UFPR – Departamento de Física
CF368/Eletromagnetismo I – Prova P_2
Prof. Alexandre D. Ribeiro (21/10/2019)

Problema 1: Na ausência de matéria, o campo elétrico estático $\vec{E}(\vec{r})$, devido a uma distribuição de cargas $\rho(\vec{r})$, deve respeitar as equações

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\rho/\epsilon_0 \qquad \text{e} \qquad \nabla \times \vec{E} = 0.$$

Quando existe material dielétrico, o campo elétrico pode modificar a sua configuração de cargas de modo que a própria matéria passa a ser também uma fonte de campo. Tal fenômeno pode ser caracterizado pela polarização do meio $\vec{P}(\vec{r})$. É possível demonstrar que os efeitos de $\vec{P}$, como fonte de campo elétrico, são equivalentes a uma distribuição volumétrica de cargas $\rho_{_P} = -\nabla \cdot \vec{P}$, e outra superficial $\sigma_{_P} = \vec{P} \cdot \hat{n}$.
(a) Organize estas ideias, alterando a notação, se necessário, e encontre a lei de Gauss para meios dielétricos $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_L$. (1,00)
(b) Admita agora que estejamos tratando de um material linear. Neste caso, como ficam as relações entre $\vec{D}$, $\vec{E}$, e $\vec{P}$? (0,50)

Resolução do Problema 1: (a) Se admitirmos que não há meio material, mas que exista, além das cargas livres distribuídas de acordo com $\rho_{_L}$, outras cargas distribuídas segundo $\rho_{_P}$ e $\sigma_{_P}$, a lei de Gauss se torna

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{_L} + \rho_{_P}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{_L} - \nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$
$$\Longrightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{_L}.$$

Definindo o vetor deslocamento elétrico $\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, a última equação torna-se a lei de Gauss para meios dielétricos $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_L$.
(b) No caso de dielétricos lineares, considera-se que a polarização é proporcional ao campo elétrico:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E},$$

em que $(\epsilon_0 \chi_e)$ é a constante de proporcionalidade, sendo que χ_e é chamada de susceptibilidade linear elétrica do meio. Desta forma,

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}.$$

A constante de proporcionalidade desta última igualdade é chamada de permissividade elétrica do meio, $\epsilon \equiv \epsilon_0(1+\chi_e)$. Finalmente, a relação entre $\vec{D}$ e $\vec{P}$ é dada por

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \frac{\vec{E}}{\epsilon_0 \chi_e} = \left(\frac{1 + \chi_e}{\chi_e} \right) \vec{P}.$$

Problema 2: Uma casca esférica grossa (raio interno a, raio externo b) é feita de material dielétrico, cuja polarização é assumida fixa, e da forma $\vec{P}(\vec{r}) = \frac{k}{r}\hat{r}$, onde k é uma constante e r é a distância ao centro da esfera. Não existe carga livre no problema.
(a) Encontre o campo elétrico em todo o espaço, utilizando o resultado do problema anterior [item (a)]. (1,50)
(b) Verifique sua resposta considerando o problema equivalente em que não há dielétrico, mas há cargas distribuídas de acordo com $\rho_{_P}$ e $\sigma_{_P}$. (1,00)

Resolução do Problema 2: (a) Como $\rho_{_L} = 0$ em todo o espaço, então $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{_L} = 0$. Delimitando um volume τ qualquer por meio de uma superfície fechada S, e integrando a última equação sobre esta região temos

$$\int \nabla \cdot \vec{D} \, d\tau' = 0 \Longrightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = 0,$$

em que utilizamos o teorema do divergente. Em particular, como o problema tem simetria esférica (segundo a expressão para a polarização), $\vec{D} = D(r)\hat{r}$. Então, ao assumir S como uma superfície esférica de raio r concêntrica à casca, $\vec{D} \cdot d\vec{a} = D(r)\, da$, independentemente do valor de r. Assim,

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = 4\pi r^2 D(r) = 0 \Longrightarrow D(r) = 0.$$

Como $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = 0$, então

$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} = \begin{cases} -k/(\epsilon_0 r)\ \hat{r} & \text{(dentro da casca)}, \\ 0 & \text{(fora da casca)}. \end{cases}$$

(b) Nesta abordagem, assumindo ausência de dielétrico,

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{_P} = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2 P_r] \\ &= -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \left(\frac{k}{r} \right) \right] = -\frac{k}{r^2}. \end{aligned}$$

Além disso, devemos considerar as cargas superficiais:

$$\sigma_{_P} = \vec{P} \cdot \hat{n} = \frac{k}{r}\hat{r} \cdot \hat{n} = \begin{cases} -k/a & \text{(superf. interna)}, \\ +k/b & \text{(superf. externa)}. \end{cases}$$

Aqui usamos, por convenção, $\hat{n} = -\hat{r}$ para a superfície interna, e $\hat{n} = \hat{r}$ para a externa. A lei de Gauss é

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}.$$

Assumindo S como uma superfície esférica de raio r concêntrica à casca, a carga encerrada q_{enc} vale

$$\begin{aligned} q_{enc} &= 0 && (r < a), \\ q_{enc} &= -\oint_{S_a} \frac{k\, da}{a} - \int_{C_{a\to r}} \frac{k\, d\tau}{r^2} && (a < r < b), \\ q_{enc} &= -\oint_{S_a} \frac{k\, da}{a} - \int_{C_{a\to b}} \frac{k\, d\tau}{r^2} + \oint_{S_b} \frac{k\, da}{a} && (r > b). \end{aligned}$$

Aqui, S_a e S_b são as superfícies esféricas de raios a e b, respectivamente. Além disso, $C_{a\to r}$ ($C_{a\to b}$) é o volume da casca esférica grossa de raios interno e externo a e r (a e b), respectivamente. Então, como

$$\begin{aligned}
\int_{C_{a\to r}} \frac{k\ d\tau}{r^2} &= \int_a^r \frac{k\ 4\pi r^2 dr}{r^2} = 4\pi k(r-a), \\
\int_{C_{a\to b}} \frac{k\ d\tau}{r^2} &= \int_a^b \frac{k\ 4\pi r^2 dr}{r^2} = 4\pi k(b-a), \\
\oint_{S_a} da &= 4\pi a^2, \qquad \text{e} \qquad \oint_{S_b} da \ = \ 4\pi b^2,
\end{aligned}$$

temos

$$q_{enc} = \begin{cases} 0 & (r<a), \\ -4\pi ak - 4\pi k(r-a) = -4\pi kr & (a<r<b), \\ -4\pi ak - 4\pi k(b-a) + 4\pi bk = 0 & (r>b). \end{cases}$$

Agora voltamos à lei de Gauss (lado esquerdo), lembrando que há simetria esférica [$\vec{E} = E(r)\hat{r}$] e, portanto,

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = E(r)\oint_S da = E(r)4\pi r^2.$$

Então, juntando ao lado direito, temos

$$E(r) = \begin{cases} 0 & (r<a), \\ -k/(\epsilon_0 r) & (a<r<b), \\ 0 & (r>b), \end{cases}$$

conforme pretendíamos verificar.

Problema 3: Uma esfera (raio R) de material elétrico *linear* tem incorporada em si uma carga livre de densidade uniforme $\rho_{_L}$. Discuta a possibilidade de assumir-se simetria esférica, assuma-a, e encontre o campo elétrico em todo o espaço em função da constante dielétrica $\epsilon_r \equiv \epsilon/\epsilon_0$. (2,50)

Resolução do Problema 3: Como $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_{_L}$, e $\rho_{_L}$ tem simetria esférica:

$$\rho_{_L} = \begin{cases} \rho_0 & \text{(dentro da esfera)}, \\ 0 & \text{(fora da esfera)}, \end{cases}$$

então $\vec{D}$ também possui esta simetria, $\vec{D} = D(r)\hat{r}$. Por causa da linearidade, esta propriedade estende-se a $\vec{E}$. Assim, integrando a forma local da lei de Gauss em uma região τ delimitada por uma superfície esférica de raio r concêntrica à esfera, encontramos

$$\begin{aligned}
&\int \nabla\cdot\vec{D}\ d\tau = \int \rho_{_L}\ d\tau \Longrightarrow \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{a} = \int \rho_{_L}\ d\tau \\
&\Longrightarrow D(r)4\pi r^2 = \int \rho_{_L}\ d\tau.
\end{aligned}$$

Esta última integral depende do valor de r. Veja:

$$\int \rho_{_L}\ d\tau = \begin{cases} \int_{S_r} \rho_0\ d\tau = \frac{4}{3}\rho_0\pi r^3 & (r<0), \\ \int_{S_R} \rho_0\ d\tau = \frac{4}{3}\rho_0 \pi R^3 & (r>0). \end{cases}$$

Logo,

$$\vec{D} = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{3}\hat{r} & (r<0), \\ \frac{\rho_0 R^3}{3r^2}\hat{r} & (r>0). \end{cases}$$

Sobre o campo elétrico $\vec{E}$, como o meio é linear, $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \vec{D}/(\epsilon_r\epsilon_0)$.

Problema 4: Um campo magnético estático $\vec{B}(\vec{r})$, devido a sua fonte $\vec{J}(\vec{r})$, obedece às seguintes equações:

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad \text{e} \qquad \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}.$$

(a) Mostre que podemos escrever $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$, sendo que o potencial vetor $\vec{A}$ deve ser solução de

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J},$$

desde que $\vec{A}$ seja tal que $\nabla\cdot\vec{A} = 0$. (1,00)

(b) Mostre que sempre é possível escolher um potencial vetor que respeite $\nabla\cdot\vec{A} = 0$, sem que isto implique em qualquer alteração no campo magnético *físico* $\vec{B}$. (1,00)

(c) Considere o potencial vetor dado por $\vec{A} = -\frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{C})$, em que $\vec{C}$ é um vetor independente da posição e do tempo. Verifique se $\vec{A}$ possui divergente nulo e diga qual é a forma do campo magnético associado a ele. (1,00)

(d) Há algo que possamos falar sobre a distribuição de correntes $\vec{J}$ envolvida na situação do item (c)? (1,00)

Resolução do Problema 4: (a) Precisamos mostrar que o campo magnético escrito na forma $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ satisfaz suas duas equações. Substituindo $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ na primeira equação, obtemos $\nabla\cdot\vec{B} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0$, sendo que a última igualdade é verificada já que $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{V}) = 0$ para qualquer função vetorial $\vec{V}$. Impondo a segunda equação, encontramos

$$\nabla\times\vec{B} = \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J}.$$

Note que, se tivermos $\nabla\cdot\vec{A} = 0$, então a imposição acima torna-se a equação para $\vec{A}$ mostrada no enunciado.

(b) Primeiro precisamos mostrar que existe uma relação entre dois potenciais vetores distintos $\vec{A}$ e $\vec{A}'$, sendo que ambos dão origem ao mesmo campo magnético. Então, definimos $\vec{A} = \vec{A}' + \vec{X}$ de modo que

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} \qquad \text{e} \qquad \vec{B} = \nabla\times(\vec{A}+\vec{X}).$$

Subtraindo as duas equações, encontramos $\nabla\times\vec{X} = 0$. Como o rotacional do gradiente de qualquer função escalar $\lambda(\vec{r})$ é nulo, podemos definir $\vec{X} = \nabla\lambda(\vec{r})$.

Agora precisamos mostrar que, caso conheçamos $\nabla\cdot\vec{A} \neq 0$, sempre podemos escolher uma funcão $\lambda(\vec{r})$ tal que $\nabla\cdot\vec{A}' = 0$. Veja, ao tomarmos o divergente de $\vec{A} = \vec{A}' + \nabla\lambda$, encontramos

$$\nabla\cdot\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A}' + \nabla^2\lambda \Longrightarrow \nabla^2\lambda = \nabla\cdot\vec{A}.$$

Portanto, basta resolver a equação de Poisson acima para encontrarmos $\lambda(\vec{r})$ que implique em $\nabla\cdot\vec{A}' = 0$.

(c) Para $\nabla \cdot \vec{A}$ temos

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{1}{2}\nabla \cdot \left(\vec{r} \times \vec{C}\right) = -\frac{1}{2}\left[\vec{C} \cdot (\nabla \times \vec{r}) - \vec{r} \cdot (\nabla \times \vec{C})\right].$$

Agora note que (com $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$)

$$\nabla \times \vec{r} = \hat{\imath}(\partial_y z - \partial_z y) + \hat{\jmath}(\partial_z x - \partial_x z) + \hat{k}(\partial_x y - \partial_y x) = 0$$

e $\nabla \times \vec{C} = 0$ porque $\vec{C}$ é independente da posição. Logo, $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

Sobre $\nabla \times \vec{A}$ temos

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= -\frac{1}{2}\nabla \times \left(\vec{r} \times \vec{C}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left[(\vec{C} \cdot \nabla)\,\vec{r} - \vec{C}(\nabla \cdot \vec{r}) - (\vec{r} \cdot \nabla)\,\vec{C} + \vec{r}(\nabla \cdot \vec{C})\right]. \end{aligned}$$

Resolvemos cada termo:

$$\begin{aligned} (\vec{C} \cdot \nabla)\,\vec{r} &= (C_x\partial_x + C_y\partial_y + C_z\partial_z)(\hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z) \\ &= \hat{\imath}C_x + \hat{\jmath}C_y + \hat{k}C_z = \vec{C}, \\ \nabla \cdot \vec{r} &= \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 3, \\ (\vec{r} \cdot \nabla)\,\vec{C} &= (x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)\,\vec{C} = 0, \\ \nabla \cdot \vec{C} &= \partial_x C_x + \partial_y C_y + \partial_z C_z = 0. \end{aligned}$$

De modo que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{1}{2}\left[\vec{C} - 3\vec{C}\right] = \vec{C}.$$

(d) Introduzindo $\vec{B} = \vec{C}$ na lei de Ampère:

$$\underbrace{\nabla \times \vec{C}}_{0} = \mu_0 \vec{J} \Longrightarrow \vec{J} = 0.$$

Ao pé da letra, implica que um campo magnético uniforme é gerado por uma densidade de corrente nula! Esta inconsistência demonstra a impossibilidade de se produzir campos magnéticos genuinamentes uniformes.