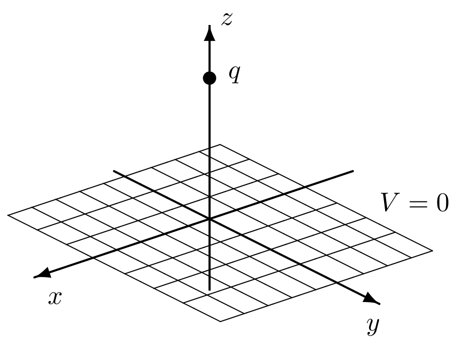
UFPR – Departamento de Física
CF368/Eletromagnetismo I – Prova P_1
Prof. Alexandre D. Ribeiro (04/09/2019)

Observações: **i)** Indique de forma organizada o raciocínio e todos os cálculos usados na solução; **ii)** Fórmulas não-pertencentes ao formulário da prova, quando utilizadas, devem ser deduzidas.

Problema 1: Uma carga pontual q é mantida sobre o eixo z e a uma distância d acima de um plano condutor infinito e aterrado (figura abaixo).



(a) Justificando todos os seus passos, através do método das imagens, encontre uma expressão para o potencial elétrico $V(x,y,z)$ na região acima do plano. (1,00)
(b) Uma distribuição superficial de cargas $\sigma(\vec{r})$ está relacionada ao potencial elétrico $V(\vec{r})$ através de

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n},$$

em que n é a coordenada perpendicular à superfície. Mostre que, para o nosso problema, a carga induzida no plano condutor é caracterizada por

$$\sigma(x,y) = \frac{-qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}. \qquad (1,00)$$

(c) Mostre que a contribuição desta distribuição σ, somada à contribuição da carga pontual, produz o mesmo potencial elétrico encontrado em (a). Para isso, utilize

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{tudo}} \frac{\sigma\, da'}{\mathcal{R}}.$$

Mostre isso apenas para pontos sobre o eixo z! (2,00)
Deve ser útil a expressão

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x^2+b^2)^{1/2}}{(a^2-b^2)(x^2+a^2)^{1/2}}\right] = \frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}(x^2+b^2)^{1/2}}.$$

Resolução do Problema 1: (a) Precisamos resolver $V(x,y,z)$ na região $z>0$, com x e y quaisquer. O potencial é determinado pela distribuição de cargas

$$\rho(\vec{r}) = q\;\delta^{(3)}\left(\vec{r}-d\hat{z}\right),$$

e pelas condições de contorno

$$V(x,y,0)=0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{r\to 0} V(x,y,z) \to 0,$$

sendo $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Além disso, teoremas de unicidade nos garantem que qualquer expressão para $V(x,y,z)$ que respeite os vínculos acima, dentro da região estudada ($z>0$ neste caso), é a única solução do problema. O método das imagens faz uso deste último ponto, para elaborar um problema equivalente que respeite aquelas condições e que, portanto, produza um potencial elétrico idêntico.

Problema equivalente: Considere uma distribuição de cargas dada por

$$\rho_{eq}(\vec{r}) = q\;\delta^{(3)}\left(\vec{r}-d\hat{z}\right) - q\;\delta^{(3)}\left(\vec{r}+d\hat{z}\right).$$

Embora seja evidente que $\rho_{eq}(\vec{r}) \neq \rho(\vec{r})$ no espaço todo, se nos limitarmos à região de interesse $z>0$, verifica-se que

$$\rho_{eq}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \qquad (\vec{r}\ \text{tais que}\ z>0).$$

Além disso, por conta da simetria, pontos equidistantes das cargas possuem potencial elétrico nulo. Isto implica em $V(x,y,0)=0$. Também, para pontos muito distantes, o potencial devido às duas cargas tende a ser nulo ($V\sim 1/r$). Logo, todas as restrições apresentadas no problema original também devem ser respeitadas neste problema equivalente. Seus potenciais, portanto, são equivalentes na região $z>0$.

O potencial do sistema equivalente consiste da contribuição das duas cargas:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{+q}{\mathcal{R}_+} + \frac{-q}{\mathcal{R}_-}\right],$$

em que $\mathcal{R}_\pm$ é a distância da carga $\pm q$ até $\vec{r}=(x,y,z)$,

$$\mathcal{R}_\pm = |(x,y,z\mp d)| = \sqrt{x^2+y^2+(z\mp d)^2}.$$

(b) Para este caso, n é a própria coordenada z, e a superfície encontra-se em $z=0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sigma &= -\epsilon_0 \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0} = -\epsilon_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\;\frac{\partial}{\partial z}\left.\left[\frac{q}{\mathcal{R}_+} - \frac{q}{\mathcal{R}_-}\right]\right|_{z=0} \\
&= -\frac{q}{4\pi}\left.\left[-\frac{1}{2}\frac{2\,(z-d)}{\mathcal{R}_+^3} + \frac{1}{2}\frac{2\,(z+d)}{\mathcal{R}_-^3}\right]\right|_{z=0} \\
&= \frac{q}{4\pi}\left[\frac{(0-d)}{[x^2+y^2+(-d)^2]^{3/2}} - \frac{(0+d)}{[x^2+y^2+(+d)^2]^{3/2}}\right] \\
&= \frac{-qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

(c) Calculamos primeiro a contribuição do plano:

$$V_{\text{plano}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{todo plano}} \frac{\sigma\, da'}{\mathcal{R}}.$$

Aqui devemos substituir a expressão obtida anteriormente:

$$\sigma = \frac{-qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} = \frac{-qd}{2\pi(\rho^2+d^2)^{3/2}},$$

em que ρ é o raio das coordenadas polares no plano, de forma que $\rho^2 = x^2+y^2$. Realizando a integração em coordenadas polares, temos que $da' = \rho\; d\rho\; d\theta$. Finalmente,

$\mathcal{R}$ é a distância de um ponto (x,y) do plano até o ponto z onde pretende-se calcular o potencial, sobre o eixo z. Logo, via teorema de Pitágoras, $\mathcal{R}^2 = z^2+\rho^2$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} V_{\text{plano}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{-qd}{2\pi(\rho^2+d^2)^{3/2}} \frac{\rho\, d\rho}{(z^2+\rho^2)^{1/2}} \\ &= \frac{-qd}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\infty} \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+d^2)^{3/2}(z^2+\rho^2)^{1/2}} \\ &= \frac{-qd}{4\pi\epsilon_0} \left.\frac{(\rho^2+z^2)^{1/2}}{(d^2-z^2)(\rho^2+d^2)^{1/2}}\right|_{\rho=0}^{\rho=\infty} \\ &= \frac{-qd}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(d^2-z^2)} - \frac{z}{d(d^2-z^2)}\right] \\ &= \frac{-qd}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{d-z}{d(d^2-z^2)}\right] = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0(d+z)}. \end{aligned}$$

Somando ao potencial gerado pela carga (no eixo z):

$$V_{\text{carga}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|z-d|},$$

obtemos

$$V = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0(d+z)} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0|z-d|}.$$

Comparando ao resultado encontrado no item (a), para pontos sobre o eixo z, ou seja, com

$$\mathcal{R}_{\pm} = \sqrt{0^2+0^2+(z\mp d)^2} = |z\mp d|,$$

verificamos a equivalência.

Problema 2: O campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ gerado por uma distribuição estacionária de cargas $\rho(\vec{r})$ deve satisfazer a duas equações:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad \nabla\times\vec{E} = 0.$$

(a) A partir destas, escreva $\vec{E}(\vec{r})$ em termos do potencial elétrico $V(\vec{r})$ e mostre que, na ausência de cargas, o potencial deve obedecer à Equação de Laplace $\nabla^2 V = 0$ (1,00).

(b) Em coordenadas cartesianas, e assumindo que tratamos de um problema bidimensional, $V(\vec{r}) \to V(x,y)$. Mostre que, impondo separação de variáveis, ou seja, escrevendo $V(x,y) = X(x)Y(y)$, podemos concluir que, em geral,

$$\begin{aligned} X(x) &= A_x e^{+k_x x} + B_x e^{-k_x x}, \\ Y(y) &= A_y e^{+k_y y} + B_y e^{-k_y y}, \end{aligned}$$

em que A_x, A_y, B_x, B_y, k_x e k_y são constantes arbitrárias, com a única restrição $k_x^2+k_y^2=0$. (2,00)

Resolução do Problema 2: (a) Conhecendo a identidade matemática $\nabla\times(\nabla\phi) = 0$, em que ϕ é qualquer função escalar, para satisfazermos $\nabla\times\vec{E}=0$, basta escrever $\vec{E}$ como o gradiente de uma função escalar. Em particular, escolhe-se tal função como $-V(\vec{r})$, em que V é o potencial elétrico. Temos, assim, $\vec{E} = -\nabla V$. Como o campo elétrico também satisfaz $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, em termos de V, esta equação torna-se

$$\nabla\cdot(-\nabla V) = \rho/\epsilon_0 \Longrightarrow \nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0.$$

Na ausência de cargas, $\rho = 0$, esta equação se transforma na Equação de Laplace.

(b) Substituindo $V(x,y) = X(x)Y(y)$ na Equação de Laplace, e arranjado-a convenientemente, encontramos

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)Y(y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}X(x)Y(y) = 0.$$

Dividindo-a por $X(x)Y(y)$ temos

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0.$$

Note que o primeiro termo do lado esquerdo da última equação só depende da variável x, e o segundo só depende de y. Portanto, para que a igualdade seja satisfeita independentemente dos valores de x e y, é natural admitir que os dois termos sejam iguais a uma constante:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = k_x^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = k_y^2,$$

com $k_x^2+k_y^2=0$. A forma das constantes é atribuída por futura conveniência.Então, as equações para $X(x)$ e $Y(y)$ tornam-se

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = k_x^2 X \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = k_y^2 Y,$$

de modo que as soluções apresentadas no enunciado são diretamente verificadas.

Problema 3: Duas placas condutoras planas, aterradas e de área infinita estão localizadas em $y=0$ e $y=a$. Em $x=-b$ e $x=+b$, elas são conectadas por tiras metálicas de comprimento infinito, mantidas em potencial constante V_0. Estamos interessados em avaliar o potencial elétrico no interior do tubo infinito, e de seção retangular, formado por tais placas condutoras (veja a figura abaixo).

(a) Justifique o fato de podermos tratar tal problema em apenas duas dimensões, o que nos permite utilizar as equações do problema anterior. (0,50)

(b) Indique todas as condições de contorno pertinentes para este problema. (1,50)

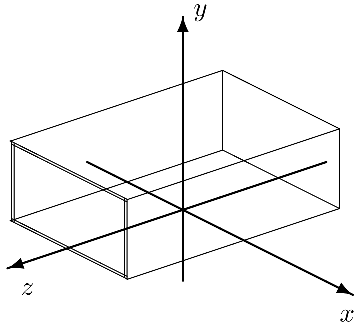
(c) Mostre que a expressão para $V(x,y)$ no interior to tubo tem a seguinte forma

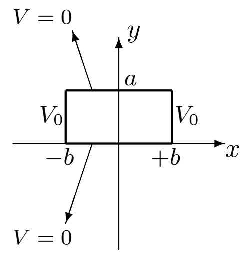
$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1,3,\ldots}\frac{1}{n}\frac{\cosh(n\pi x/a)}{\cosh(n\pi b/a)}\,\text{sen}(n\pi y/a). \quad (2,00)$$

Devem ser úteis as expressões:

$$\int_0^L \operatorname{sen}(n\pi x/L)\,\operatorname{sen}(m\pi x/L)\;dx = \frac{a}{2}\;\delta_{mn},$$

$$\cosh\alpha = \frac{e^{+\alpha}+e^{-\alpha}}{2}.$$





Resolução do Problema 3: (a) Devemos notar que o problema é invariante se deslocarmos a origem do sistema de coordenadas ao longo da direção z. Isto é suficiente para tratar o problema como sendo independente de z.

(b) Considerando $V(x,y)$, temos as seguintes condições:

$$\begin{array}{llll} 1) & V(x, y=0) = 0; & 2) & V(x, y=a) = 0; \\ 3) & V(x=-b, y) = V_0; & 4) & V(x=+b, y) = V_0. \end{array}$$

(c) O potencial no interior do tubo deve ser solução da Eq. de Laplace, uma vez que $\rho = 0$. Se utilizarmos o método de separação de variáveis em coordenadas cartesianas, o potencial elétrico toma a forma discutida no problema anterior, $V(x,y) = X(x)Y(y)$, com

$$X(x) = A_x e^{+k_x x} + B_x e^{-k_x x} \quad \text{e} \quad Y(y) = A_y e^{+k_y y} + B_y e^{-k_y y},$$

para qualquer k_x e k_y, desde que $k_x^2 + k_y^2 = 0$. $A_{x,y}$ e $B_{x,y}$ são as constantes arbitrárias. Como a Eq. de Laplace é linear em V, a solução geral é a combinação linear destas infinitas soluções, ou seja,

$$V(x,y) = \sum_{k_x,k_y} (A_{k_x} e^{+k_x x} + B_{k_x} e^{-k_x x})(A_{k_y} e^{+k_y y} + B_{k_y} e^{-k_y y}).$$

Aplicando a condição de contorno (1), temos

$$V(x,0) = \sum_{k_x,k_y} \left(A_{k_x} e^{+k_x x} + B_{k_x} e^{-k_x x}\right)\left(A_{k_y} + B_{k_y}\right) = 0.$$

Para que esta igualdade seja satisfeita, para qualquer x, então $A_{k_y} = -B_{k_y}$, de modo que $V(x,y)$ toma a forma

$$V(x,y) = \sum_{k_x,k_y} A_{k_y}\left(A_{k_x} e^{+k_x x} + B_{k_x} e^{-k_x x}\right)\left(e^{+k_y y} - e^{-k_y y}\right).$$

Incorporando A_{k_y} às outras constantes, e aplicando a condição de contorno (2), temos

$$V(x,a) = \sum_{k_x,k_y} \left(A_{k_x} e^{+k_x x} + B_{k_x} e^{-k_x x}\right)\left(e^{+k_y a} - e^{-k_y a}\right) = 0,$$

que é satisfeita quando $e^{+k_y a} - e^{-k_y a} = 0$. A escolha $k_y = 0$, que satisfaz esta equação, implicaria numa forma trivial para $Y(y)$. A igualdade pode ser respeitada de maneira não-trivial se admitirmos k_y como um número imaginário puro $k_y = i\bar{k}_y$, de modo que

$$e^{+k_y a} - e^{-k_y a} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2i\sin(\bar{k}_y a) = 0.$$

A restrição agora restringe a constante inicialmente arbitrária para $\bar{k}_y a = n\pi$, com $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Sendo assim, $V(x,y)$ toma a forma

$$\begin{aligned} V(x,y) &= \sum_{k_x,\bar{k}_y} \left(A_{k_x} e^{+k_x x} + B_{k_x} e^{-k_x x}\right)\left(e^{+i\bar{k}_y y} - e^{-i\bar{k}_y y}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2i\left(A_n e^{+n\pi x/a} + B_n e^{-n\pi x/a}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right). \end{aligned}$$

Aqui, excluimos o termo com $n = 0$ pois gera uma contribuição nula, e também aqueles em que $n < 0$, porque implicaria apenas em fator numérico -1, incorporado nas constantes arbitrárias. Já usamos também $k_x^2 = -k_y^2 = \bar{k}_y^2 = (n\pi/a)^2$. Incorporando o fator $2i$ nas constantes arbitrárias remanescentes, aplicamos as condições de contorno (3) e (4), temos

$$V(-b,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{-n\pi b/a} + B_n e^{+n\pi b/a}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = V_0,$$

$$V(+b,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{+n\pi b/a} + B_n e^{-n\pi b/a}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = V_0,$$

que são simultaneamente satisfeitas quando

$$A_n e^{-n\pi b/a} + B_n e^{+n\pi b/a} = A_n e^{+n\pi b/a} + B_n e^{-n\pi b/a},$$

o que produz $A_n = B_n$. Sendo assim, $V(x,y)$ toma a forma

$$\begin{aligned} V(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(e^{+n\pi x/a} + e^{-n\pi x/a}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right). \end{aligned}$$

Voltando agora às condições de contorno (3) e (4), e incorporando o fator 2 aos A_n's, conclui-se que ambas são

$$V(\pm b, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = V_0$$

Multiplicando por $\sin(m\pi y/a)$ e integrando de 0 até a temos

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)dy \\ &= V_0\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)dy = -\frac{aV_0}{m\pi}(\cos m\pi - 1). \end{aligned}$$

O lado esquerdo torna-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\frac{a}{2}\delta_{mn} = A_m\frac{a}{2}\cosh\left(\frac{m\pi b}{a}\right).$$

Assim, encontra-se $A_m = \frac{2V_0}{m\pi}\frac{1-\cos m\pi}{\cosh\left(\frac{m\pi b}{a}\right)}$, que reproduz o resultado mostrado.