da variável z (afinal, como o cilindro é infinitamente longo, deslocar a origem ao longo de z não deve alterar o resultado) e também da variável ϕ (afinal, rodar ao redor de z deixa o problema invariante). Então, o campo dentro do clindro tem a forma $\vec{B}_d = B_d(s)\hat{z}$. Escolhendo o circuito C como a amperiana 2 da figura 5.37 do livro, obtemos

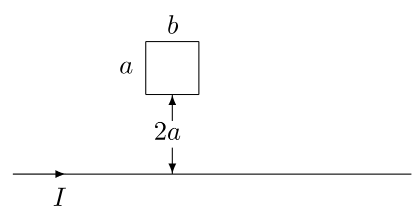
$$\begin{aligned}
&\oint_C \vec{B}_d\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} + \underbrace{\mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_B}{dt}}_{0\ \text{(estatico)}}\\
\Longrightarrow &\int_{\bar{z}}^{\bar{z}+L} B_d(s)dl = \mu_0 K_M L\\
\Longrightarrow &B_d(s)L = \mu_0 K_M L \Longrightarrow \vec{B}_d = \mu_0 K_M\hat{z} = \mu_0\vec{M}.
\end{aligned}$$

Note que a integral de linha fechada deve ser reescrita em 4 partes. As partes referentes aos dois caminhos horizontais se anulam porque, ao longo deles, ou o campo é nulo, ou é perpendicular ao caminho. A parte referente ao caminho vertical externo ao cilindro se anula porque ali o campo vale zero. Do lado esquerdo aparece, portanto, apenas uma destas quatro integrais.

Problema 4: Uma espira retangular de lados a e b, com resistência R, está a uma distância $2a$ de um fio reto pelo qual passa uma corrente I_0 (veja a figura a seguir). A partir de um dado instante $t=0$, a corrente é diminuída conforme a expressão

$$I(t) = \begin{cases} (1-\alpha t)I_0, & \text{para } 0\le t\le 1/\alpha,\\ 0, & \text{para } t > 1/\alpha,\end{cases}$$

em que α é uma constante. Em que sentido a corrente induzida flui pela espira e qual a carga total que passa por um dado ponto da espira durante o tempo em que a corrente é desligada? (2,50)



Resolução do Problema 4: Vamos orientar a curva que define a espira no sentido anti-horário. Assim a área delimitada fica orientada para fora do papel. Como o campo magnético gerado pelo fio também aponta para fora do papel na região da espira, temos:

$$\begin{aligned}
\Phi_b &= \int_{\text{espira}} \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_{\text{espira}} \frac{\mu_0 I}{2\pi s}da = \int_{2a}^{3a}\frac{\mu_0 I}{2\pi s}bds\\
&= \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln(3/2).
\end{aligned}$$

A força eletromotriz induzida vale, portanto,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln(3/2)\frac{dI}{dt} = \frac{\mu_0 b\alpha I_0}{2\pi}\ln(3/2).$$

Note que o número do lado direito é positivo. Então a corrente aparece no sentido positivo da espira (anti-horário). Isto pode ser confirmado pela lei de Lenz.

Na espira,

$$\mathcal{E} = RI_{ind} = R\frac{dQ_{ind}}{dt} \Longrightarrow dQ_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R}dt.$$

Integrando ao longo do intervalo de tempo em que a corrente é desligada:

$$Q_{ind} = \int_0^{1/\alpha}\frac{\mu_0 b\alpha I_0}{2\pi R}\ln(3/2)dt = \frac{\mu_0 b I_0}{2\pi R}\ln(3/2).$$