UFPR – Departamento de Física
CF1804/Física Básica Geral IV – P_3
Prof. Alexandre D. Ribeiro (20/11/2019)

Observações: **i)** Indique de forma organizada o raciocínio e todos os cálculos usados na solução; **ii)** Ao resolver o problema literalmente, deixando para substituir os valores somente no final, existe uma chance maior dos passos intermediários serem pontuados; **iii)** Fórmulas não-pertencentes ao formulário da prova, quando utilizadas, devem ser deduzidas.

Problema 1: Uma esquadrilha de espaçonaves com 1 ano-luz de comprimento (no seu referencial de repouso) está se movendo com uma velocidade de $0,8c$ em relação a uma base espacial. Uma nave mensageira viaja da retaguarda à vanguarda da esquadrilha com uma velocidade de $0,95c$ em relação à base espacial. Quanto tempo leva a viagem no referencial na nave mensageira? E no referencial da base espacial? (1,50)

Resolução do Problema 1: Durante a viagem, a nave mensageira observa um ponto fixo na dianteira da primeira nave da esquadrilha, que se aproximar dela com velocidade $v_{EM} = -v_{ME}$. No final da viagem, este ponto percorreu uma distância L_{EM}, equivalente ao comprimento da esquadrilha visto pela mensageira. A relação entre estas duas quantidades com o tempo de viagem T_{VM} medido pela nave mensageira é:

$$|v_{EM}| = \frac{L_{EM}}{T_{VM}} \Longrightarrow T_{VM} = \frac{L_{EM}}{|v_{EM}|}.$$

O comprimento próprio da esquadrilha é aquele medido pelo próprio referencial da esquadrilha L_{EE}. Usamos a expressão para a contração do comprimento

$$L_{EM} = \sqrt{1 - \frac{v_{EM}}{c^2}} L_{EE}$$

para reescrever

$$T_{VM} = \frac{L_{EE}}{|v_{EM}|}\sqrt{1 - \frac{v_{EM}}{c^2}}.$$

Resta agora calcular v_{EM} em termos da velocidade da esquadrilha vista pela base v_{EB} e da velocidade da mensageira vista pela base v_{MB}. Usando a regra de transformação de velocidades, encontramos

$$\begin{aligned} v_{EM} &= \frac{v_{EB} + v_{BM}}{1 + v_{EB}v_{BM}/c^2} = \frac{v_{EB} - v_{MB}}{1 - v_{EB}v_{MB}/c^2} \\ &= \frac{0,8c - 0,95c}{1 - 0,8 \times 0,95} = -0,625c. \end{aligned}$$

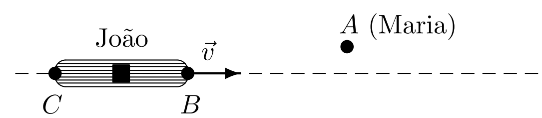
Então,

$$\begin{aligned} T_{VM} &= \frac{L_{EE}}{|v_{EM}|}\sqrt{1 - \frac{v_{EM}}{c^2}} = \frac{1 \text{ ano} - \text{luz}}{0,625c}\sqrt{1 - 0,625^2} \\ &= 1 \text{ ano}\frac{\sqrt{1 - 0,625^2}}{0,625} = 1,25 \text{ ano}. \end{aligned}$$

Ao identificarmos T_{VM} como o intervalo próprio de duração da viagem, podemos usar a expressão da dilatação do tempo para calcular

$$T_{VB} = \frac{T_{VM}}{\sqrt{1 - v_{MB}^2/c^2}} = \frac{1,25 \text{ ano}}{\sqrt{1 - 0,95^2}} = 4 \text{ anos}.$$

Problema 2: Na figura abaixo, Maria (no ponto A) e João (a bordo de uma espaçonave cujo comprimento próprio é $L_0 = 230$ m) passam um pelo outro com certa velocidade relativa. Segundo Maria, a nave leva 4 μs para passar (intervalo de tempo entre a passagem do ponto B e a passagem do ponto C). Em termos de c, qual é a velocidade relativa entre Maria e a nave? (1,50)



Resolução do Problema 2: Ver exemplo 37-3 do livro.

Problema 3: O próton de maior energia detectado até hoje em raios cósmicos possui a espantosa energia cinética de 3×10^{20} eV. A energia de repouso do próton vale $m_p c^2 = 938$ MeV. Calcule o fator γ para esta partícula. Então, suponha que o próton tenha percorrido uma distância igual ao diâmetro da Via Láctea ($9,8 \times 10^4$ anos-luz). Quanto tempo o próton levou para cobrir esta distância, do ponto de vista de um observador terrestre? E para o referencial de repouso dele? (1,50)

Resolução do Problema 3: Ver exemplo 37-8 do livro.

Problema 4: Qual deve ser o momento de uma partícula (relativística) de massa m para que a sua energia total seja três vezes maior que a energia de repouso? E qual deve ser a sua velocidade (deixe sua resposta em função de c)? (1,50)

Resolução do Problema 4: Para tal situação devemos ter $E = 3mc^2$. Logo,

$$\begin{aligned} &E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = 3mc^2 \\ &\Longrightarrow p^2c^2 + m^2c^4 = 9m^2c^4 \Longrightarrow p = \sqrt{8}mc. \end{aligned}$$

Quanto à sua velocidade, comparando $p = \gamma mv$ com a última expressão, conclui-se que

$$\sqrt{8}c = \gamma v \Longrightarrow 8 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \Longrightarrow \beta^2 = \frac{8}{9}.$$

Logo, $v = \sqrt{8/9}c$.

Problema 5: A partir da relação de decaimento exponencial $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, encontre a relação entre a meia-vida

$T_{1/2}$ e a taxa de decaimento λ. (1,50)

Resolução do Problema 5: Por definição, quando $t = T_{1/2}$, o número de radionuclídeos é a metade do número inicial, ou seja,

$$N(t = T_{1/2}) = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{N_0}{2}.$$

A partir desta última igualdade:

$$N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{N_0}{2} \Longrightarrow e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow -\lambda T_{1/2} = -\ln 2 \Longrightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Problema 6: Estima-se que uma rocha tenha uma idade de 6,4 bilhões de anos. Se a rocha contém 3 mg de ^{238}U, quantos miligramas de ^{206}Pb ela deve conter? Considere que a rocha não continha chumbo (Pb) na época em que se formou, de modo que todo núcleo de chumbo presente na amostra possa ser atribuído ao decaimento do urânio, segundo a reação

$$^{238}\text{U} \rightarrow {}^{206}\text{Pb} + \text{outros produtos},$$

com meia-vida de $4,47 \times 10^9$ anos. (1,50)

Resolução do Problema 6: O número de radionuclídeos de urânio decai no tempo de acordo com

$$N_U(t) = N_U^{(0)} e^{-\lambda t},$$

sendo $N_U^{(0)}$ o número inicial de radionuclídeos. Segundo o enunciado, desde a formação da rocha, passou um tempo de $\bar{T} = 6,4$ bilhões de anos. Além disso, como a massa de um átomo de urânio vale

$$m_U \approx 238\ u = 238 \times 1,66 \times 10^{-27}\ \text{kg} \approx 4 \times 10^{-25}\ \text{kg},$$

e a amostra contém 3 mg de ^{238}U, concluimos que atualmente ($\bar{T} = 6,4$ bilhões de anos) existem

$$N_U(\bar{T}) = \frac{3 \times 10^{-6}\ \text{kg}}{4 \times 10^{-25}\ \text{kg}} = 7,5 \times 10^{18}$$

radionuclídeos de urânio. Portanto, invertendo a primeira equação, inicialmente existiam (e usando $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$)

$$N_U^{(0)} = N_U(\bar{T}) e^{+\lambda \bar{T}} = 7,5 \times 10^{18} e^{\frac{6,5}{4,47} \ln 2} = 2,1 \times 10^{19}$$

radionuclídeos de urânio na amostra.

Independentemente do instante de tempo, a soma dos radionuclídeos de urânio com os de chumbo é uma constante. Em particular, em $t = 0$, sabemos que esta constante vale $N_U^{(0)}$. Assim,

$$N_U^{(0)} = N_U(t) + N_{Pb}(t) \Longrightarrow N_{Pb}(t) = N_U^{(0)} - N_U(t).$$

Para o instante atual,

$$N_{Pb}(\bar{T}) = N_U^{(0)} - N_U(\bar{T}) = 2,1 \times 10^{19} - 7,5 \times 10^{18} = 1,3 \times 10^{19}.$$

Como a massa de um átomo do chumbo vale

$$m_U \approx 206\ u = 206 \times 1,66 \times 10^{-27}\ \text{kg} \approx 3,4 \times 10^{-25}\ \text{kg},$$

esta quantidade de chumbo corresponde a uma massa de

$$1,3 \times 10^{19} \times 3,4 \times 10^{-25}\ \text{kg} = 4,4 \times 10^{-6}\ \text{kg}.$$

Problema 7: Considere as seguintes massas atômicas:

^{238}U	$\rightarrow$	$238,05079$ u	($Z = 92$),
^{237}Pa	$\rightarrow$	$237,05121$ u	($Z = 91$),
^{234}Th	$\rightarrow$	$234,04363$ u	($Z = 90$),
^{4}He	$\rightarrow$	$4,00260$ u,	($Z = 2$),
^{1}H	$\rightarrow$	$1,00783$ u,	($Z = 1$),

em que $u = 1,66 \times 10^{-27}$ kg. (1,50)

(a) Calcule a energia liberada no seguinte decaimento:

$$^{238}\text{U} \rightarrow^{234} \text{Th} +^{4} \text{He}.$$

(b) Verifique se a desintegração abaixo é possível de se observar espontaneamente

$$^{238}\text{U} \rightarrow^{237} \text{Pa} +^{1} \text{H}.$$

Resolução do Problema 7: Ver exemplo 42-6 do livro.

Formulário:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0, \quad L = L_0/\gamma, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = v/c,$$

$$v_{AB} = \frac{v_{AC} + v_{CB}}{1 + v_{AC} v_{CB}/c^2}, \quad x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma(t - vx/c^2),$$

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \quad p = \gamma m v, \quad E = K + mc^2 = \gamma mc^2,$$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4, \quad 1\ \text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}, \quad c = 3 \times 10^8\ \text{m/s},$$

$$uc^2 = 931,5\ \text{MeV}.$$