O problema da força central em mecânica clássica

Prof. Celso de A. Duarte
Mecânica Geral B - 2^o semestre de 2016

1 Forças Centrais

Força central é aquela cujo módulo depende apenas depende da distância d do cormo em movimento em relação a um centro de referência – que consideraremos ser um ponto O que seja a origem de um sistema de referência $S(x, y, z)$. Desse modo, d é simplesmente o comprimento do raio vetor do corpo, $d = |\vec{r}| = r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$. Em acréscimo, a orientação da força central também é definida, sendo paralela ou antiparalela a $\vec{r}$. Em suma,

$$\vec{F}(r) = F(r)\hat{r}, \tag{1.1}$$

onde $\hat{r}$ é o versor unitário na direção de $\vec{r}$.
Aplicamos então a segunda lei de Newton, para obter

$$F(r)\hat{r} = m\ddot{\vec{r}}. \tag{1.2}$$

Devemos agora desenvolver o membro direito de 1.2. Notemos inicialmente que

$$\vec{r} = r\hat{r} \tag{1.3}$$

e portanto

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\overline{r\hat{r}}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} \tag{1.4}$$

A maior dificuldade é determinação de $\dot{\hat{r}}$:

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta} \tag{1.5}$$

portanto

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{1.6}$$

Consequentemente, podemos calcular a 2^a derivada de $\vec{r}$:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} \tag{1.7}$$

agora a próxima dificudade consiste na determinação de $\dot{\theta}$:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r} \tag{1.8}$$

Finalmente,

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r} \tag{1.9}$$

Finalmente substituímos esse resultado em 1.2:

$$F(r)\hat{r} = m(\ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r}) \tag{1.10}$$

Separamos agora as componentes da equação vetorial 1.10:

$$\begin{cases} \dfrac{F(r)}{m} &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 0 &= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases} \tag{1.11}$$

A primeira equação de 1.11 divide a aceleração total do corpo $a = F(r)/m$ em duas partes: a aceleração *radial* $\ddot{r}$ e a aceleração *centrípeta* a_c,

$$a_c = -r\dot{\theta}^2 = \frac{v_\theta^2}{r}. \tag{1.12}$$

A segunda equação de 1.11, a multiplicamos por r, e considerando que $(\dot{r^2}) = 2r\dot{r}$, obtemos:

$$0 = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \;\Leftrightarrow\; r^2\dot{\theta} = constante \tag{1.13}$$

Note-se que $r^2\dot{\theta} = rv_\theta$, onde $v_\theta = r\dot{\theta}$ é a velocidade linear ao longo da órbita, perpendicular a $\vec{r}$. Portanto, a constante em 1.13 é precisamente a razão entre o momento angular L e a massa,

$$r^2\dot{\theta} = \frac{L}{m} \tag{1.14}$$

Podemos agora analisar a primeira equação de 1.11. Começamos substituindo eliminando a presença de $\dot{\theta}$ a partir de 1.14:

$$\frac{F(r)}{m} = \ddot{r} - \frac{L^2}{m^2r^3} \tag{1.15}$$

ou seja,

$$\ddot{r} = \frac{F(r)}{m} + \frac{L^2}{m^2}\frac{1}{r^3} \tag{1.16}$$

Para resolver essa equação, poderíamos inicialmente multiplicá-la por $\dot{r}$, para obter, após manipulação:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{r}^2\right) = \frac{F(r)}{m}\frac{dr}{dt} - \frac{L^2}{m^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2r^2}\right) \tag{1.17}$$

Em outras palavras,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{r}^2\right) = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\int F(r)dr - \frac{L^2}{m^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2r^2}\right) \tag{1.18}$$

Conseguimos, assim, fazer uma primeira integração de 1.16, que reescrevemos na forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2}\frac{1}{2r^2} - \frac{1}{m}\int F(r)dr\right) = 0 \tag{1.19}$$

Em outras palavras,

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m}\frac{1}{2r^2} - \int F(r)dr = E = constante \tag{1.20}$$

e obviamente estamos falando agora da energia total da partícula, que deve ser constante, e compreende a energia cinética (o primeiro termo de 1.20) e a energia potencial $V'(r)$, que dividimos em duas partes: um potencial $V(r) = -\int F(r)dr$ exclusivamente devido à força $F(r)$ e um *potencial centrífugo*:

$$V'(r) = V(r) + \frac{L^2}{2m}\frac{1}{r^2}. \tag{1.21}$$

Podemos finalmente obter $\dot{r}$ de 1.20,

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - V'(r)}, \tag{1.22}$$

que rearranjamos na forma

$$\int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{E - V'(r)}} = \sqrt{\frac{m}{2}}(t - t_0)t \tag{1.23}$$

Pela resolução de 1.23, encontraríamos a função $r(t)$, e com ela, poderíamos determinar também $\theta(t)$, inicialmente substituindo $r(t)$ em 1.14 e em seguida realizando uma integração. Isso finalizaria a resolução do problema.
Entretanto, podemos evitar as dificuldades inerentes à integração de 1.23, apelando para outra possibilidade. Dividimos 1.22 por $\dot{\theta}$, para obter

$$\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{\dot{\theta}}\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - V'(r)}, \tag{1.24}$$

e substituímos 1.14, para obter:

$$r' = \frac{r^2}{L}\sqrt{2m(E - V'(r))}, \tag{1.25}$$

onde o símbolo $'$ representa a derivada em relação a θ, de modo que $u' = \frac{dr}{d\theta}$. Assim podemos encontrar uma fórmula para a trajetória $r(\theta)$ através da equação integral

$$L\int_{r(\theta_0)}^{r(\theta)} \frac{dr}{r^2\sqrt{2m(E - V'(r))}} = \theta - \theta_0 \tag{1.26}$$

Mas ainda podemos considerar os casos mais comuns na natureza envolvem potenciais que variam com o inverso da distância, já que estão associados a forças que variam com o inverso do quadrado da distância. Em outras palavras,

$$V(r) = \frac{K}{r} = V\left(\frac{1}{u}\right) \tag{1.27}$$

onde definimos $u = 1/r$ e K é uma constante. Desse modo,

$$V'(r) = V'\left(\frac{1}{u}\right) \tag{1.28}$$

e assim usaremos em 1.26 a variável de integração u ao invés de r:

$$-L\int_{u(\theta_0)}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{2m\left[E - V'\left(\frac{1}{u}\right)\right]}} = \theta - \theta_0, \tag{1.29}$$

(para passar de 1.26 para essa expressão, consideramos que $dr/r^2 = -d(1/r) = -du$).
Seguindo o caminho alternativo apontado pela referência [1], façamos o seguinte: partindo das funções paramétricas $r(t)$ e $\theta(t)$ em termos do parâmetro comum t, definimos a função $u(\theta)$ por

$$u(\theta) = \frac{1}{r(t)} \tag{1.30}$$

quebrando assim a necessidade da parametrização pelo parâmetro t. Calculamos sucessivamente a primeira derivada de $r(t)$ com respeito ao tempo,

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= \frac{dr(t)}{dt} = \frac{du^{-1}(\theta)}{d\theta}\frac{d\theta(t)}{dt} \\ &= -\frac{1}{u^2}u'\dot{\theta} \equiv -r^2\dot{\theta}u' \\ &= -\frac{L}{m}u' \end{aligned} \tag{1.31}$$

em que empregamos uma substituição de 1.14. Agora, calculemos a segunda derivada de $r(t)$ com respeito ao tempo:

$$\begin{aligned} \ddot{r}(t) &= \frac{d}{dt}\left(-\frac{L}{m}u'\right) \\ &= -\frac{L}{m}\frac{d\theta(t)}{dt}\frac{du'(\theta)}{d\theta} = \\ &= -\frac{L}{m}\dot{\theta}u'' = \\ &= -\frac{L^2}{m^2r^2}u'' = -\frac{L^2u^2}{m^2}u'' \end{aligned} \tag{1.32}$$

Finalmente, substituímos essa expressão para $\ddot{r}(t)$ em 1.16

$$-\frac{L^2u^2}{m^2}u'' = \frac{F(r)}{m} + \frac{L^2}{m^2}\frac{1}{r^3} \tag{1.33}$$

que, após manipulação, se converte em

$$u'' = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) - u \tag{1.34}$$

que é uma forma alternativa para a equação da trajetória apresentada finalmente pela referência [1]. Essa expressão para u'' contém duas contribuições distintas do lado direito: o primeiro termo, mais complexo, advém da força externa $F(r) = F(1/u)$, e o segundo é, obviamente, uma contribuição da força centrípeta.
Não nos ocuparemos em resolver 1.34 de modo análogo ao feito para 1.25, o que seria contraproducente, redundante. Ao contrário, a equação 1.34 nos serve para extraírmos uma informação interessante de outra natureza.

Note-se que, à parte o termo mais complexo que envolve $F(1/u)$, a equação 1.34 é dada por $u'' = -u$, que é a equação do movimento de um movimento harmônico simples (MHS) de frequência angular ω onde $m\omega^2 = 1$. Consideremos então que a partícula realize o movimento em um domínio estreito de valores de u. Nessa situação, seja $u_0 = 1/r_0$ o ponto central de referência na órbita, em que u'' se anule. Então, de 1.34,

$$-\frac{m}{L^2u_0^2}F\left(\frac{1}{u_0}\right) - u_0 = 0 \tag{1.35}$$

Podemos então fazer uma expansão em série de 1.34 em torno do ponto u_0. Inicialmente escrevemos $u = u_0 + \delta u$,

$$\delta u'' = -\frac{m}{L^2(u_0 + \delta u)^2}G(u_0 + \delta u) - (u_0 + \delta u) \tag{1.36}$$

onde se definiu $G(u) = F(1/u)$. Fazendo a expansão em primeira ordem de cada termo, obtemos:

$$\delta u'' = -\frac{m}{L^2u_0^2}\left(1 - 2\frac{\delta u}{u_0}\right)(G(u_0) + \delta u G'(u_0)) - u_0 - \delta u \tag{1.37}$$

Note-se que u é função de θ, e assim $\delta u'' = d^2u/d\theta^2$, e por outro lado $G(u)$ é função de u, e assim na nossa notação $G'(g) = dG/du$.
Expandindo os binômios e desprezando o termo que aparece em δu^2, justamente por ser quadrático e desprezível,

$$\delta u'' = -\frac{m}{L^2u_0^2}G(u_0) + \frac{2m}{L^2u_0^3}\delta u G(u_0) - \frac{m}{L^2u_0^2}\delta u G'(u_0) - u_0 - \delta u \tag{1.38}$$

Entretanto, note-se que para $\delta u = 0$ temos $u'' = 0$ (pois assumimos que u_0 é o ponto de mínimo, no qual u'' se anula). Portanto,

$$0 = -\frac{m}{L^2u_0^2}G(u_0) - u_0 \tag{1.39}$$

Substituindo-se esse resultato em 1.38, obtemos:

$$\delta u'' = -\left[1 - \frac{2m}{L^2u_0^3}G(u_0) + \frac{m}{L^2u_0^2}G'(u_0)\right]\delta u \tag{1.40}$$

ou seja,

$$\delta u'' = -\Omega^2 \delta u \tag{1.41}$$

que representa um MHS realizado em torno do ponto $u = u_0$, de frequência angular

$$\Omega = \sqrt{1 - m\frac{2G(u_0) - u_0G'(u_0)}{L^2u_0^3}} \tag{1.42}$$

Note-se que, para o caso particular do potencial gravitacional, $G(u) = F(1/u) = Ku^2$, e assim na expressão 1.42 teremos $\Omega = 1$, o que significa que

$$\delta u = Acos(\theta - \theta_0), \tag{1.43}$$

ou seja, temos uma órbita fechada, já que para $\theta \mapsto \theta + 2\pi$ temos a repetição, isto é $\delta(\theta + 2\pi) = \delta(\theta)$.

Consideremos agora a órbita da partícula para uma força genérica. Essa órbita pode corresponder a uma curva fechada ou não. Se for uma curva fechada, se a curva se fecha no primeiro percurso angular $\theta \mapsto \theta + 2\pi$, podemos considerar a área dessa órbita, que será dada por

$$S = \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta, \tag{1.44}$$

fórmula essa que deduzimos de simples considerações de geometria. Apelando para 1.14, $mr^2 d\theta = L dt$, e assim

$$S = \int_{t}^{t+T} \frac{1}{2} \frac{L}{m} dt = \frac{L}{2m} T \tag{1.45}$$

onde T é o *período* da órbita. Assim, se a forma da órbita é conhecida, pode-se determinar diteramente o seu período através de 1.45. Entretanto, fazendo uma crítica a essa afirmação, a obtenção não é imediata, já que requere ainda o conhecimento de L.

1.1 Força inversamente proporcional ao quadrado da distância: a força da gravidade

Nesse caso,

$$\vec{F}(r) = \frac{K}{r^2} \hat{r} \tag{1.46}$$

onde $K = -Gm_1m_2$, sendo m_1, m_2 as massas dos corpos interagentes. A energia potencial correspondente, associada apenas à força $F(r)$, será

$$V(r) = -\int \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = \frac{K}{r} \tag{1.47}$$

Aqui a equação 1.34 mostrará seu valor maior. A escreveremos como

$$u'' + u = -\frac{mK}{L^2} \tag{1.48}$$

Podemos definir a variável $v = u + mK/L^2$, e assim 1.48 se torna

$$v'' + v = 0, \tag{1.49}$$

que é a equação do movimento de um MHS de frequência angular ω tal que $m\omega^2 = 1$. A sua solução geral é:

$$v(\theta) = Acos(\theta - \theta_0) \tag{1.50}$$

e assim, segue que

$$\frac{1}{r(\theta)} = u(\theta) = Acos(\theta - \theta_0) - \frac{mK}{L^2} \tag{1.51}$$

Essa expressão descreve uma trajetória periódica fechada, já que $r(\theta) \equiv r(\theta + 2\pi)$. Os valores extremos de r ao longo do movimento são dados por:

$$\frac{1}{r_{\pm}} = \pm A - \frac{mK}{L^2} \tag{1.52}$$

Obviamente a solução r_- só terá sentido se $-A - mK/L^2 > 0$. Caso isso não se verifique, não há sentido em se falar de r_- e a órbita só terá apenas um ponto extremo, r_+. Isso significa que a órbita deverá ser aberta, e assintoticamente tender ao infinito.
De 1.52, constatamos que

$$\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} = 2A \tag{1.53}$$

Por outro lado, podemos obter $r_\pm$ analisando-se a energia da partícula, e com essa informação, poderemos determinar A através de 1.53. De 1.20,

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m}\frac{1}{2r^2} + \frac{K}{r} = E \tag{1.54}$$

Está claro que nos pontos extremos $r_\pm$ teremos $\dot{r} = 0$. Assim fazendo em 1.54, obtemos:

$$\frac{L^2}{m}\frac{1}{2r_\pm^2} + \frac{K}{r_\pm} = E \tag{1.55}$$

Resolvendo explicitamente para $(1/r)$, encontramos as duas raízes:

$$\frac{1}{r_\pm} = \frac{mK}{L^2}\left[\pm\sqrt{1 + \frac{2E}{m}\left(\frac{L}{K}\right)^2} - 1\right] \tag{1.56}$$

Substituindo-se em 1.53, encontramos

$$A = -\frac{mK}{L^2}\sqrt{1 + \frac{2E}{m}\left(\frac{L}{K}\right)^2} \tag{1.57}$$

e fica univocamente determinado o valor do parâmetro de amplitude A em termos do momento angular L e da energia E da partícula.

Discussão:

1. Observando 1.51, diga se há um significado físico, ainda que *aproximado*, para $1/A$.
2. Considere os casos extremos de momento angular muito pequeno e muito grande. Quais os correspondentes valores de A?
3. Na mesma situação do item anterior, quais os valores aproximados de $1/r_\pm$? (considere para isso, obviamente, a expressão 1.52).

Como mostraremos, posteriormente, a expressão 1.51 descreve a família das *seções cônicas* (ver figura 1). Tomando-se a equação do cone,

$$z = \alpha\sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.58}$$

e a do plano que o corta,

$$z = \beta y + \gamma \tag{1.59}$$

obtemos:

$$\beta y + \gamma = \alpha\sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.60}$$

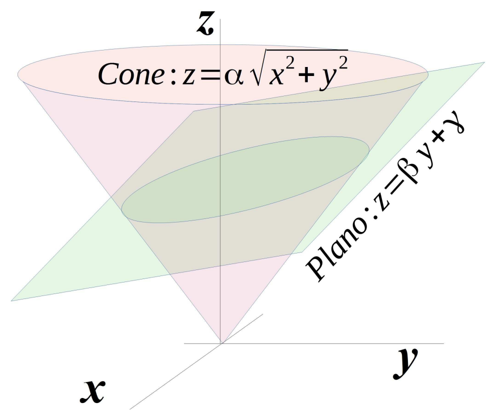


Figura 1: Representação de uma figura cônica (ver texto).

Elevando ao quadrado, obtemos

$$\beta y + \gamma = \alpha\sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.61}$$

Elevando ao quadrado e rearranjando os termos,

$$\gamma^2 = \alpha^2 x^2 + (\alpha^2 - \beta^2)y^2 - 2\beta\gamma y \tag{1.62}$$

Num artifício matemático, somamos $\beta\gamma/\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ aos dois membros de 1.62. O termo somado à direita formará, conjuntamente com os termos que envolvem y nesse segundo membro, um binômio quadrado perfeito. O segundo (que foi subtraído), passamos ao membro esquerdo de 1.62. O resultado final é:

$$\frac{\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2 - \beta^2} = \alpha^2 x^2 + (\alpha^2 - \beta^2)\left(y - \frac{\beta\gamma}{\alpha^2 - \beta^2}\right)^2 \tag{1.63}$$

Essa equação não descreve sozinha a figura de intersecção, que reside no espaço e não está contida no plano xy (ver figura 1): necessitamos de uma equação adicional (uma entre 1.58 e 1.59). Para visualizar a figura de intersecção no plano xy (por exemplo), faremos uma *rotação* do nosso sistema de coordenadas. Uma vez que o plano $z = \beta y + \gamma$ é paralelo ao eixo x, faremos uma rotação em torno de x para que a figura se apresente paralela ao plano xy. Antes disso, faremos uma *translação* de nosso sistema de eixos, dada por:

$$y \mapsto y + \frac{\beta\gamma}{\alpha^2 - \beta^2} \tag{1.64}$$

Com isso, as equações da cônica se tornam:

$$\begin{aligned} z &= \beta y + \gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}\right) \\ \frac{\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2 - \beta^2} &= \alpha^2 x^2 + (\alpha^2 - \beta^2)y^2 \end{aligned} \tag{1.65}$$

Agora fazemos a rotação em torno de x, em um ângulo ϕ:

$$\begin{aligned} z &= z' cos\phi + y' sen\phi \\ y &= z' sen\phi - y' cos\phi \end{aligned} \tag{1.66}$$

Nosso objetivo é eliminar a dependência com respeito à coordenada z. Uma vez que essa coordenada só aparece na primeira equação de 1.65, ela é o ponto chave. Substituindo 1.66 em 1.65, encontramos:

$$z' cos\phi + y' sen\phi = \beta(z' sen\phi - y' cos\phi) + \gamma \left(1 + \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}\right) \tag{1.67}$$

Agrupando termos,

$$z'(cos\phi - \beta sen\phi) + y'(sen\phi + \beta cos\phi) = \gamma \left(1 + \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}\right) \tag{1.68}$$

Com essa rotação, queremos que z' seja constante. Isso conseguimos se fizermos

$$sen\phi + \beta cos\phi = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad tg\phi = -\beta \tag{1.69}$$

o que implica no anujlamento do termo em y' em 1.68 e imediatamente na constância de z',

$$z' = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \beta^2}} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}\right) \tag{1.70}$$

Conhecido o ângulo ϕ correto de 1.69, substituímos a expressão de y (de 1.66) na segunda equação de 1.65:

$$\frac{\alpha^2 \gamma^2}{\alpha^2 - \beta^2} = \alpha^2 x^2 + (\alpha^2 - \beta^2)\left(z' sen\phi - y' cos\phi\right)^2 \tag{1.71}$$

ou seja,

$$\frac{\alpha^2 \gamma^2}{\alpha^2 - \beta^2} = \alpha^2 x^2 + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{1 + \beta^2}\left(z'\beta + y'\right)^2 \tag{1.72}$$

Lembrando que z', é constante, fazemos outra translação ao longo do eixo y,

$$y' \mapsto y - \beta z' \tag{1.73}$$

e finalmente nossa equação para a cônica, projetada no plano xy e centrada no ponto $(x, y) = (0, 0)$, é:

$$\frac{\alpha^2 \gamma^2}{\alpha^2 - \beta^2} = \alpha^2 x^2 + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{1 + \beta^2} y^2 \tag{1.74}$$

Notemos que essa função 1.74 deve definir famílias de curvas que diferem, basicamente, pelos sinais dos termos. Nesse sentido, a magnitude mais relevante é o sinal de $\alpha^2 - \beta^2$. Distinguimos assim:

$$\begin{array}{rcl} \alpha^2 - \beta^2 & > & 0 \\ \alpha^2 - \beta^2 & < & 0 \\ \alpha^2 - \beta^2 & = & 0 \end{array} \tag{1.75}$$

No primeiro caso, podemos reescrever 1.74 como:

$$a^2 = \alpha^2 x^2 + b^2 y^2 \tag{1.76}$$

que é a equação de uma elipse. No segundo caso,

$$a^2 = b^2 y^2 - \alpha^2 x^2 \tag{1.77}$$

que é a equação de uma elipse.
O terceiro caso requere atenção. Em várias instâncias o termo $\alpha^2 - \beta^2$ aparece em denominadores, e não poderia portanto ser zero. Devemos tomar a equação original 1.62 (justamente, nas passagens consecutivas, se fez divisão por $\alpha^2 - \beta^2$, que seria inaplicável neste caso): ela se reduz a:

$$\gamma^2 = \alpha^2 x^2 - 2\beta\gamma y \tag{1.78}$$

e portanto corresponderá a uma parábola dada por

$$y = \frac{\alpha^2}{2\beta\gamma} x^2 - \frac{\gamma}{2\beta} \tag{1.79}$$

Vamos agora manipular a equação da trajetória 1.51. Por simplicidade, escolhemos $\theta_0 = 0$. Multiplicamos por r e consideramos que, nas coordenadas polares, $rcos\theta = x$. Obtemos então a forma de 1.51 em coordenadas cartesianas:

$$1 = Ax - \frac{mK}{L^2}\sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.80}$$

Assim,

$$1 = \left(\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 - A^2\right) x^2 + 2Ax + \left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 y^2 \tag{1.81}$$

Notemos que essa expressão pode ser reescrita na forma

$$1 = -\frac{2mE}{L^2} x^2 + 2Ax + \left(\frac{mK}{L}\right)^2 y^2 \tag{1.82}$$

Pontos de análise:

1. Desenvolva 1.82, elimine o termo linear em x absorvendo-o em um binômio quadrado perfeito; chegue a uma equação final. Atenção ao sinal da energia total E, fato crucial.

2. Mostre a analogia entre a expressão resultante e a equação das cônicas, 1.74

A reta como trajetória possível:
Há ainda o caso da trajetória retiínea que não consideramos. Poderíamos tentar desenhar uma trajetória retilínea a partir de uma elipse progressivamente achatada em um dos lados ató limite em que se reduza a um segmento de reta. Sendo a equação da elipse dada de modo geral por

$$1 = a^2 x^2 + b^2 y^2, \tag{1.83}$$

poderíamos achatar a elipse, por exemplo, ao longo da coordenada y, levando b ao infinito e reduzindo a a zero:

$$\lim_{\substack{a \to 0, \\ b \to \infty}} \left\{1 = a^2 x^2 + b^2 y^2\right\} \Rightarrow \{x \in \mathcal{R}, y = 0\}, \tag{1.84}$$

Para se conseguir essa possibilidade, deveríamos fazer $L \to 0$ em 1.82. De fato, isso faz com que o termo que multiplica y^2 tenda ao infinito, como desejado.

Atividade:
Verificar quais as condições requeridas de L e E para que o termo em x^2 se anule.
Nota: isso deverá ser feito, obviamente, na equação 1.82 *após* a montagem do binômio quadrado perfeito (no *Ponto de análise* 1).
Outra possibilidade mais simples e coerente é a de se tomar a equação 1.14, tomando $L = 0$:

$$r^2\dot{\theta} = 0 \ \mapsto \ \dot{\theta} = 0 \ \mapsto \theta = const., \tag{1.85}$$

que descreve uma trajetória que se desenvolve ao longo da linha radial $r \in \mathcal{R}$, à raão temporal dada por 1.22, com $L = 0$:

$$\dot{r(t)} = \sqrt{\frac{2V(r)}{m}}, \tag{1.86}$$

que dá a reta $r(t) = \sqrt{\frac{2V(r)}{m}}t + r_0$.
Em suma, a trajetória retilínea é uma solução *de momento angular zero.*

1.1.1 O problema de Rutherford

Um caso interessante é o da trajetória de uma partícula que sofre a ação de uma força central *repulsiva*, e em particular *inversamente proporcional* ao quadrado da distância. Tal é justamente a situação de uma partícula alfa, de carga positiva, que se dirige a um núcleo atômico pesado. Esse é o problema clássico estudado teorica e experimentalmente por Ernest Rutherford.
Consideremos, por simplicidade, que $\theta_0 = 0$. Nesse problema, a constante K em 1.46 é positiva. Isso impõe restrições aos valores de θ, já que o segundo membro de 1.51 não pode ser negativo, pois $r(\theta)$ é *necessariamente positivo.* Assim os valores extremos de θ satisfazem a igualdade

$$0 = A\cos\theta - \frac{mK}{L^2}, \tag{1.87}$$

cuja solução nos dá

$$\theta = \pm arcos\left(\frac{mK}{AL^2}\right), \tag{1.88}$$

onde A é dado por 1.57. Nos extremos de θ em que 1.88 se verifica, temos obviamente $1/r \mapsto 0$ o que significa que $r \mapsto \infty$. Consequentemente, temos uma órbita *aberta*, entre os dois limites

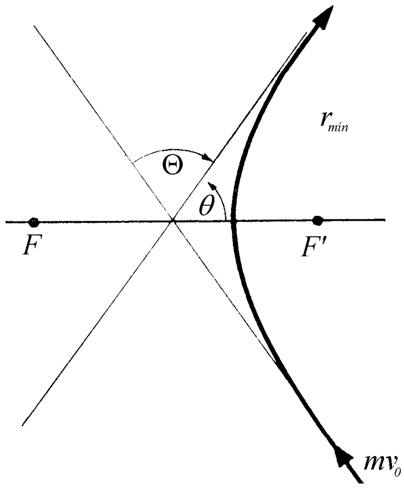
$$\begin{aligned} r \mapsto \infty, \quad \theta = -arcos\left(\frac{mK}{AL^2}\right) \\ r \mapsto \infty, \quad \theta = +arcos\left(\frac{mK}{AL^2}\right), \end{aligned} \tag{1.89}$$

formando uma abertura angular $\Delta\theta$ dada por

$$\Delta\theta = 2arcos\left(\frac{mK}{AL^2}\right), \tag{1.90}$$

Esse resultado pode ser escrito de outra forma. Calculando-se a tangente de $\Delta\theta/2$ e empregando-se 1.57, encontramos:

$$tg\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{2E}{m}}\frac{L}{K}. \tag{1.91}$$



Observando-se 1.91, constatamos que a energia é *necessariamente não negativa.* Órbitas de energia positiva correspondem a hipérboles. Para $E =$, temos $\Delta\theta = 0$, implicando muma trajetória retiliínea.
Segundo 1.51, podemos determinar a distância mínima da órbita com respeito ao centro de coordenadas. Isso corresponde a

$$0 = \frac{d}{d\theta} r(\theta) = -\frac{Asen\theta}{\left(Acos\theta - \frac{mK}{L^2}\right)^2} \Leftrightarrow \theta = 0. \tag{1.92}$$

Esse mínimo corresponde à distância máxima de aproximação dada por

$$r_{min} = \frac{1}{A - \dfrac{mK}{L^2}}. \tag{1.93}$$

Atividade:

- A partir de 1.93 e de 1.57, mostre que

$$r_{min} = \frac{K}{2E}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}}\right] \tag{1.94}$$

- Notemos que o ângulo θ é medido em nosso sistema de coordenadas. Usualmente considera-se o ângulo Θ, como mostrado na figura 1.1.1. Prove que, em função dele, reescrevemos 1.91 na forma:

$$cotg\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{2E}{m}}\frac{L}{K}. \tag{1.95}$$

2 O problema de muitos corpos interagentes

2.1 O problema de dois corpos

Consideremos duas partículas 1 e 2 de massas e coordenadas respectivamente m_1, m_2 e $\vec{r}_1, \vec{r}_2$, que interagem por uma força de interação mútua. Em outras palavras, a partícula 1 sofre a ação de uma força produzida pela partícula 2, dada por:

$$\vec{F}_{21} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1, \tag{2.1}$$

e ao mesmo tempo, a partícula 2 sofre a ação de uma força produzida pela partícula 1, dada por:

$$\vec{F}_{12} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2, \tag{2.2}$$

sendo que, pela terceira lei de Newton, temos obrigatoriamente

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{2.3}$$

Somando-se 2.1 a 2.2, e considerando-se 2.3, verificamos que

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0, \tag{2.4}$$

o que significa que

$$\frac{d}{dt}\left(m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2\right) = 0. \tag{2.5}$$

Dessa última relação podemos assim verificar que o vetor

$$\vec{P} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 \tag{2.6}$$

é constante. Ele tem unidades de momento, e corresponde a uma velocidade

$$\vec{V} = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} \tag{2.7}$$

e essa velocidade corresponde à variação temporal do vetor posição

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{2.8}$$

que, em consequência de 2.4, satisfaz

$$\ddot{\vec{R}} = 0 \tag{2.9}$$

Verificaremos ser interessante efetuar uma mudança de variáveis como segue abaixo:

$$\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\} \mapsto \left\{\vec{r}, \vec{R}\right\} \tag{2.10}$$

onde as novas coordenadas vetoriais satisfazem a:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

e além do mais, elas são bastante convenientes dado o fato de que se baseiam no vetor $\vec{r}$, que marca a posição relativa das partículas,

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \tag{2.12}$$

Multipliquemos agora a primeira equação de 2.11 por m_1 e tomemos sua segunda derivada em relação ao tempo. Obteremos:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = m_1\ddot{\vec{R}} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r}}. \tag{2.13}$$

Substituindo-se 2.9 e definindo-se a chamada *massa reduzida* μ, dada por

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \tag{2.14}$$

e o vetor $\vec{R}$ dá a coordenada do *centro de massa* do sistema formado pelas duas partículas. De 2.14 obtemos, após manipulação:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \mu\ddot{\vec{r}}. \tag{2.15}$$

Podemos aplicar raciocínio similar para a segunda equação de 2.11, para obter

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\mu\ddot{\vec{r}}. \tag{2.16}$$

Atividade:

- Prove 2.15 e 2.16.

2.2 Presença de forças externas

Podemos considerar o caso em que há ainda outras forças externas agindo sobre as partículas 1 e 2, que designaremos respectivamente por $\vec{F}_1^e$ e $\vec{F}_2^e$. Nesse caso, 2.1 e 2.2 se tornam:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{21} + \vec{F}_1^e &= m_1\ddot{\vec{r}}_1, \\ \vec{F}_{12} + \vec{F}_2^e &= m_2\ddot{\vec{r}}_2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Nesta situação, apesar de 2.3 ser válida, 2.4 não se aplica. A soma de 2.1 e 2.2 dá:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_1^e +, \vec{F}_2^e \tag{2.18}$$

Consequentemente, o vetor $\vec{R}$ já definido em 2.8 não satisfaz mais 2.9, e agora obedece a:

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_2^e, \tag{2.19}$$

onde definimos a *massa total* $M = m_1 + m_2$
Suponhamos que as forças externas $\vec{F}_{1,2}^e$ atuam sobre o sistema de partículas causando-lhes uma aceleração comum $\vec{a}$. Este caso corresponde a

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1^e}{m_1} = \frac{\vec{F}_2^e}{m_2}, \tag{2.20}$$

em razão do que 2.15 e 2.16 levam a:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}_1}{\mu} = -\frac{\vec{F}_2}{\mu}. \tag{2.21}$$

Verifica-se, portanto, que 2.19 e 2.21 são *as equações do movimento do sistema de duas partículas.*

O sistema de equações 2.11 revela que as coordenadas $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ se compõesm de duas partes: um termo comum $\vec{R}$ que define um ponto de referência relativo, e as contribuições restantes que envolvem o vetor $\vec{r}$, nos segundos membros das equações desse sistema. O ponto definido pelo vetor $\vec{R}$ define o chamado *centro de massa do sistema.*
Atividade:

- Escreva a energia cinética do sistema $K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$ em função da velocidade do centro de massa, definida em 2.7, e da *velocidade relativa* $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$. Prove que
$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mu v^2. \tag{2.22}$$

- Verifique que $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, provando assim que $\vec{v}$ é a *velocidade relativa entre as partículas.*

- Prove que o momento angular total $\vec{L} = m_1(\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) + m_2(\vec{r}_2 \times \vec{v}_2)$ pode ser escrito como:
$$\vec{L} = M(\vec{R} \times \vec{V}) + \mu(\vec{r} \times \vec{v}), \tag{2.23}$$
atestando assim que o momento angular total é a soma do momento angular do sistema em relação ao centro de massa, $M(\vec{R} \times \vec{V})$ com o momento angular relativo $\mu(\vec{r} \times \vec{v})$.

2.3 O problema de 'N' corpos

A extensão do caso ao caso geral de N corpos é imediata, mas consideraremos da seguinte maneira: definimos o vetor posição das $i = 1, ...N$ partículas pelo conjunto de vetores $\vec{r}_i$, e então definiremos um novo sistema de coordenadas $\vec{r}_i\,'$ por:
$$\vec{r}_i\,' = \vec{r}_i - \vec{R}. \tag{2.24}$$
A partir dessa definição, verificamos que
$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\,' = \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i - \vec{R}). \tag{2.25}$$
Podemos então definir $\vec{R}$ por
$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}, \tag{2.26}$$
o que automaticamente anula o segundo membro de 2.25, isto é, temos
$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\,' = 0. \tag{2.27}$$
Obviamente que 2.27 implica que o momento total relativo do sistema de partículas se anula,
$$\vec{p}\,' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i\,' = 0. \tag{2.28}$$

onde $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i\ '$.
Note-se que o momento total $\vec{P}$ satisfaz:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_i\ ' + \vec{V}) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}, \tag{2.29}$$

onde se empregou 2.28.
Atividade:

- Verificar que a energia cinética total do sistema, $K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$ pode ser escrita por:

$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2. \tag{2.30}$$

3 A gravitação newtoniana: aspectos matemáticos e princípios da teoria do potencial

Seguindo a expressão newtoniana para a força da gravidade, apresentada na equação 1.46, fazemos, naturalmente, a extensão para a força gerada por um conjunto de massas m_i $(i = 1, ...N)$ com respectivos vetores posição $\vec{r}_i$, que atua sobre uma massa de prova m, localizada na origem:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \frac{G m m_i}{r_i^2} \hat{r} V_i, \tag{3.1}$$

onde V_i é o volume de cada massa m_i; e para o caso de uma distribuição contínua de matéria, com densidade ρ definida ponto a ponto, temos:

$$\vec{F} = \int \frac{G m \rho(\vec{r})}{r_i^2} \hat{r} d^3\vec{r}, \tag{3.2}$$

Obviamente que, se m não se localiza na origem e tem um vetor posição $\vec{r}$, devemos reescrever 3.1, e em especial 3.2, da seguinte forma:

$$\vec{F} = \int \frac{G m \rho(\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} (\vec{r}' - \vec{r}) d^3\vec{r}', \tag{3.3}$$

Definimos assim a aceleração da gravidade a_g da massa m considerando-se a II lei do movimento de Newton, portanto igualando-se 3.3 a $m a_g$:

$$\vec{a}_g = \int \frac{G \rho(\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} (\vec{r}' - \vec{r}) d^3\vec{r}', \tag{3.4}$$

Define-se também o *campo de gravidade*, ou *campo gravitacional* $\vec{g}$, exatamente por 3.4, isto é,

$$\vec{g} \equiv \vec{a}_g \tag{3.5}$$

Note-se que $\vec{g}$ *independe* da massa m que experimenta o campo gravitacional $\vec{G}$, e que, segundo 3.4, $\vec{g}$ é uma função das coordenadas do vetor posição $\vec{r}$.

Se por um lado a *energia gravitacional* é determinada em função de uma integral de linha da força gravitacional, definimos também o chamado *potencial gravitacional* V como sendo a integral de linha do campo gravitacional:

$$V(\vec{r}) = -\int \vec{g} \cdot d\vec{r}. \tag{3.6}$$

Sendo assim, explicitamente,

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{Gm_i}{r_i} \tag{3.7}$$

para o caso de um conjunto de massas m_i geradoras do campo; e

$$V(\vec{r}) = \int \frac{G\rho(\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d^3\vec{r}', \tag{3.8}$$

quando a fonte geradora do campo é uma distribuição de densidade de massa. Visto que a força gravitacional é uma força conservativa, ela pode ser escrita como o gradiente de uma função escalar, que em particular, é o próprio potencial gravitacional $V(\vec{r})$:

$$\vec{F} = -\nabla V(\vec{r}) \tag{3.9}$$

Por outro lado, estabelecemos a relação entre o campo gravitacional $\vec{g}$ e o potencial gravitacional $V(\vec{r})$ por:

$$\vec{g} = \nabla V(\vec{r}), \tag{3.10}$$

de modo que a relação inversa é

$$V(\vec{r}) = \int \vec{g} \cdot d\vec{r} \tag{3.11}$$

Atividade:

- Discutir como podemos obter o campo gravitacional gerado por uma esfera de massa M cuja densidade de matéria $\rho(\vec{r})$ seja constante.

3.1 Equações básicas para o campo de gravidade

Uma vez que $\vec{g}$ é o gradiente de uma função (segundo 3.10), segue que seu rotacional é idêntico a zero, dado que o rotacional de um gradiente é zero:

$$\nabla \times \vec{g} \equiv 0. \tag{3.12}$$

Atividade:

- Prove que o rotacional de um gradiente é sempre zero, ou seja, que

  $$\nabla \times (\nabla \phi(\vec{r}))$$

  para qualquer função $\phi(\vec{r})$ da variável $\vec{r}$.

Explicitamente, 3.12 significa:

$$\frac{\partial g_2}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial g_3}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial x} = 0. \tag{3.13}$$

Entretanto, essas relações não são suficientes para determinar $\vec{g}$ univocamente. Isso poderá ser feito com o conhecimento da distribuição de matéria, causa primeira do efeito da gravidade.
Consideremos um volume V do espaço, dentro do qual haja uma partícula de massa m. Por simplicidade, escolheremos um sistema de coordenadas cujo centro está em m. Podemos determinar o campo gravitacional $\vec{g}$ gerado por essa massa num ponto específico da superfície fechada Σ que envolve o volume V. Para isso, apelamos a 3.5 e 3.4, e consideramos $\vec{r'} = 0$.

$$\vec{g} = -\frac{Gm}{r^2}\hat{r} \tag{3.14}$$

Agora, faremos uma integral de superfície do vetor $\vec{g}$ ao longo de toda a a superfície Σ:

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{S} = -Gm \int \frac{1}{r^2}\hat{r} \cdot d\vec{S} \tag{3.15}$$

O produto escalar $\hat{r} \cdot d\vec{S}$ significa a projeção do vetor infinitesimal $d\vec{S}$ ao longo da direção de $\hat{r}$, ou seja, significa *a projeção elemento de superfície $d\vec{S}$ no plano perpendicular a $\hat{r}$*. Em outras palavras, $\hat{r} \cdot d\vec{S} = r^2 d\Omega$, onde $d\Omega$ é o ângulo sólido centrado em $\vec{r} = 0$ que corresponde a $d\vec{S}$. Assim, 3.15 se torna:

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{S} = -Gm \int \Omega = -Gm4\pi. \tag{3.16}$$

Podemos considerar também que a fonte geradora de gravidade é uma distribuição de massa com densidade $\rho(\vec{r})$, ao invés de simplesmente a massa m. Nesse caso, reescrevemos 3.14 como

$$\vec{g} = -\int \frac{G\rho(\vec{r})}{r^2}\hat{r}dV \tag{3.17}$$

e assim 3.15 se converte em:

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{S} = -\int \int G\rho(\vec{r})dV \frac{1}{r^2}\hat{r} \cdot d\vec{S} \tag{3.18}$$

e em vista de 3.16, isso se reduz a

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{S} = -\int 4\pi G\rho(\vec{r})dV \tag{3.19}$$

Por outro lado, sabemos do teorema de Gauss que uma integral de superfície de um campo vetorial ao longo de uma superfície fechada é idêntica à integral de volume do divergente desse campo, ou seja:

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{S} \equiv \int \nabla \cdot \vec{g} \;\; dV. \tag{3.20}$$

Em vista disso, podemos reescrever 3.19 na forma

$$\int \nabla \cdot \vec{g} \;\; dV + \int 4\pi G\rho(\vec{r})dV = 0 \tag{3.21}$$

Em outras palavras,
$$\int \{\nabla \cdot \vec{g} + 4\pi G\rho(\vec{r})\}\, dV = 0 \tag{3.22}$$
Uma vez que esse resultado independe de qual volume escolhemos para a integração, segue que
$$\nabla \cdot \vec{g} + 4\pi G\rho(\vec{r}) \equiv 0, \tag{3.23}$$
isto é,
$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho. \tag{3.24}$$
Lembremos que, em coordenadas cartesianas, 3.24 é escrita na forma
$$\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} = -4\pi G\rho(x, y, z) \tag{3.25}$$
Atividade:

- Escreva 3.24 em coordenadas esféricas.

Finalmente, apelando a 3.10, escrevemos 3.24 na forma
$$\nabla^2 V = -4\pi G\rho. \tag{3.26}$$
que é a chamada *equação de Poisson*. Para o caso especial em que $\rho(\vec{r}) = 0$, temos
$$\nabla^2 V = 0. \tag{3.27}$$
que é a *equação de Laplace*.

4 Relatividade do sistema de coordenadas

A escolha do sistema de referência de medidas impacto profundo nos parâmetros característicos $(\vec{r}, \vec{v} = \dot{\vec{r}})$ da dinâmica de um corpo em movimento. O retrato mais simples desse efeito é o conhecido *pêndulo de Foucault*, cujo movimento é sensivelmente alterado como consequência do fato de que o planeta Terra, como um todo, gira com uma velocidade angular ω_T, em face do que todo ponto fixo em sua superfície é um referencial acelerado, com uma aceleração a_T igual à aceleração centrípeta $a_c = \omega_T R_T^2$, sendo R_T o raio da Terra. A fenomenologia dese efeito será discutida ainda nesta seção.
Consideremos então o problema da mudança de sistema de referência sob um ponto de vista fundamental. Sejam S e S' dois referenciais, e seja P um ponto no espaço que assinale a posição de um corpo de massa m. Sejam assim $\vec{r} = (x, y, z)$ e $\vec{r}\,' = (x', y', z')$ as coordenadas desse ponto tomadas, respectivamente, nos referenciais S e S'. Se $\vec{R}$ é o vetor posição que marca a origem O' do sistema S' em relação a S (e portanto R é um vetor que liga as respectivas origens O e O' dos dois sistemas de coordenadas), então escrevemos:
$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R}, \tag{4.1}$$
de sorte que a velocidade $\vec{v}' = \dot{\vec{r}}\,'$ de P medida em S' se relaciona à sua velocidade $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ medida em S por:
$$\vec{v}\,' = \vec{v} + \dot{\vec{R}}, \tag{4.2}$$

e igualmente teremos uma diferença nas acelerações medidas $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ e $\vec{a}\,' = \dot{\vec{v}}\,'$, dada por:

$$\vec{a}\,' = \vec{a} + \ddot{\vec{R}}. \tag{4.3}$$

Devido a essa diferença, conforme o referencial escolhido se extrairá conclusões diferentes a respeito do estado inercial do corpo, já que as forças $\vec{F} = m\vec{a}$ e $\vec{F}\,' = m\vec{a}\,'$ diferirão por um termo $m\ddot{\vec{R}}$. Sendo assim, se S for um referencial inercial – e portanto não acelerado –, as medidas tomadas em S' implicam na inferência de que o corpo em P experimenta uma força irreal $m\ddot{\vec{R}}$, que por isso é denominada *força fictícia*.

4.1 Sistemas de cordenadas rotativo

Consideremos que o sistema S é um referencial inercial, isto é, não é acelerado, e que o sistema S' esteja em rotação em torno de seu eixo z' com uma velocidade angular ω. Consideremos ainda que as origens dos sistemas de coordenadas coincidem, isto é, que $\vec{R} = 0$, e que $z' \equiv z$. Nessa situação, um dado vetor $\vec{r} \equiv \vec{r}\,'$ será escrito, em coordenadas cartesianas:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \vec{r} & = & x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}; \qquad (a) \\ & & \\ & = & x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'; \qquad (b) \end{array} \right. \tag{4.4}$$

Ponhamo-nos no sistama S. Nesse referencial, veremos S' em rotação juntamente com os seus correspondentes versores unitários $\hat{x}\,'$, $\hat{y}\,'$ e $\hat{z}\,'$. Então, podemos empregar 4.4(b) para determinar a *velocidade* do ponto P:

$$\vec{v} = \dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}' + x'\dot{\hat{x}}' + y'\dot{\hat{y}}' + z'\dot{\hat{z}}'. \tag{4.5}$$

onde explicitamos as derivadas temporais de cada um dos seis vetores unitários, $\dot{\hat{x}}, \dot{\hat{y}}, ...\dot{\hat{z}}'$, apenas quando não nulas.

A expressão 4.5 é de certo modo ambígua: ela pode nos fornecer a velocidade do ponto P *tanto em relação a* S' quanto *em relação a* S: para determinar a velocidade medida em S', que chamaremos de $\vec{v}\,'$, basta considerar que todos os versores $\hat{x}\,'$, $\hat{y}\,'$ e $\hat{z}\,'$ estão estáticos (pois de fato eles estão imóveis em S', por definição), e isso significa fazer

$$\dot{\hat{x}}\,' = \dot{\hat{y}}\,' = \dot{\hat{z}}\,' \equiv 0, \tag{4.6}$$

o que nos leva a:

$$\vec{v}\,' = \dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}', \tag{4.7}$$

Por outro lado, 4.5 nos dá a *velocidade em* S se consideramos que os três versores de S' estão girando, justamente com a velocidade angular ω: nesse caso, substituímos 4.6 pelas equações correspondentes que traduzam o giro desses versores. Para determinar as derivadas temporais dos versores unitários $\hat{x}$ e $\hat{y}$ em S, seguimos raciocínio análogo ao que nos levou a escrever a derivada temporal do vetor unitário $\hat{r}$ em 1.5. Chegaremos à conclusão de que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{\hat{x}}' & = \omega\hat{y}' \\ & \\ \dot{\hat{y}}' & = -\omega\hat{x}', \\ & \\ \dot{\hat{z}}' & \equiv 0 \end{array} \right. \tag{4.8}$$

Podemos portanto substituir esse resultado em 4.5, para obter:

$$\vec{v} = \dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}' + \omega\left(-y'\hat{x}\,' + x'\hat{y}\,'\right). \tag{4.9}$$

Entretanto, os três primeiros termos do segundo membro de 4.9 são justamente $\vec{v}\,'$ (conforme verificamos de 4.7), então

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \omega\left(-y'\hat{x}\,' + x'\hat{y}\,'\right). \tag{4.10}$$

Notemos agora a identidade vetorial

$$-y'\hat{x}\,' + x'\hat{y}\,' \equiv \hat{z}\,' \times \left(x'\hat{x}\,' + y'\hat{y}\,'\right). \tag{4.11}$$

Em face dessa identidade, definimos um vetor $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$, de onde segue que

$$\omega\left(x'\hat{y}' - y'\hat{x}'\right) \equiv \vec{\omega} \times \vec{r}' \equiv \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{4.12}$$

onde se ressaltou a igualdade entre $\vec{r}$ e $\vec{r}'$. Substituindo esse resultado em 4.10, encontramos finalmente a expresssão para $\vec{v}\,'$:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{4.13}$$

A expressão 4.13 traduz a seguinte correspondência: a derivada temporal $(d\vec{u}/dt)$ de um vetor $\vec{u}$ no referencial S é ligada ao valor da derivada temporal $(d\vec{u}/dt)'$ de $\vec{u}$ no referencial S' por:

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right) = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)' + \vec{\omega}\times\right]\vec{u}. \tag{4.14}$$

O próximo passo é o cálculo da aceleração relativa, que é feito considerando-se que $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$. Poderíamos inicialmente fazer

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\right), \tag{4.15}$$

e assim obter

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}\,' + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right). \tag{4.16}$$

Entretanto, há uma questão sutil por trás disso que nos deixa num impasse que impede o prosseguimento: *não poderemos* identificar o termo

$$\frac{d\vec{v}\,'}{dt} \tag{4.17}$$

com a aceleração $\vec{a}\,'$ medida em S'. De fato, a expressão 4.15 foi calculada no referencial S, e assim 4.17 é *a derivada temporal medida em S de uma velocidade $\vec{v}\,'$ que foi medida em S'*. É portanto, um termo misto, híbrido, diferente de $\vec{a}\,'$. A expressão autêntica para $\vec{a}\,'$ deve ser obtida considerando uma derivada temporal de $\vec{v}\,'$ calculada em S', não em S.
A solução desse problema é obtida apelando-se a 4.14, considerando agora $\vec{u}$ como sendo a velocidade $\vec{v}$. Nesse caso, temos, sucessivamente:

$$\vec{a} = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)' + \vec{\omega}\times\right]\vec{v} = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)' + \vec{\omega}\times\right]\left[\left(\frac{d}{dt}\right)' + \vec{\omega}\times\right]\vec{r}. \tag{4.18}$$

Desenvolvendo-se 4.18, encontramos:

$$\vec{a} = \underbrace{\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)'}_{1^o} + \underbrace{\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)' \times \vec{r}}_{2^o} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)'}_{3^o} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\,. \tag{4.19}$$

No lado esquerdo dessa expressão, temos $\vec{a}$, a *aceleração medida em S*. No segundo membro, o primeiro termo é a autêntica *aceleração medida em S'*, isto é, $\vec{a}\,'$. O segundo termo contém a derivada temporal do vetor ω em S', que é idêntica à sua derivada temporal em S: de fato, segundo 4.14,

$$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right) = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)' + \vec{\omega}\times\right]\vec{\omega} \equiv \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)', \tag{4.20}$$

pois evidentemente $\vec{\omega} \times \vec{\omega} \equiv 0$. O terceiro termo de 4.16 contém $(d\vec{r}/dt)'$, que é nada mais nada menos que $\vec{v}\,'$. Em face dessas considerações, reescrevemos 4.16 na forma final:

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\,. \tag{4.21}$$

4.1.1 Correspondência de forças

Em posse da expressão da aceleração 4.18, poderemos determinar a diferença das forças medidas em ambos os referenciais. A força em S será dada por $\vec{F} = m\vec{a}$, e portanto,

$$\vec{F} = m\vec{a}\,' + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\,. \tag{4.22}$$

e, consequentemente,

$$m\vec{a}\,' = \underbrace{\vec{F}}_{1^o} \; \underbrace{-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}}_{2^o} \; \underbrace{-2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,'}_{3^o} \; \underbrace{-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{4^o}. \tag{4.23}$$

será a força medida segundo S'.

Analisemos os termos do segundo membro de 4.23. O primeiro termo é obviamente a força real $\vec{F}$, medida no sistema de referência inercial S. O segundo termo está ligado à variação temporal da velocidade angular, $\dot{\vec{\omega}}$, e é designado por **força de Euler**. O terceiro termo, designado por **força de Coriolis**, está ligado ao fato de que o ponto P está em movimento (isto é, com uma velocidade $\vec{v}\,'$ não nula) em relação ao referencial S'. Esse termo leva o nome do engenheiro Gustave-Gaspard Coriolis, que em 1835 publicou um trabalho em que define matematicamente a força que levou seu nome[1], no contexto das engrenagens de uma máquina industrial. Por fim, o quarto termo corresponde a uma **força centrífuga**.

Façamos uma consideração com respeito ao quarto termo. Se $\vec{r}$ forma um ângulo ϕ com o vetor velocidade angular $\vec{\omega}$, e se designamos por ρ a distância do ponto P ao eixo z, segue que

$$m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\omega^2 r sen\phi\hat{\rho} = m\omega^2\vec{\rho}, \tag{4.24}$$

onde $\vec{\rho}$ é o vetor, em coordenadas polares, contido no plano xy, que assinala a posição do ponto P.

[1] *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*, J. De l'Ecole Royale Polytechnique **15** (1835)p. 144–154

4.1.2 O pêndulo de Foucault

O pêndulo de Foucault é um dispositivo concebido inicialmente em 1851 por Léon Foucault para demonstrar de uma maneira prática, simples e direta, e sem o apelo a nenhum recurso astronômico, o fato já estabelecido à época, de que a Terra tem um movimento de rotação em torno de seu próprio eixo.
No caso do pêndulo de Foucault, temos três forças atuando: a força de tensão do cabo de suspensão $\vec{T}$, a força da gravidade $m\vec{g}$, e a corça centrífuga $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$. Desse modo, $\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$. Consideramos também que $\dot{\vec{\omega}} = 0$, já que a velocidade angular da Terra é constante. Considerando isso, a equação 4.23 se torna:

$$m\vec{a}\,' = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,'. \tag{4.25}$$

Uma vez que o termo centrífugo é constante, normalmente definimos uma *aceleração da gravidade efetiva*, dada por:

$$\vec{g}_e = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\,, \tag{4.26}$$

de modo que o problema se reduz a resolver a equação:

$$m\vec{a}\,' = \vec{T} + m\vec{g}_e - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,'. \tag{4.27}$$

Está evidente, por essa expressão, que se não fosse o termo de Coriolis $-2m\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$ a equação acima corresponderia ao caso de um pêndulo simples usual. Na prática, essa força de Coriolis é da ordem de 0,1% do valor da aceleração da gravidade.
Explicitamente, escrevemos 4.27 como:

$$m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)' = \vec{T} + m\vec{g}_e - 2m\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)'. \tag{4.28}$$

A inferência prática revela que o pêndulo de Foucault realiza um movimento de precessão com uma velocidade angular constante Ω. Esse movimento consiste na rotação do plano de oscilação do pêndulo, em torno da direção vertical (a linha vertical que passa pelo ponto fixo de suspensão do pêndulo).
Então, introduziremos *um terceiro sistema de coordenadas* $S''(x'', y'', z'')$. Se por um lado S e S' tinham seus eixos z e z' paralelos ao eixo de rotação da Terra – e portanto eram paralelos à velocidade angular da Terra $\vec{\omega}$ –, agora escolheremos z'' *perpendicular à superfície da Terra, no local onde o pêndulo oscila.* Em outras palavras, z'' é a direção vertical do lugar.
De modo similar ao que fizemos em 4.14, estabeleceremos a relação direta entre as derivadas temporais nos referenciais $S''(x'', y'', z'')$ e $S'(x', y', z')$. Mas se por um lado em 4.14 usamos a velocidade angular $\vec{\omega}$ que correspondia à rotação de S' em relação a S, agora usaremos uma nova velocidade angular $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}''$, que representa a rotação de S'' em relação a S':

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)' = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)'' + \Omega\hat{z}''\times\right]\vec{r} \tag{4.29}$$

($\hat{z}''$ é o versor na direção z'''). A partir disso, obtemos a segunda derivada temporal:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)' &= \left[\left(\frac{d}{dt}\right)'' + \Omega\hat{z}''\times\right]^2 \vec{r} \\ &= \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)'' + \Omega^2\hat{z}''\times(\hat{z}''\times\vec{r}) + 2\Omega\hat{z}''\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)''\end{aligned} \tag{4.30}$$

Igualamos agora a força associada a essa aceleração à força expressa em 4.28 para obter:

$$\vec{T}+m\vec{g}_e-2m\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)' = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)'' + \Omega^2\hat{z}''\times(\hat{z}''\times\vec{r}) + 2\Omega\hat{z}''\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)'' \tag{4.31}$$

Essa é uma equação aparentemente complicada, mas sua complicação reside apenas na quantidade de termos; ela na verdade não é de difícil tratamento. Em face de nossa passagem para o novo sistema de coordenadas S'', devemos reduzir 4.31 a um conjunto de termos que se refira unicamente a esse referencial. Devemos portanto empregar 4.29 para eliminar a derivada $(d\vec{r}/dt)'$ presente no membro esquerdo. E em acréscimo, faremos uma reorganização dos termos para reduzir 4.29 a:

$$\begin{aligned}& m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)'' = \vec{T}+m\vec{g}_e \\ & -2m\vec{\omega}\times\left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)'' + \Omega\hat{z}''\times\vec{r}\right] - m\Omega^2\hat{z}''\times(\hat{z}''\times\vec{r}) - 2m\Omega\hat{z}''\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)''\end{aligned} \tag{4.32}$$

Rearranjando os termos,

$$\begin{aligned}& m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)'' = \vec{T}+m\vec{g}_e \\ & -2m\left(\vec{\omega}+\hat{z}''\Omega\right)\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)'' - 2m\Omega\vec{\omega}\times[\hat{z}''\times\vec{r}] - m\Omega^2\hat{z}''\times(\hat{z}''\times\vec{r})\end{aligned} \tag{4.33}$$

Agora convertemos os produtos vetoriais duplos usando a fórmula

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right), \tag{4.34}$$

para obter:

$$\begin{aligned} m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)'' = \; & \vec{T}+m\vec{g}_e \\ & -2m\left(\vec{\omega}+\Omega\hat{z}''\right)\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)'' \\ & -m\left[2\Omega(\vec{\omega}\cdot\vec{r}) + \Omega^2(\hat{z}\cdot\vec{r})\right]\hat{z}'' \\ & +m\left[2\Omega(\vec{\omega}\cdot\hat{z}) + \Omega^2\right]\vec{r}\end{aligned} \tag{4.35}$$

Notemos nessa última expressão o seguinte: tanto a tensão no fio de suspensão do pêndulo $\vec{T}$ quanto a força da gravidade $m\vec{g}_e$ (ambos na 1^a linha de 4.35)

estão contidos no plano de oscilação do pêndulo. O mesmo se dá com o quarto e o quinto termos (na 3^a e 4^a linhas) pois ambos estão na vertical do lugar (na verdade, $\vec{r}$ e z'' estão paralelos). Apenas o termo na 2^a linha que contém a velocidade $(d\vec{r}/dt)''$ aponta numa direção variável, que não está necessariamente contida nesse plano. Esse termo modifica a cada instante a orientação do plano de oscilação do pêndulo, fazendo-o girar. Mas temos a liberdade de escolher nosso sistema S'' contendo a cada instante o plano de oscilasção do pêndulo, e isso conseguimos simplesmente impondo que esse termo se anule. Assim, fazemos com que, no lado direito de 4.35, só haja termos paralelos ao plano de oscilação. Em outras palavras, estamos escolhendo um sistema de coordenadas S'' em relação ao qual o plano de oscilação do pêndulo está parado.
No regime de pequenas amplitudes de oscilação, podemos considerar que a velocidade $(d\vec{r}/dt)''$ está praticamente na horizontal. Então, se $(d\vec{r}/dt)''$ está na horizontal, deverá estar no plano $x''y''$, e portanto será perpendicular a $\hat{z}''$. Assim, a única maneira de termos o anulamento desse termo será se $(\vec{\omega} + \hat{z}\Omega)$ também estiver no plano $x''y''$. Em outras palavras, $(\vec{\omega} + \hat{z}\Omega)$ deverá ser perpendicular a z'', ou seja,

$$0 \equiv (\vec{\omega} + \Omega\hat{z}'') \cdot \hat{z}'' = \vec{\omega} \cdot \hat{z}'' + \Omega \tag{4.36}$$

Isso significa que

$$\Omega = -\omega cos\theta \tag{4.37}$$

onde θ é o ângulo que $\vec{\omega}$ forma com $\hat{z}''$. Esse ângulo nada mais é do que a latitude α mas $\pi/2$, então

$$\Omega = \omega sen\theta \tag{4.38}$$

4.1.3 Força magnética

Ressaltemos em particular que a força magnética que age em uma partícula de carga q e massa m sujeita a um campo magnético externo $\vec{B}$ é dada por:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}, \tag{4.39}$$

e que depende, portanto, de sua velocidade $\vec{v}$. Note-se, portanto, certa similaridade dessa força com a força de Coriolis, 3^o termo de 4.23: ambas dependem linearmente da velocidade em função de um produto vetorial. Podemos agora considerar o caso de um campo magnético constante, e verificar que se

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{2m}\vec{B}, \tag{4.40}$$

a força magnética será:

$$\vec{F}_m = -2m\vec{v} \times \vec{\omega} = 2m\vec{\omega} \times \vec{v}, \tag{4.41}$$

e assim recuperamos exatamente o termo da força de Coriolis, do modo que aparece em 4.23. Sendo assim, o campo magnético gerará um movimento de precessão no sistema de cargas com velocidade angular $\vec{\omega}$. É possível mostrar que, se consideramos um conjunto qualquer de cargas com o mesmo valor da razão q/m, e que essas cargas se atraem ou repelem mutuamente e em acréscimo sofrem a ação de uma força central, o comportamento é o mesmo. Esse modelo simula, na verdade, um átomo "clássico".

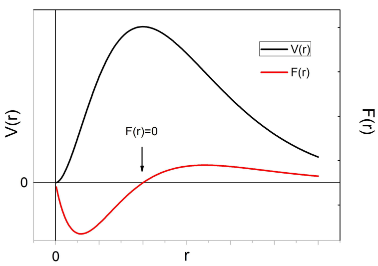
5 Resolução de problemas do livro

5.1 Movimento em 2 - 3 dimensões - Capítulo 3

Problema 42 (pág. 152) *Conceba uma função de energia potencial que se anule para $r \to \infty$ e que dê uma força $\vec{F} \approx -k\vec{r}$ para $r \to 0$. Encontre essa força. Verifique, fazendo a integral de linha apropriada, que o trabalho realizado por essa força sobre uma partícula que se mova de $\vec{r} = 0$ a $\vec{r} = \vec{r}_0$ é a mesma se a partícula segue uma linha reta entre esses pontos ou se segue o percurso $(0,0,0) \longmapsto (x,0,0) \longmapsto (x,y,0) \longmapsto (x,y,z)$, onde x, y, z são as coordenadas do ponto final marcado por $\vec{r}_0$.*

Uma função que satisfaz o requisito é uma combinação do potencial harmônico $V(r) = (1/2)kr^2$ com uma exponencial decrescente $e^{-\alpha r}$, como apresentamos abaixo:

$$V(r) = \frac{1}{2}ke^{-\alpha r}r^2 \tag{5.1}$$



Na figura ao lado, esse potencial é apresentado para o caso em que $k = 1$ e $\alpha = 0,02$. A força será dada por:

$$\vec{F}(r) = -\nabla V(r) = -k\left(1 - \frac{\alpha r}{2}\right)e^{-\alpha r}r\hat{r} \tag{5.2}$$

Em caráter preliminar, notemos algumas peculiaridades inerentes à nossa escolha 5.2:

- Para $r \to 0$, $\vec{F}(r) \approx -k\vec{r}$;
- Para $r \to \infty$, $V(r)$ se anula;
- O ponto $\alpha r = 2$ marca um diferencial no comportamento da força: nesse ponto, ela se anula (ver figura);
- Quando $\alpha r < 2$, o termo entre parêntesis é negativo e a força apontará na direção oposta a $\vec{r}$. Será portanto uma força *atrativa*;
- Quando $\alpha r > 2$, o termo entre parêntesis será positivo. Nesse caso, a força apontará para fora, isto é, na direção de $\vec{r}$. Teremos então uma força *repulsiva*;
- No ponto em que $\vec{F}(r)$ se anula, o potencial atinge o seu máximo valor V_{max};
- Se um corpo está na região que satisfaz $\alpha r < 2$ e sua energia mecânica total E for menor que V_{max}, o corpo ficará permanentemente oscilando nessa região, já que haverá uma barreira de energia potencial que não é suplantada. Entretanto, se $E > V_{max}$, o corpo poderá migrar para a região externa (isto é, a região em que $\vec{F}(r)$ é repulsiva), e assim será projetado por essa força para cada vez mais longe.

O cálculo do trabalho compreende a integral de linha

$$W = \int_{\vec{r}=0}^{\vec{r}=\vec{r}_0} \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} \tag{5.3}$$

Por simplicidade, vamos usar diretamente $\vec{F}(r) = -\nabla V(r)$ e o fato de que para qualquer função $f(r)$, $\nabla f(r) \cdot d\vec{r} = df(r)$. Segue disso que

$$W = -[V(r_0) - V(0)] \tag{5.4}$$

Vamos fazer agora a integral em 5.3 explicitamente para o segundo caminho de integração:

$$W = \int_0^{(x,0,0)} \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} + \int_0^{(x,y,0)} \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} + \int_0^{(x,y,z)} \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} \tag{5.5}$$

$$W = \begin{array}{c} -k \int_0^{(x,0,0)} \left(1 - \frac{\alpha r}{2}\right) e^{-\alpha r} r dr \\ -k \int_0^{(x,y,0)} \left(1 - \frac{\alpha r}{2}\right) e^{-\alpha r} r dr \\ -k \int_0^{(x,y,z)} \left(1 - \frac{\alpha r}{2}\right) e^{-\alpha r} r dr \end{array} \tag{5.6}$$

O desenvolvimento dessas três integrais demandaria um tratamento numérico (para dados valores de x, y, z) a menos que saibamos a função primitiva do integrando. Obviamente que a forma analítica dessa primitiva é já de antemão conhecida, e a determinamos diretamente de nossa escolha feita em 5.2, pois

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2} e^{-\alpha r} r^2\right) = \left(1 - \frac{\alpha r}{2}\right) e^{-\alpha r} r \tag{5.7}$$

e então obteremos uma solução direta do problema, comprovando a hipótese.

Problema 46 (pág. 153) *Uma partícula de massa m se move sob a ação de uma força central cujo potencial é*

$$V(r) = Kr^4, \qquad K > 0.$$

Para que energia e momento angular a órbita será um círculo de raio a em torno da origem? Qual será o período desse movimento circular? Se a partícula for levemente perturbada dessa órbita, qual será o período das oscilações radiais resultantes em torno de r=a?

Podemos usar 1.11, lembrando que no movimento circular $\dot{r} \equiv 0$. Assim, temos a igualdade de forças $F(a) = -ma\dot{\theta}^2 \equiv -Ka^4$:

$$ma\dot{\theta}^2 = Ka^4 \tag{5.8}$$

ou seja, $\dot{\theta} = \sqrt{Ka^3/m}$. Por outro lado, o momento angular é simplesmente $L = mva = m\dot{\theta}a^2$, e assim

$$L = \sqrt{Km}\ a^{7/2} \tag{5.9}$$

Agora usamos 1.18 da apostila, que é a 3.212 do livro, para encontrar a energia, obviamente agora tomando $\dot{r} = 0$:

$$\frac{L^2}{2ma^2} + V(a) = E \tag{5.10}$$

A energia potencial correspondente $V(r)$ será dada por (via integração) $(1/5)Kr^5$. Assim, obtemos diretamente

$$E = \frac{7}{10}Ka^5 \tag{5.11}$$

A órbita perturbada corresponderá a oscilações radiais dadas em função da frequência angular ω, dada no livro em 3.223,

$$\omega^2 = \frac{1}{m}\left(\frac{d^2V'}{dr^2}\right), \tag{5.12}$$

onde V' é a soma do potencial $(1/5)Kr^5$ com o potencial centrífugo $\frac{L^2}{2mr^2}$ (ver 3.218, no livro, ou 1.20 na apostila). Assim, verificamos que

$$V'(r) = \frac{7}{10}Kr^5 \tag{5.13}$$

e portanto

$$\omega = \sqrt{\frac{14Ka^3}{m}} \tag{5.14}$$

A título de curiosidade, comparemos essa frequência angular de oscilações com a velocidade angular do movimento $\dot{\theta}$: encontraremos

$$\frac{\dot{\theta}}{\omega} = \sqrt{14} \tag{5.15}$$

Assim, a cada órbita completa houve $\sqrt{14}$ pulsações da trajetória em torno de $r = a$. Não havendo uma proporção racional, essas trajetórias perturbadas nunca serão fechadas.

Problema 47 (pág. 153): *De acordo com a teoria de Yukawa para as forças nucleares, a força atrativa entre um próton e um nêutron tem o potencial*

$$V(r) = \frac{Ke^{-\alpha r}}{r}, \qquad K < 0.$$

a) encontre a força e compare-a com a lei do inverso do quadrado;
b) discuta os tipos de movimento que podem ocorrer se uma partícula de massa m se move sob ação de uma tal força;
c) Discuta qual a diferença esperada para os movimentos, com respeito ao caso da força $1/r^2$;
d) Encontre a energia e o momento angular para um movimento em órbita circular de raio a;
e) Encontre o período do movimento circular e o período de pequenas oscilações radiais;
f) Mostre que órbitas circulare próximas são quase fechadas quando a é pequeno.

Desenvolvemos a solução desse problema abaixo sem obedecer à sequência dos itens.
Consideramos um potencial dado por
$V(r) = \frac{Ke^{-\alpha r}}{r}$

A força será:
$F(r) = -\frac{dV(r)}{dr} = \frac{Ke^{-\alpha r}}{r^2}(1 + \alpha r)$

Também podemos escrever isso em termos de $u = 1/r$: $F(\frac{1}{u}) = Ke^{-\frac{\alpha}{u}}u(u + \alpha)$

<u>*Primeira consideraçao geral*</u> - Tomamos entao a equaçao 1.31 da apostila, ou seja, 3.222 de Symon,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{m}{L^2u^2}F(\frac{1}{u}) - u$$

Imediatamente, substituiríamos a expressao que encontramos para a força associada ao potencial de Yukawa. No entanto, adotaremos um outro procedimento: usaremos a definiçao de força a partir de um potencial genérico, $F(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$:
$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{m}{L^2u^2}\frac{dV(r)}{dr} - u$

Veremos que esse procedimento nos trará uma grande vantagem, e além do mais ele se aplica a qualquer potencial $V(r)$. Multiplicamos ambos os membros dessa equaçao por $\frac{du}{d\theta}$. Usando a regra da cadeia, o membro esquerdo se converte em $r\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{2}(\frac{du}{d\theta})^2\right\}$, e então:

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right\} = \frac{m}{L^2u^2}\frac{dV(r)}{dr}\frac{du}{d\theta} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2}u^2\right)$$

Mas

$$\frac{1}{u^2}\frac{dV(r)}{dr} = r^2\frac{dV(r)}{dr} = -\frac{dV(r)}{dr^{-1}} = -\frac{dV(r)}{du}$$

logo,

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right\} = -\frac{m}{L^2}\frac{dV(r)}{du}\frac{du}{d\theta} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2}u^2\right)$$

Por outro lado,

$$\frac{dV(r)}{du}\frac{du}{d\theta} = \frac{dV(r)}{d\theta} = \frac{dV(u^{-1})}{d\theta}$$

Entao temos finalmente

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right\} = -\frac{m}{L^2}\frac{dV(u^{-1})}{d\theta} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2}u^2\right)$$

e isso pode ser escrito na forma:

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{m}{L^2}V(u^{-1}) + \frac{1}{2}u^2\right\} = 0$$

Essa equaçao implica, portanto, em que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{m}{L^2}V(u^{-1}) + \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}C = constante$$

e assim identificamos uma segunda constante do movimento (a primeira delas é o momento angular L). Podemos agora reescrever essa equaçao em termos de $u^{'} = \frac{du}{d\theta}$:

$$\frac{du}{d\theta} = \sqrt{C - \frac{2m}{L^2} V(u^{-1}) - u^2}$$

Montamos em seguida as integrais na forma:

$$\int_{u(\theta_0)}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{C - \frac{2m}{L^2} V(u^{-1}) - u^2}} = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \theta - \theta_0$$

Essa é portanto a equaçao mais geral possível para a trajetória: com ela determinamos $u(\theta)$ para dadas condiçoes iniciais (valor de $u(\theta_0)$). Obviamente também necessitamos de L e de C.
Ressaltamos que a última equaçao se aplica a qualquer potencial $V(r)$.

Resoluçao para o potencial de Yukawa - Neste momento, substituímos a expressao para $V(u^{-1})$:

$$\int_{u(\theta_0)}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{C - \frac{2m}{L^2} uKe^{-\frac{\alpha}{u}} - u^2}} = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \theta - \theta_0$$

Não temos soluçao para o caso exato, mas analisaremos tres casos particulares:

1. Se ao longo de toda a trajetória r for muito pequeno, isto é, se $\alpha r \ll 1$, o termo em $e^{-\frac{\alpha}{u}}$ na integral acima tende a 1, e assim

$$\int_{u(\theta_0)}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{C - \frac{2m}{L^2} uK - u^2}} \approx \theta - \theta_0$$

2. Se ao longo de toda a trajetória r for pequeno mas não desprezível, $\alpha r < 1$, expandimos a exponencial em série de Taylor, até o termo de primeira ordem: $e^{-\frac{\alpha}{u}} \approx 1 - \frac{\alpha}{u}$:

$$\int_{u(\theta_0)}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{C - \frac{2m}{L^2} uK(1 - \frac{\alpha}{u}) - u^2}} \approx \theta - \theta_0$$

3. Se r for grande em toda a trajetória, isto é, $\alpha r \gg 1$ o termo em $e^{-\frac{\alpha}{u}}$ será desprezível e restará

$$\int \frac{du}{\sqrt{C - u^2}} \approx \theta - \theta_0$$

Todos esses tres casos podem ser resolvidos, como mostraremos agora:

1. Para $\alpha r \ll 1$: integralizamos um binômio quadrado perfeito no radicando somando e subtraindo $(\frac{mK}{L^2})^2$:

$$C - \frac{2m}{L^2}uK - u^2 = C - \left\{ \frac{2m}{L^2}uK + u^2 + \left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 - \left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 \right\} =$$
$$= C - \left(u + \frac{mK}{L^2}\right)^2 + \left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 = D - v^2$$

onde

$$D = C + \left(\frac{mK}{L^2}\right)^2, \quad v = u + \frac{mK}{L^2}$$

Assim, a integral se torna

$$\int \frac{du}{\sqrt{D - v^2}} = \int \frac{dv}{\sqrt{D - v^2}} = \int \frac{dv}{\sqrt{D}\sqrt{1 - \left(\frac{v}{\sqrt{D}}\right)^2}}$$

Definimos a nova variável $w = \frac{v}{\sqrt{D}}$, e a integral se converte em

$$\int \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}} = arccos(w)$$

Portanto,

$$arccos(w(\theta)) - arccos(w(\theta_0)) = \theta - \theta_0$$

Podemos escolher por simplicidade $arccos(w(\theta_0)) = \theta_0$ e assim temos $w(\theta) = cos(\theta)$

Portanto,

$$u = \sqrt{C + \left(\frac{mK}{L^2}\right)^2} \cos(\theta) - \frac{mK}{L^2}$$

o que implica em

$$\frac{1}{r} = \sqrt{C + \left(\frac{mK}{L^2}\right)^2} \cos(\theta) - \frac{mK}{L^2}$$

Já sabemos que essa é a equaçao de uma elipse. Obviamente $C + (\frac{mK}{L^2})^2 > 0$, o que impõe um limite inferior para C :

$$C > -(\frac{mK}{L^2})^2$$

2. Para $\alpha r < 1$ ($e^{-\frac{\alpha}{u}} \approx 1 - \frac{\alpha}{u}$): também integralizamos um binômio no radicando:

$$C - \frac{2m}{L^2}uK(1 - \frac{\alpha}{u}) - u^2 = C - \frac{2m}{L^2}uK + \frac{2m}{L^2}K\alpha - u^2 =$$
$$= C + \frac{2m}{L^2}K\alpha - \left(\frac{2m}{L^2}uK + u^2\right) = C + \frac{2m}{L^2}K\alpha - \left(\frac{2m}{L^2}uK + u^2\right) =$$
$$= C + \frac{2m}{L^2}K\alpha - \left(\frac{2m}{L^2}uK + u^2 + \left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 - \left(\frac{mK}{L^2}\right)^2\right) =$$
$$= C + \frac{2m}{L^2}K\alpha + \left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 - \left(u + \frac{mK}{L^2}\right)^2 =$$

$= D - v^2$

onde
$D = C + \frac{2m}{L^2}K\alpha + \left(\frac{mK}{L^2}\right)^2, v = u + \frac{mK}{L^2}$

Finalmente, a integral se converte em:
$\int_{u(\theta_0)}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{D - v^2}} \approx \theta - \theta_0$

e por raciocínio análogo chegamos a
$u = \sqrt{C + \frac{mK}{L^2}\left(2\alpha + \frac{mK}{L^2}\right)}\cos(\theta) - \frac{mK}{L^2}$

e
$\frac{1}{r} = \sqrt{C + \frac{mK}{L^2}\left(2\alpha + \frac{mK}{L^2}\right)}\cos(\theta) - \frac{mK}{L^2}$

Portanto, novamente temos uma trajetória elíptica, que difere da do caso $\alpha r \ll 1$ apenas pela amplitude. O limite inferior para C é:
$C > \frac{mK}{L^2}\left(2\alpha + \frac{mK}{L^2}\right)$

3. Para $\alpha r \gg 1$: é um caso bem mais simples, pois nao há necessidade de se integralizar um binômio.Temos

$\int \frac{du}{\sqrt{C - u^2}} \approx \theta - \theta_0$
$u = \sqrt{C}\cos(\theta)$

e portanto
$\frac{1}{r} = \sqrt{C}\cos(\theta) \Leftrightarrow r = \frac{1}{\sqrt{C}\cos(\theta)}$

o que requere que $C > 0$. Note-se que nossa premissa $\alpha r \gg 1$ requere que
$\alpha r = \frac{\alpha}{\sqrt{C}\cos(\theta)} \gg 1 \Leftrightarrow \cos(\theta) \ll \frac{\alpha}{\sqrt{C}}$

Isso nos impõe um limite superior para $\cos(\theta)$. O limite inferior é obviamente zero, dado que r é positivo e que $r = \frac{1}{\sqrt{C}\cos(\theta)}$. Portanto, o domínio de valores do ângulo é:
$arccos(\frac{\alpha}{\sqrt{C}}) \ll \theta < \frac{\pi}{2}$

A equaçao $\frac{1}{r} = \sqrt{C}\cos(\theta)$ parece simples, mas não familiar. Entretanto, repare-se que
$r\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{C}}$

e, precisamente, $rcos(\theta)$ nada mais é do que a coordenada $x = rcos(\theta)$. Então esse movimento corresponde a
$x = \frac{1}{\sqrt{C}} = constante$

é a equaçao de uma reta. Isso era de se esperar, pois para r muito grande o potencial se torna irrisório. Esse caso corresponde, portanto, ao de uma partícula num potencial constante zero.

Problema 50 (pág. 154): *a) Discuta pelo método do potencial efetivo os tipos de movimento esperados para um potencial atrativo inversamente proporcional ao cubo da distância:*

$$F(r) = -\frac{K}{r^3}, \qquad K > 0.$$

b) encontre as faixas de energia e angular momento para cada tipo de movimento;
c) Resolva a equação orbital (no livro, 3.222; na apostila, 1.34), e mostre que a solução é uma das seguintes:
(...)
d) Quais valores de L e E que correspondem a cada um dos casos acima?
e) Esboce uma trajetória típica para cada um desses casos.

Esse problema está de certo modo incluso no próximo problema.

Problema 51 (pág. 154): *a) Discuta os tipos de movimento que podem ocorrer para a força central*

$$F(r) = -\frac{K}{r^2} + \frac{K'}{r^3}$$

b) Resolva a equação orbital e mostre que as órbitas limitadas tem a forma (se $L^2 > -mK'$)

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1 + \epsilon cosa\theta}$$

(atende também parcialmente ao problema 50)

Consideramos uma força dada por $F(r) = -\frac{K}{r^2} + \frac{K'}{r^3}$
Como de costume, apelamos a equaçao 1.31 da apostila (ou seja, 3.222 de Symon), tomando $u = 1/r$:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{m}{L^2u^2}F(u^{-1}) - u$$

Então:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{m}{L^2u^2}(-Ku^2 + K'u^3) - u$$

Expandindo, encontramos:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{m}{L^2u^2}Ku^2 - \frac{m}{L^2u^2}K'u^3 - u$$

Agora simplificamos numeradores e denominadores:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{m}{L^2}K - \frac{m}{L^2}K'u - u$$

Agora agrupamos os termos em u:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{m}{L^2}K - \left(\frac{m}{L^2}K' + 1\right)u$$

Vemos que essa equaçao diferencial é do tipo $\dfrac{d^2y}{dx^2} = a - by$

e ela pode ser facilmente resolvida se redefinirmos uma variável $y^{'} = y - \frac{a}{b}$ e chegar a $\frac{d^2y'}{dx^2} = -by'$

Sabemos que, para $b > 0$, essa é a equaçao que descreve um MHS de frequencia angular $\omega = \sqrt{b}$, e assim, <u>*apenas para*</u> $b > 0$ a soluçao é $y' = Acos(\omega x + \theta_0)$

sendo A um fator de amplitude e θ_0 uma fase, completamente arbitrários (vamos considerar $\theta_0 = 0$ por simplicidade). Portanto, $y = Acos(\omega x) + \dfrac{a}{b}$

Agora basta fazer uma comparaçao para ver que em nosso caso
$x = \theta; \quad u = y; \quad a = \dfrac{m}{L^2}K; \quad b = \quad \left(\dfrac{m}{L^2}K^{'} + 1\right)$

e de-se atençao especial ao sinal de b. Portanto, $u = Acos\left(\sqrt{\dfrac{m}{L^2}K' + 1}\ \theta\right) + \dfrac{mK}{mK' + L^2}$

E assim $r = \dfrac{1}{Acos\left(\sqrt{\dfrac{m}{L^2}K' + 1\theta}\right) + \dfrac{mK}{mK' + L^2}}$

ou, se preferirmos: $r = \dfrac{\dfrac{mK^{'} + L^2}{mK}}{A\dfrac{mK^{'} + L^2}{mK}\cos(\sqrt{\dfrac{m}{L^2}K' + 1}\ \theta) + 1}$

ou seja,
$r = \dfrac{a(1 - \epsilon^2)}{\epsilon cos(\omega\theta) + 1}$
onde
$a(1 - \epsilon^2) = \dfrac{mK^{'} + L^2}{mK}; \quad A\dfrac{mK^{'} + L^2}{mK} = \epsilon$

Note-se que, para $\omega = 1$, essa trajetória é uma elipse. Para $\omega \neq 1$, essa trajetória corresponde a uma elipse precessante, isto é, num período completo $\theta = 0?2\pi$ ela nao se fecha, pois $r(0) \neq r(2\pi)$. O período de precessao pode ser facilmente determinado: durante o período de tempo T que corresponde ao período angular $\theta = 2\pi$, um dado ponto é levado de $r(0)$ a $r(\omega 2\pi) \neq r(0)$. Ele seria levado ao mesmo valor somente se $r(0) = r(2\pi) = r(\omega\theta')$, o que implica em
$\theta^{'} = \frac{2\pi}{\omega}$
Assim, enquanto o ângulo varia de zero a $\theta^{'}$, r retorna ao seu valor original. Devemos entao encontrar a diferença de ângulos, $\Delta\theta = \frac{2\pi}{\omega} - 2\pi$

e é justamente ela que marca o deslocamentoi angular, durante o período T. Logo, a velocidade de precessao angular é: $\omega^{'} = \frac{\Delta\theta}{T} = \frac{\frac{2\pi}{\omega} - 2\pi}{T} = \frac{\Omega}{\omega} - \Omega = \Omega(\frac{1}{\omega} - 1)$

onde designamos por $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ a velocidade angular do movimento (o deslocamento angular ao longo do tempo). Note que ω nao é uma velocidade angular real, pois nao tem ligaçao com o tempo. ω é uma " velocidade angular"de variaçao de $r(\theta)$ com θ, e nao tem portanto nenuma ligaçao com o tempo.

Finalmente, a condiçao $b > 0$ requere que $\frac{m}{L^2}K^{'} + 1 > 0? - mK^{'} < L^2$

Devemos também considerar os casos em que $b = 0$ e $b < 0$. No primeiro caso, temos $\frac{d^2y'}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow y' = cx + d$,

assim, $y = cx + d', \quad d' = d + \frac{a}{b}$

E resta que d' é totalmente arbitrário pois d é arbitrário. Finalmente, $u = c\theta + d'$

que é a equaçao de uma espiral. Nesse caso, temos $-mK^{'} = L^2$

e esse movimento <u>*só pode ocorrer se, evidentemente*</u>, $K^{'} < 0$. Se K' for positivo, <u>*ele não poderá existir*</u>.

Para $b < 0$, a equaçao diferencial é:

$$\frac{d^2y'}{dx^2} = |b|y'$$

e a solução é:

$$u = Ae^{+\sqrt{\frac{m}{L^2}K'+1}\ \theta} + Be^{-\sqrt{\frac{m}{L^2}K'+1}\ \theta} + \frac{mK}{mK' + L^2}$$

Se definimos $\beta = \sqrt{\frac{m}{L^2}K' + 1} = constante$, essa soluçao pode ser escrita como:

$$u = Ae^{+\beta\theta} + \frac{mK}{L^2\beta^2} \quad (B = 0)$$

$$u = Be^{-\beta\theta} + \frac{mK}{L^2\beta^2} \quad (A = 0)$$

$$u = Acosh(\beta\theta) + \frac{mK}{L^2\beta^2} \quad (A = B)$$

$$u = Asen(\beta\theta) + \frac{mK}{L^2\beta^2} \quad (A = -B)$$

Para o caso genérico em que nao necessariamente $A = B$ e nem $A = -B$, sendo ambos A e B nao nulos, temos outras soluçoes, mais gerais, que substituem as duas últimas soluçoes acima: $u = Acosh(\beta[\theta - \theta_0]) + \frac{mK}{L^2\beta^2} \quad (A = B)$

$$u = Asen(\beta[\theta - \theta_0]) + \frac{mK}{L^2\beta^2} \quad (A = -B)$$

(a constante θ_0 absorve a diferença entre os coeficientes A e B). Logo, temos as seguintes soluçoes para r:

$$r = \frac{1}{Ae^{\pm\beta\theta} + \frac{mK}{L^2\beta^2}}$$

$$r = \frac{1}{Acosh(\beta[\theta - \theta_0]) + \frac{mK}{L^2\beta^2}}$$

$$r = \frac{1}{Asenh(\beta[\theta - \theta_0]) + \frac{mK}{L^2\beta^2}}$$

que <u>***nao é***</u> uma trajetória periódica. Lembremos que essas trajetórias ocorrem para $\frac{m}{L^2}K^{'} + 1 < 0 \Leftrightarrow -mK^{'} > L^2 > 0$, e portanto, essas soluçoes <u>*só existem se*</u> K' <u>*for positivo.*</u>

5.2 Gravitação - Capítulo 6

Problema 1 (pág. 267): *(a) Dadas as leis do movimento de Newton e as duas primeiras leis de Kepler do movimento planetário, mostre que a força que age em um planeta é dirigida ao Sol e é inversamente proporcional ao quadrado da distância ao Sol.*
(b) Use a terceira lei de Kepler para mostrar que as forças nos planetas são proporcionais às suas massas.
Se isso sugere uma lei de atração universal entre duas massas quaisquer, use a terceira lei de Newton para mostrar que a força deve ser proporcional a ambas as massas.

1(a) Usa-se a equação 3.80, pág. 94:

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \equiv \frac{1}{r}(r^2\ddot{\theta} + 2\dot{r}r\dot{\theta}) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)$$

e aplica-se a 2^a lei de Kepler, $r^2\dot{\theta} = \frac{L}{m} = constante$, de sorte que $a_\theta = 0$. Assim, $F \propto a_r$. Isso prova que a força se dirige radialmente. Para provar que $F(r) \propto 1/r^2$, apelamos para a 1^a lei de Kepler, segundo a qual a órbita é elíptica:

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon cos\theta}.$$

Segue disso que:

$$\dot{r} = \frac{a(1-\epsilon^2)}{(1+\epsilon cos\theta)^2}\epsilon sen\theta\dot{\theta} \equiv \frac{r^2}{a(1-\epsilon^2)}\epsilon sen\theta\dot{\theta} = \frac{\epsilon}{a(1-\epsilon^2)}sen\theta r^2\dot{\theta};$$

Mas $r^2\dot{\theta} = \frac{L}{m}$, então

$$\dot{r} = \frac{L}{m}\frac{\epsilon}{a(1-\epsilon^2)}sen\theta.$$

Dessa maneira, segue imediatamente que

$$\ddot{r} = \frac{L}{m}\frac{\epsilon}{a(1-\epsilon^2)}cos\theta\dot{\theta} = \frac{L}{m}\frac{\epsilon}{a(1-\epsilon^2)}cos\theta\frac{L}{mr^2} = \left(\frac{L}{m}\right)^2\frac{\epsilon}{a(1-\epsilon^2)}cos\theta\frac{1}{r^2},$$

Agora precisamos calcular a componente da força na direção radial, F_r. Ela é dada por (apostila: ver expressões 1.11; livro: expressão 3.207):

$$F_r = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2$$

Usando o resultado obtido,

$$\frac{F_r}{m} = \left(\frac{L}{m}\right)^2\frac{\epsilon}{a(1-\epsilon^2)}cos\theta\frac{1}{r^2} - r\dot{\theta}^2 = \left(\frac{L}{m}\right)^2\frac{\epsilon}{a(1-\epsilon^2)}cos\theta\frac{1}{r^2} - \frac{L^2}{m^2r^3}.$$

Colocando em evidência $L/(mr^2)$,

$$\frac{F_r}{m} = \left(\frac{L}{m}\right)^2 \frac{1}{r^2}\left(\frac{\epsilon}{a(1-\epsilon^2)}cos\theta\ -\frac{1}{r}\right).$$

Usando novamente a expressão de r para a trajetória elíptica, substituimo-la no termo $1/r$ para obter

$$\frac{F_r}{m} = \left(\frac{L}{m}\right)^2 \frac{1}{r^2}\left(\frac{\epsilon}{a(1-\epsilon^2)}cos\theta\ -\frac{1+\epsilon cos\theta}{a(1-\epsilon^2)}\right),$$

e do anulamento de termos resta por fim

$$\frac{F_r}{m} = -\left(\frac{L}{m}\right)^2 \frac{1}{r^2}\frac{1}{a(1-\epsilon^2)} \propto \frac{1}{r^2},$$

conforme desejado.

1(b) Considera-se a 3^a lei,

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \Rightarrow GM\frac{1}{a^2} = \omega^2 a,$$

então

$$F = m\omega^2 a = m\frac{GM}{a^2} \text{ (órbita circular).}$$

1(c) $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = -M\ddot{\vec{A}} \Rightarrow F \propto mM$

Podemos fazer: $F = m\omega^2 a = m\frac{GM}{a^2} \propto m$

5.3 Sistemas de coordenadas móveis - Capítulo 7

Problema 2 (pág. 291): *Uma massa m é presa a uma mola (de constante elástica k) fixa num ponto de suporte que se move para a frente e para trás ao longo do eixo x fazendo um movimento harmônico simples com frequência angular ω e amplitude a. Assumindo que a massa se move somente ao longo do eixo x, monte e resolva a equação do movimento em um sistema de coordenadas cuja origem está no ponto de suporte.*

No sistema do laboratório, não acelerado (S), a equação de movimento do ponto de suporte P é

$$x_P(t) = acos\omega t \tag{5.16}$$

Por outro lado, a massa m está localizada num ponto (digamos) x_m. Quando a diferença de coordenadas $x_P - x_m$ é igual ao comprimento da mola em equilíbrio (digamos) l_0, não há força elástica, mas quando $x_P - x_m = l \neq l_0$ surge a força elástica

$$F_{el} = -k(l - l_0) = -k(x_P - x_m) \tag{5.17}$$

Uma vez que $x_P(t) = acos\omega t$, segue que

$$F_{el} = -k(acos\omega t - x_m) \tag{5.18}$$

e essa força elástica atuará (obviamente) na massa m, que obedecerá a equação de movimento (empregando a 2^a lei de Newton):

$$m\ddot{x}_m = F = F_{el} = -k(acos\omega t - x_m) \tag{5.19}$$

Então,

$$m\ddot{x}_m = -k(acos\omega t - x_m) \tag{5.20}$$

Essa é a equação de um oscilador harmônico forçado, e sua solução geral é da forma

$$x_m = Acos(\omega t + \theta) \tag{5.21}$$

para encontrar os parâmetros A e θ, substituímos na equação diferencial e obtemos:

$$-A\omega^2 cos(\omega t + \theta) = -\frac{k}{m} acos\omega t + \frac{k}{m} Acos(\omega t + \theta) \tag{5.22}$$

então expandimos o cosseno da soma para obter

$$-A\omega^2 \left\{cos\omega t cos\theta - sen\omega t sen\theta\right\} = -\frac{k}{m} acos\omega t + \frac{k}{m} A \left\{cos\omega t cos\theta - sen\omega t sen\theta\right\} \tag{5.23}$$

e agrupamos separadamente os termos com $cos\omega t$ e $sen\omega t$:

$$(-A\omega^2 cos\theta + \frac{k}{m} a - kAcos\theta) cos\omega t = (-A\omega^2 sen\theta - \frac{k}{m} Asen\theta) sen\omega t \tag{5.24}$$

o que obviamete requere que ambos os membros se anulem, isto é,

$$-A\omega^2 cos\theta + \frac{k}{m} a - \frac{k}{m} Acos\theta = 0 \tag{5.25}$$

e

$$-A\omega^2 sen\theta - \frac{k}{m} Asen\theta = 0 \tag{5.26}$$

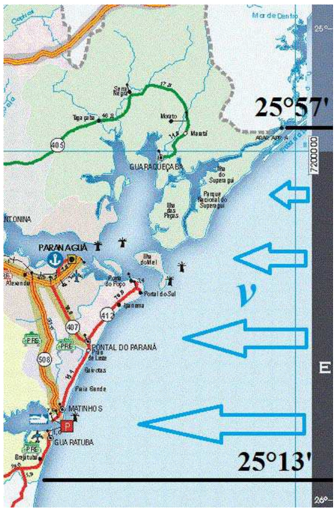
A segunda igualdade requere que $\omega^2 = k/m$. A primeira igualdade junto com a segunda dá

$$cos\theta = \frac{a}{2A} \tag{5.27}$$

Problema 5, adaptado para o caso do litoral paranaense (ver figura abaixo) (pág. 291) *Suponha que ventos orientais na costa litorânea do Paraná com a velocidade v de cerca de 5 km/h sejam mantidos em fluxo estacionário sem mudança de latitude (ver figura ao lado) por um gradiente de pressão. Determine esse gradiente e também a diferença de pressão entre os dois extremos de latitude dessa costa, que se extende de 25º13' a 25º57' aproximadamente* nota: requere-se o uso da equação (5.172): $\vec{f} = \nabla p$, onde $\vec{f}$ é a força por unidade de volume no fluido).

Num sistema inercial S, o movimento do vento é descrito por

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g} \tag{5.28}$$



Passaremos a um referencial não inercial S' que caminha com o vento, de leste a oeste, com eixo z' paralelo ao eixo z de S, com o eixo x' tangente à superfície da Terra e apontando para oeste, e com o eixo y' apontando para fora da Terra perpendicularente ao seu eixo de rotação. Nesse sistema, vale a equação 7.34 do livro (ou 4.23 da apostila):

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)' \tag{5.29}$$

Dessas duas igualdades, obtemos:

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)' = \vec{g} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)' \tag{5.30}$$

O segundo termo, à latitude α, é simplesmente (considerando que $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$)

$$-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = -\omega^2\hat{z}\times(\hat{z}\times\vec{r}) = -\omega^2 r sen\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\hat{y} = -\omega^2 r\ cos\alpha\ \hat{y} \tag{5.31}$$

Esse termo pode ser desdobrado em duas partes: um que provoca o deslocamento da massa de ar para a alta atmosfera, dado por

$$-\omega^2 r\ cos^2\alpha \tag{5.32}$$

e outro que desloca o ar para o horizonte, na direção do equador,

$$-\omega^2 r\ cos\alpha\ sen\alpha = -\frac{1}{2}\omega^2 r\ sen2\alpha \tag{5.33}$$

Finalmente, o termo da aceleração de Coriolis será:

$$-2\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)' = -2\omega\hat{z}\times(v\hat{x}) = -2\omega v\hat{y} \tag{5.34}$$

Essa aceleração representa uma força fictícia que aponta para fora, em oposição à direção do eixo da Terra. Dividimo-la em duas componentes: uma componente ascensional que desloca o vento para o alto da atmosfera,

$$2\omega v cos\alpha, \tag{5.35}$$

e uma segunda componente paralela à superfície da Terra, que move o vento para o horizonte, na direção do equador se v é positivo, e na oposta se negativo:

$$2\omega v sen\alpha. \tag{5.36}$$

Assim, podemos agora retomar a expressão 5.30, mas apenas considerando os termos com vetores *paralelos à superfície da Terra.* Isso já exclui a gravidade $\vec{g}$, e restam (usando o raio da Terra R):

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)'_{paralelo} = -\omega sen\alpha \left(2v + \omega R\ cos\alpha\ \right) \tag{5.37}$$

Agora consideramos a força por unidade de volume, que a igualamos ao gradiente da pressão:

$$\left|\vec{f}\right| = \rho\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)'_{paralelo} = -\rho\omega sen\alpha \left(2v + \omega R\ cos\alpha\ \right) = |\nabla p| \tag{5.38}$$

Tomamos a densidade média do ar à pressão atmosférica, 1,2 kg/m^3, o raio da Terra $R = 6,37 \times 10^6$ m, a velocidade angular da Terra $\omega = 2\pi/86400$ s^{-1}=7,272$\times$10^{-5} s^{-1} e o valor médio $\alpha = 25^o 35'$, e encontraremos o gradiente

$$|\nabla p| = 1,6 \times 10^{-2}\text{Pa/m} \tag{5.39}$$

Consequentemente, o desnível de pressão entre os extremos de latitude será (ignorando a variação dos termos em 5.38 com a latitude, impactando na variação do gradiente $|\nabla p|$ com a latitude):

$$|\nabla p|\, R\Delta\alpha = 1,6 \times 10^{-2} \times 6,37 \times 10^6 \times (0,012799) = 1,3 \times 10^3\text{Pa} \tag{5.40}$$

onde $\Delta\alpha = (25^o 13' - 25^o 57') \times 2\pi/360$ é a diferença de latitudes.
Notemos que o efeito do termo de Coriolis será muito menor do que o termo centrífugo. No âmbito da mecânica dos fluidos, a razão deles é denominada *número de Rossby.*

Problema 9 (pág. 292): *Um avião cruza o polo norte a 500 mph, seguindo um meridiano a longitude fixa (isto é, seguindo a rotação da Terra). Encontre o ângulo entre a direção de um fio de prumo suspenso livremente dentro do avião, no momento em que cruza o polo, e outro na superfície da Terra, no polo.*

Num sistema inercial, a equação do movimento será

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{T} + m\vec{g} \tag{5.41}$$

onde T é a tensão ao longo do fio do prumo. Se o avião estivesse parado exatamente no polo, um observador parado num referencial inercial veria o prumo apontando exatamente ao longo da direção vertical, acompanhando o eixo da Terra. Isso significaria que $\vec{T} = -m\vec{g}$ e $d^2\vec{r}/dt^2 = 0$. No entanto, neste problema o avião está em movimento, e ele vai arrastando o prumo. A presença de forças não inerciais devidas ao deslocamento do avião em seu movimento causará portanto uma força adicional, e assim teremos um termo adicional em 5.41, fazendo com que a aceleração $d^2\vec{r}/dt^2$ não mais seja nula.
Passemos então ao sistema não inercial, fixo no avião, e então teremos (eq. 7.34 do livro, ou 4.23 da apostila, ignorando o termo de Euler):

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{T} + m\vec{g} \equiv m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)' + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2m\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)' \tag{5.42}$$

Notemos que o fato de que o avião passa no polo norte significa que $\vec{r}$ aponta na direção do eixo terrestre, e nesse instante $\vec{r}$ é paralelo a $\vec{\omega}$. Em razão disso, o termo com o produto vetorial triplo em 5.42 se anula, e ficamos somente com

$$m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)' = \vec{T} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)' \tag{5.43}$$

Lembremos que, ao usar essas expressões, os termos com ' se referem a quantidades medidas no referencial em rotação. O problema indica que o avião, no seu deslocamento, acompanha um meridiano terrestre, e

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)' \tag{5.44}$$

é uma velocidade ao longo da superfície da Terra cujo módulo é 500 mph = 804,7 km/h = 223,5 m/s. Por outro lado, vamos exigir que no referencial do avião o prumo esteja imóvel: isso requere que $d^2\vec{r}/dt^2$ seja zero.
Finalmente, notemos que $\vec{\omega}$ é paralelo ao eixo terrestre, enquanto que, na passagem pelo polo, a velocidade é perpendicular ao eixo terrestre. Sendo assim, o produto vetorial

$$\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)' \tag{5.45}$$

apontará numa direção horizontal perpendicular ao movimento do avião. Para nos ajudar, montemos um sistema de eixos x', y', z', estando z' paralelo ao eixo de rotação da Terra e x' paralelo à velocidade do avião. Segue então que esse produto vetorial estará na direção de y', isto é,

$$\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)' = \omega\left|\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)'\right|\hat{y}' = \omega v\hat{y}' \tag{5.46}$$

Lembremos que, por outro lado, $\vec{g} = -g\hat{z}$, então de 5.43, resta:

$$0 = \vec{T} - mg\hat{z} + 2m\omega v\hat{y}' \tag{5.47}$$

portanto,

$$\vec{T} = mg\hat{z} - 2m\omega v\hat{y}' \tag{5.48}$$

Finalmente, o que desejamos é o ângulo entre os dois prumos, sendo que um está na Terra e segue a direção $\hat{z}$ e o outro aponta na direção da tensão $\vec{T}$. Podemos determinar esse ângulo com o auxílio do produtu escalar:

$$\cos\theta = \frac{\vec{T}\cdot\vec{g}}{Tg} = \frac{g}{\sqrt{g^2+4\omega^2v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2\omega v}{g}\right)^2}} \tag{5.49}$$

(sinal irrelevante "–" removido). Dado que $\omega v << g$, fazemos expansão em série e obtemos a expressão aproximada

$$\cos\theta \approx 1 - 2\left(\frac{\omega v}{g}\right)^2 \tag{5.50}$$

Lembrando que $\cos x = 1 - x^2/2! + ...$, segue que $\theta \approx 2\omega v/g$, e assim, substituindo os valores, com $\omega = 7,272 \times 10^{-5}$ s^{-1},

$$\theta \approx 3,1 \times 10^{-3}\text{rad} = 12'' \tag{5.51}$$

Problema 10 (pág. 292): *Assuma que a Terra é uma esfera de massa M e raio R. Imagine um tubo penetrando a Terra, do polo norte ao centro do planeta, onde faz uma dobra a 90º rumo ao equador. O tubo é preenchido com um fluido, de sorte que o seu nível no polo está à superfície da Terra. Encontre o nível do fluido relativo à superfície da Terra, no equador. Há mudança apreciável na resposta se o tubo corre próximo à superfície da Terra? Há mudança apreciável na resposta se considerarmos a forma real da Terra? (para responder, é necessário empregar material da seção 5.11, "Equilibrium of fluids")*

No tubo ao longo do eixo polar, a pressão varia de p_{atm} (pressão atmosférica) na superfície da Terra, até p_c, a pressão no centro, que calculamos da seguinte maneira:

$$p_c = p_{atm} + \rho \int \vec{g} \cdot d\vec{r} = p_{atm} + \rho \int g dr \tag{5.52}$$

onde ρ é a densidade do fluido. Lembrando que a aceleração da gravidade dentro da Terra varia linearmente da forma $g = (GM/R^3)r$ (onde R e M são o raio e a massa da Terra), segue que

$$p_c = p_{atm} + \left[\frac{\rho GM}{2R^3} r^2 \right] \Bigg|_0^R = p_{atm} + \frac{\rho GM}{2R} \tag{5.53}$$

No outro ramo do tubo (que se estende do centro ao equador), temos uma situação similar: a pressão no centro é obviamente amesma, p_c, e na superfície aberta do tubo, que está à distância h do centro da Terra, a pressão também é a atmosférica. Assim,

$$p_c = p_{atm} + \rho \int \vec{g} \cdot d\vec{r}, \tag{5.54}$$

entretanto, a diferença fundamental é o fato de que g precisa ser corrigida. Na verdade, no referencial da Terra girante temos a aceleração da gravidade efetiva

$$\vec{g}_e = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{5.55}$$

Ocorre, porém, que nesse referencial $\vec{v}\,' = 0$, e assim a força de Coriolis (segundo termo) se anula, restando apenas o termo centrífugo,

$$\vec{g}_e = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{5.56}$$

Para calcular a pressão, precisamos tomar *apenas* a componente radial de $\vec{g}_e$ (conforme nos pedirá a integral):

$$\vec{g}_e \cdot d\vec{r} = (\vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) \cdot d\vec{r} = gdr - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{5.57}$$

Mas, dado que $\vec{\omega}$ e $\vec{r}$ são perpendiculares, segue que $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \omega^2 \vec{r}$. Assim, temos

$$\vec{g}_e \cdot d\vec{r} = gdr - \omega^2 r dr \tag{5.58}$$

Substituindo essa expressão no lugar de $\vec{g} \cdot d\vec{r}$ em 5.54, encontramos:

$$p_c = p_{atm} + \rho \int (g - \omega^2 r) dr, \tag{5.59}$$

Agora substituímos $g = (GM/R^3)r$ e fazemos a integração de $r = 0$ até $r = h$, que é o nível do fluido, para encontrar

$$p_c = p_{atm} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{GM}{R^3} - \omega^2 \right) \left[r^2 \right] \Big|_0^h = p_{atm} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{GM}{R^3} - \omega^2 \right) h^2 \tag{5.60}$$

Basta agora apenas igualar as expressões para p_c calculadas para os dois trechos do tubo, e fazer simplificações necessárias, para obter:

$$\frac{GM}{R} = \left(\frac{GM}{R^3} - \omega^2 \right) h^2, \tag{5.61}$$

o que implica em:

$$h = \frac{R}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega^2 R^3}{GM}}} \tag{5.62}$$

É fácil ver que a grandeza $\omega^2 R^3/(GM)$ é pequena. Usando $R = 6,37 \times 10^6$ m, $M = 5,98 \times 10^{24}$ kg e $\omega = 2\pi/86400$ s^{-1}, obtemos:

$$\frac{\omega^2 R^3}{GM} = 3,427 \times 10^{-3} \tag{5.63}$$

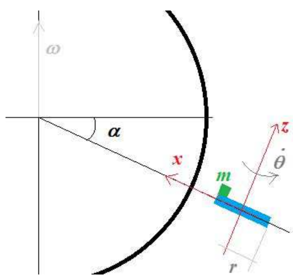
Assim, 5.62 traz a correção

$$h = 0,9983R = 6,36 \times 10^6 \text{ m} \tag{5.64}$$

e relativamente à superfície da Terra, esse nível está $0,01 \times 10^6 = 1 \times 10^4$ m abaixo.

Pergunta n^o 3: nesse caso, consideraremos que a Terra é um esferóide achatado nos polos. A distância polo a polo é de 12.714 km, enquanto que o diâmetro equatorial é de 12.756 km. Sendo assim, $R = 6,357 \times 10^6$ m e o raio equatorial é $6,378 \times 10^6$ m. A diferença do raio equatorial real com respeito a h é $1,8 \times 10^4$ m, o que significa que a superfície da Terra ao equador estará 1,8 vezes acima. Essa casca elipsoidal terá pouca influência nos valores de g ao longo da profundidade da Terra, tanto ao longo do eixo polar quando ao longo do trecho centro-equador, e por isso trará uma alteração negligível no valor de h.

Problema 11 (pág. 292): *Um giroscópio consiste de uma roda de raio r, tendo toda a susa massa localizada em seu aro. O giroscópio tem uma velocidade angular $\dot{\theta}$ em torno de seu eixo, que está na horizontal e está fixo em relação à superfície da Terra. Escolhemos então um sistema de coordenadas em repouso em relação à superfície da Terra, cujo eixo z coincide com o eixo do giroscópio e cuja origem se*



situa no centro do aro do giroscópio. A velocidade angular da Terra ω está no plano xz, fazendo um ângulo α com o eixo do giroscópio. Determine as componentes do torque $\vec{N}$ na origem, ao longo dos três eixos, devido à força de Coriolis no sistema de coordenadas escolhido, atuando em uma massa m no aro do giroscópio, cujas coordenadas polares no plano xy são r, θ. Use o resultado para mostrar que o torque total de Coriolis, no caso da roda do giroscópio ter massa M, é

$$\vec{N} = -\frac{1}{2}\hat{y}Mr^2\omega\dot{\theta}sen\alpha$$

Essa equação é a base da operação do girocompasso.

Um ponto qualquer no aro do giroscópio se move no sistema de coordenada escolhido segundo:

$$\vec{r}(t) = r(cos\dot{\theta}t\ \hat{x} + sen\dot{\theta}t\ \hat{y}) \tag{5.65}$$

Assim, sua velocidade nesse referencial será:

$$\vec{v}(t) = r\dot{\theta}(-sen\dot{\theta}t\ \hat{x} + cos\dot{\theta}t\ \hat{y}) \tag{5.66}$$

Por outro lado, a velocidade angular da Terra, que reside no plano xz e faz com z um ângulo α, deve ser dada por:

$$\vec{\omega} = \omega(sen\alpha\ \hat{x} + cos\alpha\ \hat{z}) \tag{5.67}$$

Portanto, a aceleração de Coriolis será:

$$-2\vec{\omega}\times\vec{v} = -2\omega r\dot{\theta}(sen\alpha\ \hat{x} + cos\alpha\ \hat{z}) \times (-sen\dot{\theta}t\ \hat{x} + cos\dot{\theta}t\ \hat{y}) \tag{5.68}$$

Fazendo os produtos vetoriais, encontramos:

$$-2\vec{\omega}\times\vec{v} = -2\omega r\dot{\theta}(sen\alpha\ cos\dot{\theta}t\ \hat{z} - cos\alpha\ sen\dot{\theta}t\ \hat{y} - cos\alpha cos\theta\ \hat{x}) \tag{5.69}$$

Portanto, o torque na massa m será:

$$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} = 2\dot{\theta}\omega r^2\left(sen\alpha\ cos^2\dot{\theta}t\ \hat{y} + sen\alpha\ sen\dot{\theta}t\ cos\dot{\theta}t\ \hat{x}\right) \tag{5.70}$$

Agora precisamos estudar o caso do aro completo. Para tanto, fazemos a substituição:

$$m \to dm = \frac{M}{2\pi}d\theta \tag{5.71}$$

Essa substituição corresponde a considerar um elemento de massa infinitesimal dm ao invés da massa finita M. Com esse elemento infinitesimal faremos na sequência uma integração ao longo de todo o aro.

Precisamos também da correspondência entre θ e algo na expressão de $\vec{N}$. Essa correspondência está na variável $\theta = \dot{\theta}t$. Assim, substituindo na expressão do torque, obtemos:

$$d\vec{N} = \frac{M}{\pi}d\theta\dot{\theta}\omega r^2\left(sen\alpha\ cos^2\theta\ \hat{y} + sen\alpha\ sen\theta\ cos\theta\ \hat{x}\right) \tag{5.72}$$

Finalmente integramos. Temos uma componente em $\hat{x}$ com uma integral

$$\int_0^{2\pi} sen\theta\ cos\theta d\theta = 0 \tag{5.73}$$

e também uma integral

$$\int_0^{2\pi} cos^2\theta d\theta = \pi \tag{5.74}$$

Substituindo isso, encontramos

$$\vec{N} = \frac{1}{2}M\omega r^2\dot{\theta}sen\alpha\ \hat{y} \tag{5.75}$$

Problema 12 (pág. 292): *Uma massa m de um gás perfeito de peso molecular M, à temperatura T, é colocada em um cilindro de raio a, altura h, e posto emrotação rápida à velocidade angular ω em torno do deu eixo. Introduzindo um sistema de coordenadas rotativo com o gás, e aplicando as leis de equilíbrio estático, assumindo que todas as outras forças sejam negligíveis comparadas à força centrífuga, mostre que*

$$p = \frac{RT}{M}\rho_0 exp\left(\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}\right)$$

onde p é a pressão, r é a distânica do eixo, e

$$\rho_0 = \frac{mM\omega^2}{2\pi hRT\left[e^{\frac{M\omega^2 a^2}{RT}} - 1\right]}$$

Consideremos um elemento de volume pequeno δV no gás, de massa $\delta m = \rho\delta V$. Para ele, valerá a equação

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)' = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)' \tag{5.76}$$

Seguindo a instrução do enunciado, ignoraremos a aceleração de Coriolis, ficando apenas com

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)' = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \tag{5.77}$$

No referencial S', que acompanha a rotação do gás, o elemento de volume está imóvel e assim $\left(d^2\vec{r}/dt^2\right)' = 0$. Consequentemente,

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \tag{5.78}$$

$$\delta p = \frac{\omega^2 r\cdot\delta m}{\delta A} = \frac{\omega^2 r\cdot\rho\delta A\delta r}{\delta A} = \omega^2 r\cdot\rho\delta r \tag{5.79}$$

Nesse elemento de volume, vale a equação dos gases ideais

$$pV = nRT \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{n}{V}RT \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\rho}{M}RT \tag{5.80}$$

e consequentemente,

$$\delta p = \omega^2 r \cdot \frac{pM}{RT}\delta r \tag{5.81}$$

ou seja,

$$\frac{\delta p}{p} = \omega^2 \frac{M}{RT} r\delta r \tag{5.82}$$

Integrando de um ponto à distância r até outro ponto no perímetro do cilindro (em a),

$$[lnp]|_{p_0}^{p} = \frac{1}{2}\omega^2 \frac{M}{RT} \left[r^2\right]\Big|_r^a \tag{5.83}$$

Assim,

$$p_a = p(r)e^{\frac{M\omega^2}{2RT}(a^2-r^2)} \tag{5.84}$$

Podemos desdobrar isso em

$$p(r) = p_a \; e^{-\frac{M\omega^2 a^2}{2RT}} \;\; e^{\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}} \tag{5.85}$$

Por outro lado, apresentar um resultado dependente da pressão p_a é inconveniente. Por essa razão, vamos empregar a equação dos gases ideais 5.80, para traduzir 5.85 em termos da densidade:

$$\rho(r) = \rho_a e^{-\frac{M\omega^2 a^2}{2RT}} \;\; e^{\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}} \tag{5.86}$$

Vamos agora integrar a densidade no volume total do cilindro, e igualar o resultado à massa total de gás m :

$$m = \int \rho(r)dV = \rho_a e^{-\frac{M\omega^2 a^2}{2RT}} \int_0^a e^{\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}} h2\pi r dr = \pi h \rho_a e^{-\frac{M\omega^2 a^2}{2RT}} \int_0^{a^2} e^{\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}} d(r^2) \tag{5.87}$$

Assim,

$$m = \pi h \rho_a e^{-\frac{M\omega^2 a^2}{2RT}} \frac{2RT}{M\omega^2}\left[e^{\frac{M\omega^2}{2RT}} - 1\right] \tag{5.88}$$

Segue disso que

$$\rho_a = \frac{mM\omega^2}{2\pi hRT}\frac{e^{\frac{M\omega^2 a^2}{2RT}}}{e^{\frac{M\omega^2 a^2}{2RT}} - 1} \tag{5.89}$$

Substituindo-se em 5.86,

$$\rho(r) = \frac{mM\omega^2}{2\pi hRT}\frac{1}{e^{\frac{M\omega^2 a^2}{2RT}} - 1}e^{\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}} \tag{5.90}$$

Definindo agora

$$\rho_0 = \frac{mM\omega^2}{2\pi hRT}\frac{1}{e^{\frac{M\omega^2 a^2}{2RT}} - 1} \tag{5.91}$$

e considerando novamente a equação dos gases, encontramos finalmente:

$$p(r) = \frac{RT}{M}\rho_0 e^{\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}} \tag{5.92}$$

Problema 13 (pág. 293): *Uma partícula se move no plano xy sob a ação da força*

$$F = -kr$$

dirigida à origem. Determine os possíveis tipos de movimento, introduzindo um sistema de coordenadas rotativo em torno do eixo z com velocidade angular ω escolhida de modo que a força centrífuga cancele essa força F, e resolvendo as equações do movimento nesse sistema de coordenadas. Descreva os movimentos resultantes, e mostre que seu resultado está de acordo como os do problema 45 do capítulo 3.

Com essa força, escrevemos a aceleração

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{k}{m}\vec{r} \tag{5.93}$$

onde m é a massa da partícula. Note-se que evidenciamos o caráter vetorial da força.

Passaremos agora ao sistema de coordenadas rotativo:

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)' = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)' \tag{5.94}$$

Substituamos agora 5.93:

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)' = -\frac{k}{m}\vec{r} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)' \tag{5.95}$$

Queremos que a força centrífuga cancele a força que age sobre a partícula, isto é, que

$$\frac{k}{m}\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = 0 \tag{5.96}$$

Se escrevermos $\vec{r} = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'$ e substituírmos nessa expressão, encontraremos:

$$\frac{k}{m}\left(x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'\right) - \omega^2\left(x'\hat{x}' + y'\hat{y}'\right) = 0 \tag{5.97}$$

Separando por componentes, obteremos

$$z' \equiv 0, \qquad \frac{k}{m} - \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5.98}$$

ou seja, a partícula realiza movimento no plano $x'y'$ (pois $z' = 0$), e já que os eixos z e z' coincidem, podemos dizer que esse movimento se dá também ao longo do plano xy do referencial inercial.

Por outro lado, 5.95 se reduz a:

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)' = -2\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)' \tag{5.99}$$

Vamos simplificar nossa notação escrevendo

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)' = \vec{v}, \tag{5.100}$$

e assim 5.99 se reduz a:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)' = -2\vec{\omega}\times\vec{v} \tag{5.101}$$

Escrevemos agora $\vec{v} = U\hat{x}' + V\hat{y}' + W\hat{z}'$, e assim

$$\frac{d}{dt}(U\hat{x}' + V\hat{y}' + W\hat{z}') = -2\vec{\omega} \times (U\hat{x}' + V\hat{y}' + W\hat{z}') \tag{5.102}$$

ou seja,

$$\dot{U}\hat{x}' + \dot{V}\hat{y}' + \dot{W}\hat{z}' = -2(\pm\omega)\hat{z} \times (U\hat{x}' + V\hat{y}' + W\hat{z}') \tag{5.103}$$

o que resulta em

$$\dot{U}\hat{x}' + \dot{V}\hat{y}' + \dot{W}\hat{'}z = -2(\pm\omega)\,(U\hat{y}' - V\hat{x}') \tag{5.104}$$

Separando em componentes, verificamos que

$$\dot{W} = 0, \qquad \dot{U} = \pm 2\omega V \qquad \dot{V} = \mp 2\omega U \tag{5.105}$$

Combinando as duas últimas, obtemos:

$$\ddot{V} = -4\omega^2 V \tag{5.106}$$

Uma solução é

$$V(t) = Acos(2\omega t + \phi) \tag{5.107}$$

e assim de 5.105 obtemos

$$U(t) = \pm Asen(2\omega t + \phi) \tag{5.108}$$

Consequentemente,

$$\vec{v} = A(\pm sen(2\omega t + \phi)\hat{x}' + cos(2\omega t + \phi)\hat{y}') \tag{5.109}$$

Integrando, obtemos:

$$\vec{r}(t) = R(\mp cos(2\omega t + \phi)\hat{x}' + sen(2\omega t + \phi)\hat{y}') \tag{5.110}$$

onde criamos a nova constante $R = A/(2\omega)$. Isto significa que, no referencial rotativo, a particula realiza um movimento circular uniforme com velocidade angular 2ω e raio R.

Referências

[1] K. R. Symon, *Mechanics* (Addison-Wesley, 3^{rd} ed.)