UFPR – Departamento de Física
CF1804/Física Básica Geral IV – P_4
Prof. Alexandre D. Ribeiro (19/06/2019)

Observações: **i)** Indique de forma organizada o raciocínio e todos os cálculos usados na solução; **ii)** Ao resolver o problema literalmente, deixando para substituir os valores somente no final, existe uma chance maior dos passos intermediários serem pontuados; **iii)** Fórmulas não-pertencentes ao formulário da prova, quando utilizadas, devem ser deduzidas; **iv)** Quantidades vetoriais possuem informação sobre módulo, direção e sentido.

Problema 1: (1,50) Em um experimento de Ressonância Magnética Nuclear, uma gota d'água é submetida a um campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$. Suponha que o campo interno $\vec{B}_{int}$ seja desprezível. O valor absoluto de μ_z para um próton dos átomos de Hidrogênio das moléculas de água é $\mu_z = 1,5 \times 10^{-26}$ J/T. A ressonância magnética ocorre para $|\vec{B}_{ext}| = 2,2$ T. Qual é a frequência f da fonte de radiofrequência que produz a inversão dos spins dos prótons e qual é o comprimento de onda λ dos fótons envolvidos?

Resolução do Problema 1: Quando o próton (spin-$\frac{1}{2}$), que é portador de um momento magnético de spin $\vec{\mu}$, está sujeito a um campo magnético externo $\vec{B}_{ext} = B_z\hat{k}$, a energia atribuída a essa interação pode assumir dois valores $\pm|\mu_z||B_z|$. Em geral, esses prótons acabam ocupando o estado de menor energia. Para que haja uma transição para o outro nível de energia, é preciso que uma energia equivalente a

$$\Delta E = (+|\mu_z||B_z|) - (-|\mu_z||B_z|) = 2|\mu_z||B_z|$$

seja absorvida. Para o caso dela ser fornecida por um fóton, verifica-se que

$$\Delta E = hf \Longrightarrow f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{2|\mu_z||B_z|}{h} = 10^8 \text{ Hz},$$

que implica no seguinte comprimento de onda:

$$\lambda = \frac{c}{f} = 3 \text{ m}.$$

Problema 2: (2,00) *Nove* elétrons são confinados em um poço de potencial infinito quadrado ($L_x = L_y = L$). Despreze a interação elétrica entre os elétrons.
(a) Qual é a configuração eletrônica do estado fundamental do sistema de nove elétrons, e qual é a energia desse estado em função de $h^2/8mL^2$?
(b) Que energia deve ser fornecida ao sistema para que ele passe ao primeiro estado excitado, e qual é a energia desse estado?
(c) Que energia deve ser fornecida ao sistema para que ele passe ao segundo estado excitado, e qual é a energia desse estado?

Resolução do Problema 2: (a) Primeiro precisamos ordenar os níveis de energia sabendo que eles safisfazem a

$$E_{n_x,n_y} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right) = \frac{h^2}{8mL^2}\left(n_x^2 + n_y^2\right).$$

Montamos a seguinte tabela:

(n_x, n_y)		$\frac{E_{n_x,n_y}}{\frac{h^2}{8mL^2}}$
$(1,1)$	$\longrightarrow$	2
$(1,2)$ ou $(2,1)$	$\longrightarrow$	5
$(1,3)$ ou $(3,1)$	$\longrightarrow$	10
$(1,4)$ ou $(4,1)$	$\longrightarrow$	17
$(2,2)$	$\longrightarrow$	8
$(2,3)$ ou $(3,2)$	$\longrightarrow$	13

que implica no seguinte ordenamento:

$$\begin{aligned}(1,1) \quad &\rightarrow \quad (1,2) \text{ ou } (2,1) \rightarrow (2,2) \rightarrow (1,3) \text{ ou } (3,1)\\ &\rightarrow \quad (2,3) \text{ ou } (3,2).\end{aligned}$$

Logo, considerando agora o spin ($\pm\frac{1}{2}$), conclui-se que a configuração de menor energia, para nove elétrons, é dada por:

$$\begin{array}{cc} (1,1,m_s = \pm\frac{1}{2}) & \text{dois eletrons,}\\ (1,2,m_s = \pm\frac{1}{2}) & \text{dois eletrons,}\\ (2,1,m_s = \pm\frac{1}{2}) & \text{dois eletrons,}\\ (2,2,m_s = \pm\frac{1}{2}) & \text{dois eletrons,}\\ (1,3,m_s = \pm\frac{1}{2}) \text{ ou } (3,1,m_s = \pm\frac{1}{2}) & \text{um eletron,} \end{array}$$

sendo que este último elétron pode estar em qualquer um destes quatro estados. Somando a energia desta configuração:

$$\frac{E_{n_x,n_y}}{\frac{h^2}{8mL^2}} = 2 \times 2 + 4 \times 5 + 2 \times 8 + 1 \times 10 = 50.$$

(b) A partir dos quatro níveis de energia ocupados no estado fundamental, podemos aumentar a energia do sistema excitando algum de seus elétrons.

- Se fizermos isso a partir de $(1,1)$, o próximo estado disponível seria $(3,1)$ ou $(1,3)$, o que implicaria em um acréscimo de energia equivalente a $8\frac{h^2}{8mL^2}$.
- Se fizermos isso a partir de $(2,1)$ ou $(1,2)$, o próximo estado também disponível seria $(3,1)$ ou $(1,3)$, o que implicaria em um acréscimo de energia equivalente a $5\frac{h^2}{8mL^2}$.
- Se fizermos isso a partir de $(2,2)$, o próximo estado disponível ainda seria $(3,1)$ ou $(1,3)$, o que implicaria em um acréscimo de energia equivalente a $2\frac{h^2}{8mL^2}$.
- Finalmente, se fizermos isso a partir de $(3,1)$ ou $(1,3)$, o próximo estado disponível seria $(2,3)$ ou $(3,2)$, o que implicaria em um acréscimo de energia equivalente a

Desta forma, conclui-se que o primeiro estado excitado pode ser alcançado a partir da transição de um elétron do estado $(2,2)$ para $(3,1)$ ou $(1,3)$. A energia desta configuração seria de $52\frac{h^2}{8mL^2}$.

(c) Usando o raciocínio do ítem anterior, conclui-se que o segundo estado escitado é aquele para o qual, a partir do estado fundamental, um elétron transita do estado $(3,1)$ ou $(1,3)$ para $(3,2)$ ou $(2,3)$. A energia desta configuração seria de $53\frac{h^2}{8mL^2}$.

Problema 3: (1,50) Em uma amostra de 10 g de carvão vegetal, proveniente dos restos de uma antiga fogueira, o ^{14}C tem uma atividade de 30 desintegrações/min. Em uma árvore viva, o ^{14}C tem uma atividade de 15 desintegrações/(g·min).

(a) Para efeito de comparação, qual é a atividade de 10 g de árvore viva?

(b) Sabendo que a meia-vida do ^{14}C é de 5.730 anos, quanto vale a sua constante de desintegração λ?

(c) Qual é a idade da amostra?

Resolução do Problema 3: (a) Como, para cada grama, a atividade é de 15 desintegrações/min, então, para 10 g, temos 150 desintegrações/min. Esta deve ser a atividade inicial para a amostra retirada da fogueira.

(b) Para obter λ podemos usar informação sobre a meia vida do ^{14}C, ou seja, $T_{1/2} = 5730$ anos. Vejamos,

$$\begin{aligned} R(T_{1/2}) &= R_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \\ \frac{R_0}{2} &= R_0 e^{-\lambda T_{1/2}}, \end{aligned}$$

implicando em $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$.

(c) A taxa de desintegração R deve satisfazer

$$\begin{aligned} R(t) &= -\frac{dN}{dt} = -\frac{d}{dt}N_0 e^{-\lambda t} = N_0 \lambda e^{-\lambda t} \\ &= R_0 e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

R_0 é a taxa de desintegração inicial, 150 desintegrações/min. Sendo t_H o instante atual (idade da amostra), escrevemos

$$\begin{aligned} R(t_H) &= R_0 e^{-\lambda t_H} \\ (30 \text{ des./min}) &= (150 \text{ des./min})\ e^{-\lambda t_H}, \end{aligned}$$

que implica em

$$t_H = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{30}{150}\right) = \frac{1}{\lambda}\ln 5.$$

Como $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$,

$$t_H = \frac{\ln 5}{\ln 2}T_{1/2} \approx 13000 \text{ anos}.$$

Problema 4: (2,00) Um elétron está confinado em um largura; o elétron se encontra no *primeiro estado excitado*.

(a) Esboce um gráfico da densidade de probabilidade para este estado.

(b) Qual a probabilidade de que o elétron seja detectado em uma região de largura $\Delta x = 5,0$ pm, em torno do ponto $x = 25$ pm?

(c) Qual a probabilidade de que o elétron seja detectado na região $0 < x < 30$ pm?

Resolução do Problema 4: (a) Como trata-se do primeiro estado excitado, a função de onda vale

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad \text{com } n = 2.$$

O gráfico para a densidade de probabilidade

$$|\psi_2(x)|^2 = \frac{2}{L}\,\text{sen}^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

é aquele da Fig. 39-6 do livro ($n = 2$).

(b) Admitindo que dentro de uma região de largura $\Delta x = 5,0$ pm a densidade de probabilidade varia muito pouco, podemos aproximar:

$$\begin{aligned} P(22,5 \text{ pm} < x < 27,5 \text{ pm}) &= \int_{22,5 \text{ pm}}^{27,5 \text{ pm}} |\psi_2(x)|^2 dx \\ &\approx |\psi_2(x = 25 \text{ pm})|^2 \Delta x \\ &= \frac{2}{100}\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \times 5 = 0,1. \end{aligned}$$

(c) Agora a aproximação usada acima não vale mais porque a região é muito grande. Então, usado a integral do formulário,

$$\begin{aligned} P(0 \text{ pm} < x < 30 \text{ pm}) &= \int_0^{30 \text{ pm}} |\psi_2(x)|^2 dx \\ &= \frac{2}{L}\int_0^{30 \text{ pm}} \text{sen}^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L}\left(\frac{x}{2} - \frac{\text{sen}\left(\frac{4\pi x}{L}\right)}{8\pi/L}\right)\Bigg|_0^{30 \text{ pm}} \\ &= \frac{2}{100}\left(\frac{30}{2} - \frac{\text{sen}(1,2\pi)}{8\pi/100}\right) \\ &= \frac{2}{100}\left(\frac{30}{2} + \frac{0,59}{8\pi/100}\right) \approx 0,35. \end{aligned}$$

Problema 5: (1,50) Considere as seguintes massas atômicas:

$$\begin{array}{llll} ^{238}\text{U} & \rightarrow & 238,05079 \text{ u} & (Z = 92), \\ ^{237}\text{Pa} & \rightarrow & 237,05121 \text{ u} & (Z = 91), \\ ^{234}\text{Th} & \rightarrow & 234,04363 \text{ u} & (Z = 90), \\ ^{4}\text{He} & \rightarrow & 4,00260 \text{ u}, & (Z = 2), \\ ^{1}\text{H} & \rightarrow & 1,00783 \text{ u}, & (Z = 1), \end{array}$$

em que $u = 1,66 \times 10^{-27}$ kg.

(a) Calcule a energia liberada no seguinte decaimento:

(b) Verifique se a desintegração abaixo não é possível de se observar espontaneamente

$$^{238}\text{U} \rightarrow ^{237}\text{Pa} + ^{1}\text{H}.$$

Resolução do Problema 5: Problema Resolvido 42-6.

Problema 6: (1,50) Considere um elétron confinado a um potencial atômico. Seu estado quântico é representado por sua função de onda $\psi(\vec{r})$. Sabe-se, ao resolver a Equação de Schrödinger independente do tempo, que $\psi(\vec{r})$ pode ser escrito como uma combinação linear das funções $\psi_{n,l,m_l,s,m_s}(\vec{r})$, cuja forma depende do conjunto de cinco números quânticos (n, l, m_l, s, m_s). Assuma que estejamos tratando de um elétron no estado tal que $n = 2$ e $l = 1$.
(a) Quais os possíveis valores de m_l, s e m_s?
(b) Caso façamos uma medida, quais valores de $|\vec{L}|$, L_z, $|\vec{S}|$ e S_z podemos encontrar?

Resolução do Problema 6: (a) Como $l = 1$, e $m_l = -l, \ldots, l$, então, m_l pode assumir os valores -1, 0 e $+1$. Como trata-se de elétron, sabemos que $s = 1/2$. Sabendo que $m_s = -s, \ldots, s$, então, m_s vale +1/2 ou -1/2.
(b) Como $l = 1$ e $|\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$, então

$$|\vec{L}| = \sqrt{1(1+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar.$$

Da mesma forma,

$$|\vec{S}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}\hbar = \sqrt{\frac{3}{4}}\hbar.$$

Sobre L_z e S_z

$$L_z = m_l\hbar = \begin{cases} +\hbar, \\ 0, \\ -\hbar, \end{cases} \quad \text{e} \quad S_z = m_s\hbar = \begin{cases} +\hbar/2, \\ -\hbar/2. \end{cases}$$

Formulário

$p = \gamma m v, \quad E = K + mc^2 = \gamma mc^2, \quad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4,$

$E = hf, \quad c = \lambda f, \quad \lambda_{de\,Brog} = h/p, \quad K = \frac{1}{2}mv^2, \quad E = mc^2,$

$h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s, $\quad \hbar = \dfrac{h}{2\pi}, \quad m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg,

$m_p = 1,7 \cdot 10^{-27}$ kg, $\quad 1$ eV $= 1,6 \cdot 10^{-19}$ J, $\quad L = \sqrt{l(l+1)}\hbar,$

$c = 3 \times 10^8$ m/s, $\quad \pi \approx e \approx 3, \quad E_n = \dfrac{h^2n^2}{8mL^2}, \quad \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B},$

$\psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\dfrac{n\,\pi}{L}\,x\right), \quad \vec{F} = -\nabla U, \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B},$

$E_{n_x,n_y,n_z} = \dfrac{h^2}{8m}\left(\dfrac{n_x^2}{L_x^2} + \dfrac{n_y^2}{L_y^2} + \dfrac{n_z^2}{L_z^2}\right), \quad L_z = m_l\hbar,$

$\vec{\mu}_{orb} = -\dfrac{e}{2m}\vec{L} \quad \mu_{orb,z} = -m_l\mu_B, \quad S = \sqrt{s(s+1)}\hbar,$

$\mu_B = \dfrac{eh}{4\pi m} = 9,3 \times 10^{-24}\ \dfrac{\text{J}}{\text{T}}, \quad S_z = m_s\hbar, \quad \vec{\mu}_s = -\dfrac{e}{m}\vec{S}$

$\mu_{s,z} = -2m_s\mu_B, \quad N(t) = N_0e^{-\lambda t}, \quad R = -\dfrac{dN}{dt},$

$\displaystyle\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}, \quad P(a < x < b) = \int_a^b |\psi(x)|^2\,dx.$