LISTA DE EXERCÍCIOS (pacote gaussiano partícula livre)

Considere o pacote de onda:

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{\psi}(k,0) \exp(ikx)$$

onde

$$\tilde{\psi}(k,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x,0) \exp(-ikx)$$

É a transformada de Fourier de $\psi(x,0)$.

1) Mostre que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x,0)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \left|\tilde{\psi}(k,0)\right|^2$$

2) Continue a considerar o pacote de onda gaussiano trabalhado em aula:

$$\tilde{\psi}(k,0) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{1/4}} \exp \frac{-a^2}{4} (k-k_0)^2$$

a) Mostre que $\tilde{\psi}(k,0)$ está normalizado (Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \left|\tilde{\psi}(k,0)\right|^2$ e mostre que é = 1)

b) Calcule $\psi(x,0)$ e $|\psi(x,0)|^2$

c) Calcule $\Delta x = \sqrt{< x^2 > - < x >^2}$ e mostre que se $\psi(x,0)$ estiver normalizada Δx está relacionado ao expoente da gaussiana [$\Delta x \propto \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$ se $|\psi(x,0)|^2 \propto \exp -\alpha x^2$]

d) Calcule

$$< k^2 > = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, k^2 \left|\tilde{\psi}(k,0)\right|^2 = \frac{a}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, k^2 \exp \frac{-a^2}{2} (k-k_0)^2$$

[faça $k' = k - k_0$ e depois perceba que $\int_{-\infty}^{\infty} dk\, k^2 \exp(-\alpha k^2) = -\frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \exp(-\alpha k^2)$. O resultado de $< k^2 >$ foi dado em aula.]

e) A evolução temporal do pacote de onda é dada por:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{\psi}(k,0) \exp i(kx - \omega t)$$

onde $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$. Obtenha uma expressão para $\psi(x,t)$ e para a densidade de probabilidade $|\psi(x,t)|^2$.

f) Obtenha uma expressão para $\Delta x(t)$.

Informações úteis:

Delta de Dirac:

$$\delta(x - x_0) \ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \ \ \exp ik(x - x_0)$$

$$\delta(x - x_0) \ = \begin{cases} 0, & x \neq x \\ \infty, & x = x_0 \end{cases}$$

Integrais:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \ \ \exp(-k^2) = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \ k^2 \exp(-\alpha k^2) \ = -\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} dk \ \ \exp(-\alpha k^2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \ \ \exp[-\alpha k^2 + \beta k] \ = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left[\frac{\beta^2}{4\alpha}\right]$$