UFPR – Departamento de Física
CF1804/Física Básica Geral IV – P_2
Prof. Alexandre D. Ribeiro (21/10/2019)

Problema 1: Um satélite em órbita em torno da Terra utiliza um painel de células solares com uma área $A = 2$ m^2, que é mantido perpendicularmente aos raios solares. A intensidade de luz que incide no painel é $I = 1,5$ kW/m^2.
(a) Qual é a potência luminosa incidente no painel? (1,00)
(b) Quantos fótons por segundo são absorvidos no painel? Dica: Adote um comprimento de onda médio $\lambda = 550$ nm e suponha que não há reflexão no painel. (1,00)

Resolução do Problema 1: (a) A potência vale

$$P = IA = 1,5 \text{ kW/m}^2 \times 2 \text{ m}^2 = 3 \text{ kW}.$$

(b) Pelo item anterior, são absorvidos 3 kJ de energia por segundo. Por outro lado, a energia E_n de n fótons com comprimento de onda λ pode ser escrita como

$$E_n = nhf = \frac{nhc}{\lambda} \Longrightarrow n = \frac{\lambda E_n}{hc}.$$

Usando $E_n = 3$ kJ e $\lambda = 550$ nm, conclui-se que

$$n = \frac{5,5 \cdot 10^{-7} \text{ m} \times 3 \cdot 10^3 \text{ J}}{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}} \approx 8 \cdot 10^{21}$$

fótons são absorvidos por segundo.

Problema 2: Um elétron está confinado em um poço de potencial infinito unidimensional de largura L (entre $x = 0$ e $x = L$). Além disso, sabe-se que o elétron encontra-se no estado fundamental.
(a) Esboce um gráfico da densidade de probabilidade para este estado. (0,50)
(b) Qual é a probabilidade do elétron ser encontrado em uma região de largura $L/20$, em torno de $x = L/4$. Represente graficamente o resultado. (1,00)
(c) Qual é a probabilidade do elétron ser encontrado em uma região de largura $L/3$, definido por $0 \leq x \leq L$. Represente graficamente o resultado. (0,50) — ANULADA

Resolução do Problema 2: (a) Como trata-se do estado fundamental, a função de onda vale

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad \text{com } n = 1.$$

O gráfico para a densidade de probabilidade

$$|\psi_1(x)|^2 = \frac{2}{L} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

é aquele da Fig. 39-6 do livro ($n = 1$).
(b) A região em questão vai desde

$$x_- = \frac{L}{4} - \frac{L}{40} = \frac{9L}{40} \quad \text{até} \quad x_+ = \frac{L}{4} + \frac{L}{40} = \frac{11L}{40}.$$

Admitindo que dentro de uma região de largura $\frac{L}{20}$ a densidade de probabilidade varia muito pouco, podemos aproximar:

$$\begin{aligned} P(x_- < x < x_+) &= \int_{x_-}^{x_+} |\psi_1(x)|^2 dx \\ &\approx |\psi_1(x = L/4)|^2 (x_+ - x_-) \\ &= \frac{2}{L} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{L}\frac{L}{4}\right) \times \frac{L}{20} = 1/20. \end{aligned}$$

Problema 3: Considere um elétron confinado a um potencial atômico. Seu estado quântico é representado por sua função de onda $\psi(\vec{r})$. Sabe-se, ao resolver a Equação de Schrödinger independente do tempo, que $\psi(\vec{r})$ pode ser escrito como uma combinação linear das funções $\psi_{n,l,m_l}(\vec{r})$, cuja forma depende do conjunto dos quânticos (n, l, m_l). Para completar a caracterização do estado eletrônico ainda precisamos dos números quânticos (s, m_s). Assuma que estejamos tratando de um elétron no estado tal que $n = 2$ e $l = 1$.
(a) Quais os possíveis valores de m_l, s e m_s? (1,00)
(b) Caso façamos uma medida, quais valores de $|\vec{L}|$, L_z, $|\vec{S}|$ e S_z podemos encontrar? (1,00)

Resolução do Problema 3: (a) Como $l = 1$, e $m_l = -l, \ldots, l$, então, m_l pode assumir os valores -1, 0 e $+1$. Como trata-se de um elétron, sabemos que $s = 1/2$. Sabendo que $m_s = -s, \ldots, s$, então, m_s vale $+1/2$ ou -1/2.
(b) Como $l = 1$ e $|\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$, então

$$|\vec{L}| = \sqrt{1(1+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar.$$

Da mesma forma,

$$|\vec{S}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}\hbar = \sqrt{\frac{3}{4}}\hbar.$$

Sobre L_z e S_z

$$L_z = m_l\hbar = \begin{cases} +\hbar, \\ 0, \\ -\hbar, \end{cases} \quad \text{e} \quad S_z = m_s\hbar = \begin{cases} +\hbar/2, \\ -\hbar/2. \end{cases}$$

Problema 4: *Sete* elétrons são confinados em um poço de potencial infinito quadrado ($2L_x = L_y = L$). Despreze a interação elétrica entre os elétrons.
(a) Qual é a configuração eletrônica do estado fundamental do sistema de sete elétrons, e qual é a energia desse estado em função de $h^2/8mL^2$? (0,75)
(b) Que energia deve ser fornecida ao sistema para que ele passe ao primeiro estado excitado, e qual é a energia desse estado? (0,50)
(c) Que energia deve ser fornecida ao sistema para que ele passe ao segundo estado excitado, e qual é a energia desse estado? (0,75)

Resolução do Problema 4: (a) Primeiro precisamos ordenar os níveis de energia sabendo que eles safisfazem a

$$E_{n_x,n_y} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right) = \frac{h^2}{8mL^2}\left(4n_x^2 + n_y^2\right).$$

Montamos a seguinte tabela:

(n_x, n_y)		$\frac{E_{n_x,n_y}}{h^2/(8mL^2)}$
$(1,1)$	$\longrightarrow$	5
$(1,2)$	$\longrightarrow$	8
$(2,1)$	$\longrightarrow$	17
$(1,3)$	$\longrightarrow$	13
$(3,1)$	$\longrightarrow$	37
$(2,2)$	$\longrightarrow$	20
$(1,4)$	$\longrightarrow$	20
$(2,3)$	$\longrightarrow$	25

que implica no seguinte ordenamento:

$$(1,1) \to (1,2) \to (1,3) \to (2,1) \to (2,2) \quad \text{ou} \quad (1,4)\ldots.$$

Logo, considerando agora o spin ($\pm\frac{1}{2}$), conclui-se que a configuração de menor energia, para nove elétrons, é dada por:

$$\begin{array}{ll} (1,1,m_s = \pm\frac{1}{2}) & \text{dois elétrons,} \\ (1,2,m_s = \pm\frac{1}{2}) & \text{dois elétrons,} \\ (1,3,m_s = \pm\frac{1}{2}) & \text{dois elétrons,} \\ (2,1,m_s = \pm\frac{1}{2}) & \text{um elétron.} \end{array}$$

Somando a energia desta configuração:

$$\frac{E_{n_x,n_y}}{\frac{h^2}{8mL^2}} = 2\times 5 + 2\times 8 + 2\times 13 + 1\times 17 = 69.$$

(b) A partir dos quatro níveis de energia ocupados no estado fundamental, podemos aumentar a energia do sistema excitando algum de seus elétrons.

- Se fizermos isso a partir de $(1,1)$, o próximo estado disponível seria 0 $(2,1)$, o que implicaria em um acréscimo de energia equivalente a $12\frac{h^2}{8mL^2}$.
- Se fizermos isso a partir de $(1,2)$, o próximo estado disponível também seria $(2,1)$, o que implicaria em um acréscimo de energia equivalente a $9\frac{h^2}{8mL^2}$.
- Se fizermos isso a partir de $(1,3)$, o próximo estado disponível também seria $(2,1)$, o que implicaria em um acréscimo de energia equivalente a $4\frac{h^2}{8mL^2}$.
- Finalmente, se fizermos isso a partir de $(2,1)$, o próximo estado disponível seria $(2,2)$, o que implicaria em um acréscimo de energia equivalente a $3\frac{h^2}{8mL^2}$.

Desta forma, conclui-se que o primeiro estado excitado pode ser alcançado a partir da transição de um elétron do estado $(2,1)$ para $(2,2)$. A energia desta configuração seria de $72\frac{h^2}{8mL^2}$.

(c) Usando o raciocínio do ítem anterior, conclui-se que o segundo estado excitado é aquele para o qual, a partir do estado fundamental, um elétron transita do estado $(2,1)$ para $(2,2)$ e outro de $(1,3)$ para $(2,2)$. A energia desta configuração seria de $76\frac{h^2}{8mL^2}$.

Problema 5: (a) Qual é a energia mínima necessária para separar o elétron do próton, que formam um átomo de hidrogênio, se o átomo se encontra no estado fundamental? (1,00)
(b) E se o átomo estiver em $n = 2$? (1,00)

Resolução do Problema 5: (a) Como o elétron encontra-se no estado fundamental, sua energia é de $E_1 = -13,6/1^2 = -13,6$ eV. Para deixar o confinamento, o elétron deve ter, no mínimo, energia nula. Logo, uma energia de $13,6$ eV seria suficiente para separá-lo do próton.

(b) Neste caso, sua energia é de $E_2 = -13,6/2^2 = -3,4$ eV. Logo, uma energia de $13,6$ eV seria suficiente para deixá-lo com energia nula, e, portanto, separá-lo do próton.